

Academiejaar

2024-2025

Faculteit Toegepaste Ingenieurswetenschappen

Analoge Elektronica 1

Basisprincipes en netwerken – Oplossingenboek

Walter Daems

Bachelor of Science in de industriële wetenschappen: elektronica-ICT

1536FTIBAE 2-Basis analoge elektronica 1

5038FTISAE S1-Analoge elektronica



**Universiteit
Antwerpen**

This document has been typeset using \LaTeX and the `uantwerpendocs` package.

Deze tekst is een speciale versie voor studenten met dyslexie. Hij werd gezet met het Sylexiad font. Geef alsjeblieft feedback op je ervaring met deze tekst per e-mail aan walter.daems@uantwerpen.be.

Deze tekst werd gemaakt met $\text{Lua}\LaTeX$. Berekeningen werden uitgevoerd m.b.v. Matlab/Octave en algemene programmeer- en scripttalen (C/C++/Perl/Python).

Afbeeldingen werden gemaakt met PGF, TikZ en asymptote.

Schakelingen werden getekend met CircuiTikZ.

Al dit materiaal werd voorbereid op een GNU/Linux workstation.

De rechten op de handelsmerken vermeld in deze uitgaven zijn eigendom van hun respectieve eigenaars.

Productie van deze tekst was mogelijk dankzij:



Dit werk is onderhevig aan het auteursrecht. Als je een gratis gebruiks- en distributielicentie wenst op dit werk (als student of als docent), stuur dan een e-mailbericht met je vraag aan de auteur (walter.daems@uantwerpen.be).

AE-1-2024-1.2

CONFIDENTIAL AND PROPRIETARY.

© 2024 Universiteit Antwerpen, Alle rechten voorbehouden.

Inhoudsopgave

2	Fysische basiswetten	1
4	Elementen	3
5	Rekentechnieken voor lineaire netwerken	15
6	Standaardkenmerken en -modellen	49
7	Basisnetwerken, versterkers en comparatoren	65
8	Filters	77
9	Oscillatoren	91
10	Convertoren	93

Fysische basiswetten

Oplossing 2.2-1: De signaalsnelheid over een FR4 PCB bedraagt:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{\sqrt{4}} = 1.5 \times 10^8 \text{ m/s}$$

Dit leidt tot de frequentievoorwaarde:

$$f_{\max} \ll \frac{v}{l_{\max}} = \frac{1.5 \times 10^8 \text{ m/s}}{0.05 \text{ m}} = 3 \text{ GHz}$$

Oplossing 2.2-2: De signaalsnelheid over een FR4 PCB bedraagt:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{\sqrt{4}} = 1.5 \times 10^8 \text{ m/s}$$

Dit leidt tot de lengtevoorwaarde:

$$l_{\max} \ll \frac{v}{f_{\max}} = \frac{1.5 \times 10^8 \text{ m/s}}{1 \times 10^9 \text{ Hz}} = 15 \text{ cm}$$

Oplossing 2.2-3: De signaalsnelheid over een FR4 PCB bedraagt:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{\sqrt{4}} = 1.5 \times 10^8 \text{ m/s}$$

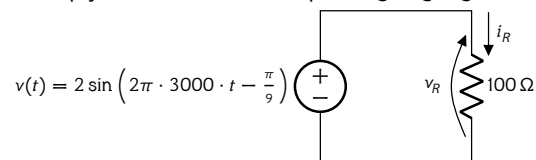
We schrijven de frequentievoorwaarde:

$$f_{\max} \ll \frac{v}{l_{\max}} = \frac{1.5 \times 10^8 \text{ m/s}}{0.2 \text{ m}} = 750 \text{ MHz}$$

Conclusie: deze voorwaarde is niet voldaan. Je haalt beter je cursus telecommunicatie over 'lange lijnen' erbij.

Oplossing 4.3.1-1: We beantwoorden de deelvragen één per één:

1. In verbruikersconventie zijn de pijlen van stroom en spanning tegengesteld, wat leidt tot:



$$v(t) = 2 \sin \left(2\pi \cdot 3000 \cdot t - \frac{\pi}{9} \right)$$

Merk op dat we voor de bronspanning eigenlijk moeten schrijven:

$$v(t) = 2 \text{ V} \cdot \sin \left(2\pi \cdot 3000 \text{ Hz} \cdot t - \frac{\pi}{9} \right)$$

Merk op dat de eerste term van het argument van de sinus frequentie maal tijd is, m.a.w. dimensieloos, zoals het hoort voor het argument van een wiskundige functie.

In de praktijk schrijven we zelden alle eenheden om de formules niet te overladen en schrijven we die enkel bij tussen- en eindresultaten.

Tussentijds de correctheid van delen van de vergelijking nakijken, loont echter wel degelijk de moeite.

2. De spanning over de weerstand is gelijk aan de bronspanning, m.a.w.:

$$v_R = 2 \sin \left(2\pi \cdot 3000t - \frac{\pi}{9} \right)$$

M.b.v. de wet van Ohm kennen we ook de stroom door de weerstand:

$$i_R = \frac{v_R}{R} = 0.02 \sin \left(2\pi \cdot 3000t - \frac{\pi}{9} \right)$$

Om de notatie compact te houden schrijven we opnieuw geen eenheden.

We kunnen nu het (momentane) vermogen i.f.v. de tijd berekenen als:

$$p_R(t) = v_R(t) \cdot i_R(t) = 0.04 \sin^2 \left(2\pi \cdot 3000t - \frac{\pi}{9} \right)$$

3. Het gemiddelde vermogen (d.w.z over een periode van de sinus gelijk aan 1/3000 s) kan berekend

worden als:

$$\begin{aligned}
 P_R &= \frac{1}{\frac{1}{3000}} \int_0^{1/3000} 0.04 \sin^2 \left(2\pi \cdot 3000t - \frac{\pi}{9} \right) dt \\
 &\downarrow u = 2\pi \cdot 3000t - \frac{\pi}{9} \\
 &= \frac{1}{\frac{1}{3000}} \cdot \frac{1}{2\pi \cdot 3000} \cdot 0.04 \int_{-\frac{\pi}{9}}^{2\pi - \frac{\pi}{9}} \sin^2 u \, du \\
 &\downarrow \sin^2 u \text{ is periodiek met periode } \pi \\
 &= \frac{0.04}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 u \, du \\
 &\downarrow \text{zie integraalformularium} \\
 &= \frac{0.04}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} [u - \sin u \cos u]_0^{2\pi} \\
 &= \frac{0.01}{\pi} \{2\pi - 0 - (0 - 0)\} \\
 &= 0.02 \text{ W}
 \end{aligned}$$

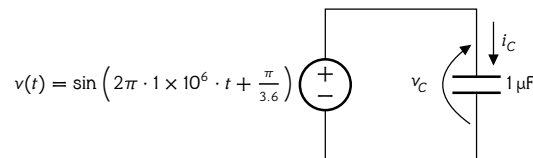
Merk op dat deze berekening veel gemakkelijker loopt indien we werken met complexe getallen, zoals we zullen zien in het hoofdstuk over rekentechnieken.

4. De energie die de weerstand gemiddeld over $\Delta t = 5 \text{ s}$ dissipeert bedraagt:

$$E = P_R \cdot \Delta t = 0.02 \text{ W} \cdot 5 \text{ s} = 0.1 \text{ W s} = 0.1 \text{ J}$$

Oplossing 4.3.1-2: We beantwoorden de deelvragen één per één:

1. In verbruikersconventie zijn de pijlen van stroom en spanning tegengesteld, wat leidt tot:



Merk op dat we voor de bronspanning eigenlijk moeten schrijven:

$$v(t) = 1 \text{ V} \cdot \sin \left(2\pi \cdot 1 \text{ MHz} \cdot t + \frac{\pi}{3.6} \right)$$

Merk op dat de eerste term van het argument van de sinus frequentie maal tijd is, m.a.w. dimensieloos, zoals het hoort voor het argument van een wiskundige functie.

In de praktijk schrijven we zelden alle eenheden om de formules niet te overladen en schrijven we die enkel bij tussen- en eindresultaten.

Tussentijds de correctheid van delen van de vergelijking nakijken, loont echter wel degelijk de moeite.

2. De spanning over de condensator is gelijk aan de bronspanning, m.a.w.:

$$v_C = \sin \left(2\pi \cdot 1 \times 10^6 t + \frac{\pi}{3.6} \right)$$

M.b.v. de veralgemeende wet van Ohm kennen we ook de stroom door de condensator:

$$\begin{aligned}
 i_C &= C \frac{dv_C}{dt} = 1 \times 10^{-6} \cdot 2\pi \cdot 1 \times 10^6 \cos \left(2\pi \cdot 1 \times 10^6 t + \frac{\pi}{3.6} \right) \\
 &= 2\pi \cos \left(2\pi \cdot 1 \times 10^6 t + \frac{\pi}{3.6} \right)
 \end{aligned}$$

Om de notatie compact te houden schrijven we opnieuw geen eenheden.

We kunnen nu het (momentane) vermogen i.f.v. de tijd berekenen als:

$$\begin{aligned}
 p_C(t) &= v_C(t) \cdot i_C(t) = 2\pi \sin\left(2\pi \cdot 1 \times 10^6 t + \frac{\pi}{3.6}\right) \cos\left(2\pi \cdot 1 \times 10^6 t + \frac{\pi}{3.6}\right) \\
 &\downarrow \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\
 &= \pi \sin\left(4\pi \cdot 1 \times 10^6 t + \frac{\pi}{1.8}\right)
 \end{aligned}$$

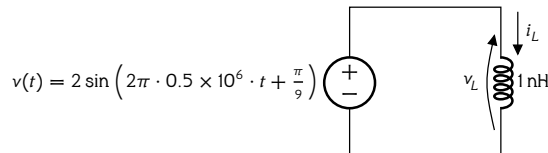
3. Het gemiddelde vermogen (d.w.z over een periode van de sinus gelijk aan 1×10^{-6} s) kan berekend worden als:

$$\begin{aligned}
 P_C &= \frac{\pi}{1 \times 10^{-6}} \int_0^{1 \times 10^{-6}} \sin\left(4\pi \cdot 1 \times 10^6 t + \frac{\pi}{1.8}\right) dt \\
 &\downarrow u = 4\pi \cdot 1 \times 10^6 t + \frac{\pi}{1.8} \\
 &= 1 \times 10^6 \cdot \pi \int_{+\frac{\pi}{1.8}}^{4\pi + \frac{\pi}{1.8}} \sin u du \\
 &\downarrow \sin u \text{ geïntegreerd over twee periodes is gelijk aan } 0 \\
 &= 0 \text{ W}
 \end{aligned}$$

Merk op dat deze berekening veel gemakkelijker loopt indien we werken met complexe getallen, zoals we zullen zien in het hoofdstuk over rekentechnieken.

Oplossing 4.3.1-3: We beantwoorden de deelvragen één per één:

1. In verbruikersconventie zijn de spijlen van stroom en spanning tegengesteld, wat leidt tot:



Merk op dat we voor de bronspanning eigenlijk moeten schrijven:

$$v(t) = 2 \text{ V} \cdot \sin\left(2\pi \cdot 500 \text{ kHz} \cdot t - \frac{\pi}{9}\right)$$

Merk op dat de eerste term van het argument van de sinus frequentie maal tijd is, m.a.w. dimensieloos, zoals het hoort voor het argument van een wiskundige functie.

In de praktijk schrijven we zelden alle eenheden om de formules niet te overladen en schrijven we die enkel bij tussen- en eindresultaten.

Tussentijds de correctheid van delen van de vergelijking nakijken, loont echter wel degelijk de moeite.

2. De spanning over de spoel is gelijk aan de bronspanning, m.a.w.:

$$v_L = 2 \sin\left(2\pi \cdot 0.5 \times 10^6 t - \frac{\pi}{9}\right)$$

M.b.v. de veralgemeende wet van Ohm kennen we ook de stroom door de spoel:

$$\begin{aligned}
 i_L &= \int \frac{v}{L} dt = -\frac{1}{1 \times 10^{-9}} \frac{2}{2\pi \cdot 0.5 \times 10^6} \cos\left(2\pi \cdot 0.5 \times 10^6 t - \frac{\pi}{9}\right) + K \\
 &= -\frac{2 \times 10^3}{\pi} \cos\left(2\pi \cdot 0.5 e6 t - \frac{\pi}{9}\right) + K
 \end{aligned}$$

met K een integratieconstante. Het zijn de beginvoorwaarden voor de spoel L (bv. of er al stroom doorliep bij $t = 0$) die deze constante zullen bepalen. We komen hier later in de cursus op terug. We

veronderstellen even dat de constante gelijk is aan nul. Om de notatie compact te houden schrijven we opnieuw geen eenheden.

We kunnen nu het (momentane) vermogen i.f.v. de tijd berekenen als:

$$\begin{aligned}
 p_L(t) &= v_L(t) \cdot i_L(t) = -\frac{4 \times 10^3}{\pi} \sin\left(2\pi \cdot 0.5 \times 10^6 t - \frac{\pi}{9}\right) \cos\left(2\pi \cdot 0.5 \times 10^6 t - \frac{\pi}{9}\right) \\
 &\downarrow \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\
 &= -\frac{2 \times 10^3}{\pi} \sin\left(4\pi \cdot 0.5 \times 10^6 t - \frac{\pi}{4.5}\right)
 \end{aligned}$$

3. Het gemiddelde vermogen (d.w.z. over een periode van de sinus gelijk aan 2×10^{-6} s) kan berekend worden als:

$$\begin{aligned}
 P_L &= -\frac{2 \times 10^3}{\pi} \int_0^{2 \times 10^{-6}} \pi \sin\left(4\pi \cdot 0.5 \times 10^6 t - \frac{\pi}{4.5}\right) dt \\
 &\downarrow u = 4\pi \cdot 0.5 \times 10^6 t - \frac{\pi}{4.5} \\
 &= -\frac{2 \times 10^3}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{4.5}}^{4\pi - \frac{\pi}{4.5}} \sin u \, du \\
 &\downarrow \sin u \text{ geïntegreerd over twee periodes is gelijk aan } 0 \\
 &= 0 \text{ W}
 \end{aligned}$$

Merk op dat deze berekening veel gemakkelijker loopt indien we werken met complexe getallen, zoals we zullen zien in het hoofdstuk over rekentechnieken.

Oplossing 4.3.1-4: Eerst de RC-tijdconstante:

$$\begin{aligned}
 \tau_{RC} &= RC \\
 \Leftrightarrow [\tau_{RC}] &= [RC] = [R] \cdot [C] = \Omega \cdot F = \frac{V}{A} \cdot \frac{C}{V} = \frac{C}{A/s} = s
 \end{aligned}$$

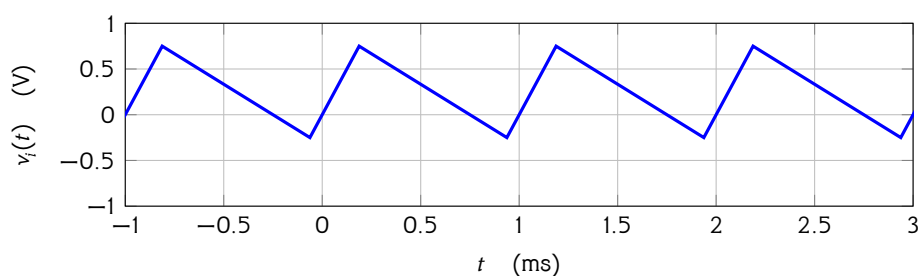
Vervolgens de RL-tijdconstante:

$$\begin{aligned}
 \tau_{RL} &= \frac{L}{R} \\
 \Leftrightarrow [\tau_{RL}] &= \left[\frac{L}{R}\right] = \frac{[L]}{[R]} = \frac{H}{\Omega} = \frac{\frac{Wb}{A}}{\frac{V}{A}} = \frac{Vs}{V} = s
 \end{aligned}$$

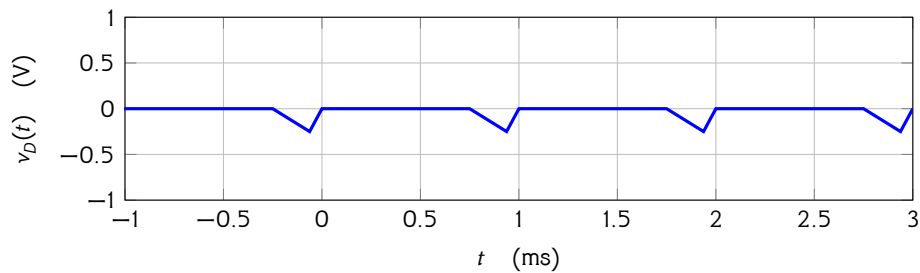
Tot slot de LC-tijdconstante:

$$\begin{aligned}
 \tau_{LC} &= \sqrt{LC} \\
 \Leftrightarrow [\tau_{LC}] &= [\sqrt{LC}] = \sqrt{[L] \cdot [C]} = \sqrt{\frac{Wb}{A} \cdot \frac{C}{V}} = \sqrt{\frac{Vs}{C/s} \cdot \frac{C}{V}} = \sqrt{\frac{Vs}{C/s} \cdot \frac{C}{V}} = \sqrt{s^2} = s
 \end{aligned}$$

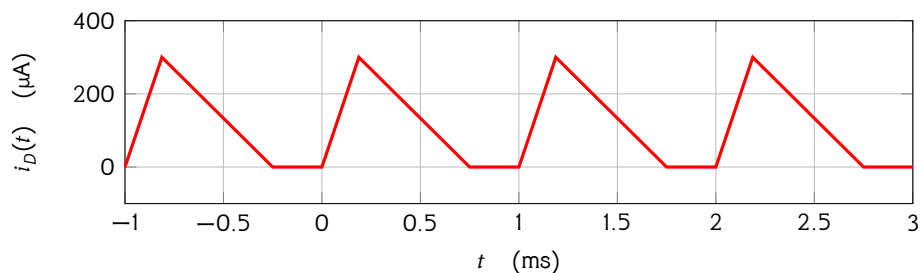
Oplossing 4.3.3-1: Hieronder de grafiek van de signaalbron:



Wanneer deingangsspanning positief is, zal de diode stroom geleiden en zal de weerstand de volledige spanning over zich krijgen. Wanneer de ingangsspanning negatief is, zal de diode sperren en de volledige spanning over zich krijgen. Dit leidt tot de volgende spanningscurve,



en de volgende stroomcurve,



De bron levert enkel vermogen wanneer er stroom vloeit. De periode waarover we uitmiddelen bedraagt 1 ms:

$$P = \frac{1}{1 \times 10^{-3}} \int_0^{1 \times 10^{-3}} v_i(t) i_D(t) dt$$

Enkel tussen $t = T$ en $t = T + 0.75$ ms (met $T = 0$) is de stroom verschillend van nul, waardoor (voor $T = 0$):

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{1 \times 10^{-3}} \int_0^{0.75 \times 10^{-3}} v_i(t) i_D(t) dt \\ &= 1 \times 10^3 \left(\int_0^{0.1875 \times 10^{-3}} \frac{1}{0.25 \times 10^{-3}} t \cdot \frac{400 \times 10^{-6}}{0.25 \times 10^{-3}} t dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{0.1875 \times 10^{-3}}^{0.75 \times 10^{-3}} \frac{-1}{0.75 \times 10^{-3}} (t - 0.75 \times 10^{-3}) \cdot \frac{-400 \times 10^{-6}}{0.75 \times 10^{-3}} (t - 0.75 \times 10^{-3}) dt \right) \\ &= 1 \times 10^3 \left(\int_0^{0.1875 \times 10^{-3}} 6400 t^2 dt + \int_{0.1875 \times 10^{-3}}^{0.75 \times 10^{-3}} \frac{6400}{9} (t - 0.75 \times 10^{-3})^2 dt \right) \\ &= 1 \times 10^3 \left(\left[\frac{6400}{3} t^3 \right]_0^{0.1875 \times 10^{-3}} + \frac{6400}{27} (t - 0.75 \times 10^{-3})^3 \right)_{0.1875 \times 10^{-3}}^{0.75 \times 10^{-3}} \\ &= 1 \times 10^3 \left((14.0625 \times 10^{-9} - 0) + (0 - (-42.1875 \times 10^{-9})) \right) \\ &= 1 \times 10^3 \cdot 56.25 \times 10^{-9} = 56.25 \mu\text{W} \end{aligned}$$

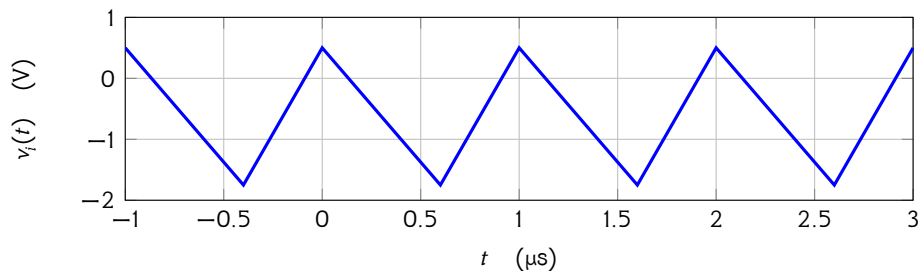
Dit is tevens het vermogen dat de bron moet leveren aan het netwerk.

Tip: het schrijfwerk reduceert zich significant indien we op een schaal van milliseconden werken:

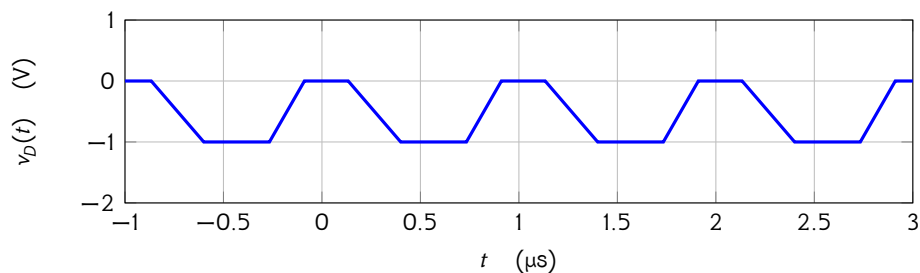
$$\begin{aligned}
 P &= \int_0^{0.75} v_i(t) i_D(t) dt \\
 &= \int_0^{0.1875} \frac{1}{0.25} t \cdot \frac{400 \times 10^{-6}}{0.25} t dt + \int_{0.1875}^{0.75} \frac{-1}{0.75} (t - 0.75) \cdot \frac{-400 \times 10^{-6}}{0.75} (t - 0.75) dt \\
 &= \int_0^{0.1875} 6\,400 \times 10^{-6} t^2 dt + \int_{0.1875}^{0.75} \frac{6\,400 \times 10^{-6}}{9} (t - 0.75)^2 dt \\
 &= \left[\frac{6\,400 \times 10^{-6}}{3} t^3 \right]_0^{0.1875} + \left[\frac{6\,400 \times 10^{-6}}{27} (t - 0.75)^3 \right]_{0.1875}^{0.75} \\
 &= (14.0625 \times 10^{-6} - 0) + (0 - (-42.1875 \times 10^{-6})) \\
 &= 56.25 \times 10^{-6} = 56.25 \mu\text{W}
 \end{aligned}$$

Onthoud dit als algemene tip: op schaal werken heeft schaalvoordelen.

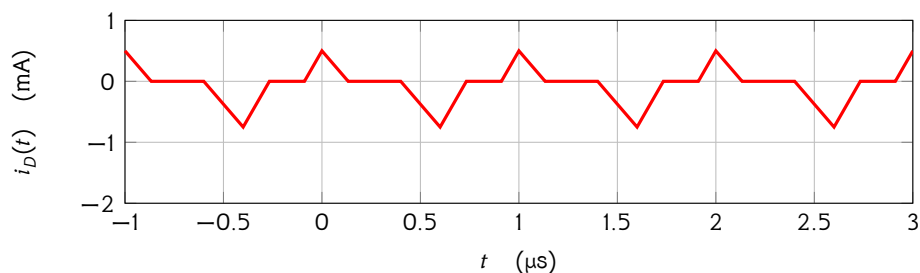
Oplossing 4.3.3-2: Hieronder de grafiek van de signaalbron:



Wanneer deingangsspanning positief is, zal de diode stroom geleiden en zal de weerstand de volledige spanning over zich krijgen. Wanneer deingangsspanning negatief is, zal de diode sperren en de volledige spanning over zich krijgen beperkt tot 1V. Dit leidt tot de volgende spanningscurve,



en de volgende stroomcurve,

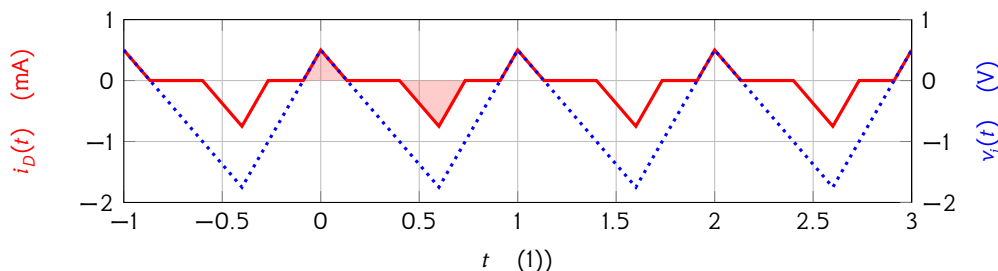


De bron levert enkel vermogen wanneer er stroom vloeit. De periode waarover we uitmiddelen bedraagt 1 μs .

We werken echter voor de eenvoud op μs -schaal. Dus:

$$P_R = \int_0^1 v_i(t) i_D(t) dt$$

Voor de zekerheid tekenen we deze situatie hieronder. Om een periode af te dekken, moeten we één positieve en één negatieve stroomdriehoek (zoals hieronder aangegeven) opnemen in onze berekening. Enkel daar is de stroom niet gelijk aan nul in een periode.



Voor we het vermogen in de driehoekjes kunnen berekenen, stellen we een vergelijking op voor de stijgende flank van de driehoeksgolf (net voor $t = 0$) en de dalende flank van de driehoeksgolf (net na $t = 0$).

Stijgende flank De curve stijgt 2.25 V op 0.4 μs , d.w.z. met een richtingscoëfficiënt

$$a_1 = \frac{2.25}{0.4} \text{ V}/\mu\text{s} = 5.625 \text{ V}/\mu\text{s}$$

De nuldoorgang t_1 net voor $t = 0$ kan je gemakkelijk berekenen vanuit de top van hetingangssignaal bij $t = 0$, waarbij $v_i(0) = 0.5 \text{ V}$:

$$a_1(0 - t_1) = 0.5 \text{ V} \quad \Leftrightarrow \quad t_1 = -\frac{0.5 \text{ V}}{a_1} = 0.08889 \mu\text{s}$$

De stijgende flank kan dus beschreven worden als:

$$v_i(t) = a_1(t - t_1) = 5.626(t - 0.08889)$$

indien we de tijd t in microseconden nemen.

Dalende flank De curve daalt 2.25 V op 0.6 μs , d.w.z. met een richtingscoëfficiënt

$$a_2 = \frac{-2.25}{0.6} \text{ V}/\mu\text{s} = -3.75 \text{ V}/\mu\text{s}$$

De nuldoorgang t_2 net na $t = 0$ kan je gemakkelijk berekenen vanuit de top van hetingangssignaal bij $t = 0$, waarbij $v_i(0) = 0.5 \text{ V}$:

$$a_2(t_2 - 0) = -0.5 \text{ V} \quad \Leftrightarrow \quad t_2 = -\frac{0.5 \text{ V}}{a_2} = 0.13333 \mu\text{s}$$

De dalende flank kan dus beschreven worden als:

$$v_i(t) = a_2(t - t_2) = -3.75(t - 0.1333)$$

indien we de tijd t in microseconden nemen.

De stroomcurves zijn identiek maar per volt zal er maar 1 mA stromen, wat de 1/1000 verklaart in de onderstaande integralen.

Dit laat toe het vermogen te bepalen dat overeenkomt met het positieve driehoekje:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \int_{-0,0889}^0 5.625(t + 0.0889) \cdot \frac{5.625}{1000}(t + 0.0889) dt + \int_0^{0.1333} -3.75(t - 0.1333) \cdot \frac{-3.75}{1000}(t - 0.1333) dt \\
 &= \int_{-0,0889}^0 0.03164(t + 0.0889)^2 dt + \int_0^{0.1333} 0.01406(t - 0.1333)^2 dt \\
 &= 0.03164 \left[\frac{(t + 0.0889)^3}{3} \right]_{-0,0889}^0 + 0.01406 \left[\frac{(t - 0.1333)^3}{3} \right]_0^{0.1333} \\
 &= \left(\frac{0.0889^3}{3} - 0 \right) + \left(0 - \frac{(-0.1333)^3}{3} \right) \\
 &= 18.52 \mu\text{W}
 \end{aligned}$$

Het vermogen dat overeenkomt met het negatieve driehoekje splitsen we op in twee stukken: het deel dat door de diode wordt verbruikt, nl.

$$\begin{aligned}
 P_2 &= \int_{0.4}^{0.6} (-1) \cdot \frac{-3.75}{1000}(t - 0.4) dt + \int_{0.6}^{0.7333} (-1) \cdot \frac{5.625}{1000}(t - 7.333) dt \\
 &= \dots \\
 &= 75 \mu\text{W} + 50 \mu\text{W}
 \end{aligned}$$

en het deel dat door de weerstand wordt verbruikt, nl.

$$\begin{aligned}
 P_3 &= \int_{0.4}^{0.6} (-3.75)(t - 0.4) \cdot \frac{-3.75}{1000}(t - 0.4) dt + \int_{0.6}^{0.7333} 5.625(t - 0.7333) \cdot \frac{5.625}{1000}(t - 0.7333) dt \\
 &= \dots \\
 &= 37.5 \mu\text{W} + 25 \mu\text{W}
 \end{aligned}$$

Het totaal bedraagt dus $P = 187.5 \mu\text{W}$.

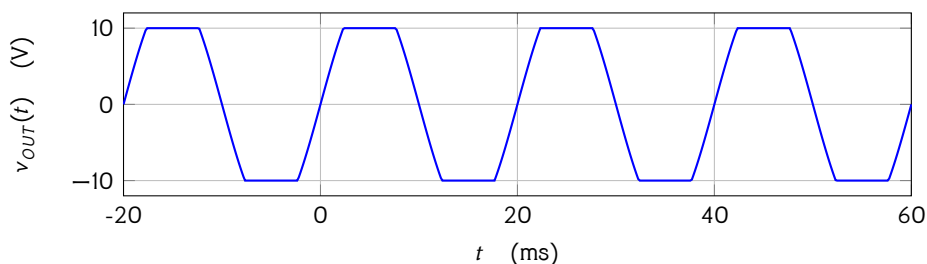
Oplossing 4.4.3-1: De ingangsspanning waarbij de opamp overgaat van lineaire werking naar positieve saturatie is:

$$V_{IN+} = \frac{15\text{V}}{10^5} = 150 \mu\text{V}$$

De overgang van lineaire werking naar negatieve saturatie is:

$$V_{IN-} = \frac{-10\text{V}}{10^5} = -100 \mu\text{V}$$

Oplossing 4.4.3-2: We tekenen eerst de uitgangsspanning:



Om het schrijfwerk bij het rekenen te vereenvoudigen, werken we weer op een vereenvoudigde tijdschaal, nl. een periode lopende van 0 tot T . We berekenen eerst de intervallen waarbinnen de sinus niet geclipt is, d.w.z. voor

$$t \in [0, \alpha T] \cup [(0.5 - \alpha)T, (0.5 + \alpha)T] \cup [(1 - \alpha)T, T]$$

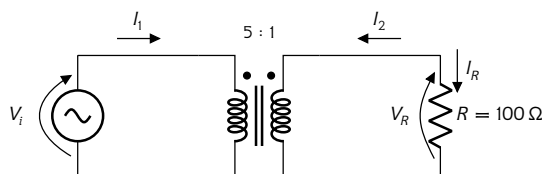
met

$$\alpha = \frac{\arcsin \frac{10}{15}}{2\pi} = 0.11614$$

We kunnen het gemiddelde vermogenverbruik dan ook opdelen in lineaire stukken en saturatiestukken:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \left[\int_0^{\alpha T} \frac{15^2}{560} \sin^2 \left(\frac{2\pi}{T} t \right) dt + \frac{10^2}{560} (0.5 - 2\alpha)T \right. \\ &\quad \left. + \int_{(0.5-\alpha)T}^{(0.5+\alpha)T} \frac{15^2}{560} \sin^2 \left(\frac{2\pi}{T} t \right) dt + \frac{10^2}{560} (0.5 - 2\alpha)T + \int_{(1-\alpha)T}^T \frac{15^2}{560} \sin^2 \left(\frac{2\pi}{T} t \right) dt \right] \\ &= \dots \\ &= \frac{1}{T} [7.444 \times 10^{-3} \cdot T + 47.807 \times 10^{-3} \cdot T + 14.888 \times 10^{-3} \cdot T + 47.807 \times 10^{-3} \cdot T + 7.444 \times 10^{-3} \cdot T] \\ &= 125.39 \text{ mW} \end{aligned}$$

Oplossing 4.5.1-1: Voor we starten duiden we enkele stromen en spanningen aan op het schema:



We rekenen ineens met de amplitudes. Gegeven de windingsverhouding $N_1 : N_2 = 5 : 1$, weten we:

$$V_R = \frac{N_1}{N_2} V_i = \frac{1}{5} 100 \text{ V} = 20 \text{ V}$$

En daardoor

$$I_R = \frac{V_R}{100 \Omega} = 0.2 \text{ A}$$

De transformatorstroom $I_2 = -I_R$. Deze stroom wordt door de transformator terug naar de primaire getransformeerd als:

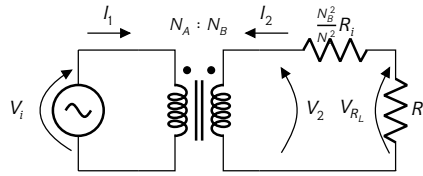
$$I_1 = -\frac{1}{5} I_2 = 40 \text{ mA}$$

we maken tot slot de vermogenbalans op:

$$\begin{aligned} P_{bron} &= P_R \\ \Leftrightarrow \frac{1}{T} \int_0^T V_i \sin(\omega t) I_1 \sin(\omega t) dt &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{V_R^2 \sin^2(\omega t)}{R} dt \\ \Leftrightarrow V_i I_1 \cdot \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt &= \frac{V_R^2}{R} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt \\ \Leftrightarrow 100 \text{ V} \cdot 40 \text{ mA} &= \frac{(20 \text{ V})^2}{100 \Omega} \\ \Leftrightarrow 4 \text{ W} &\stackrel{!!}{=} 4 \text{ W} \end{aligned}$$

Merk op dat deze berekening heel wat makkelijker zal worden van zodra we gebruik kunnen maken van complexe getallen om AC-berekeningen uit te voeren (zie hoofdstuk over Rekentechnieken).

Oplossing 4.5.1-2: Uit de transformatieregels voor impedanties weten we dat we een impedantie van de primaire naar de secundaire kunnen doorschuiven. We passen dit toe voor R_i : als volgt:



Hierdoor weten we:

$$V_2 = \frac{N_B}{N_A} V_i$$

en daardoor:

$$I_2 = -\frac{V_2}{R_L + \frac{N_B^2}{N_A^2} R_i} = -\frac{\frac{N_B}{N_A} V_i}{R_L + \frac{N_B^2}{N_A^2} R_i}$$

Bijgevolg wordt de spanning over de weerstand R_L gelijk aan:

$$V_{R_2} = -R_L I_2 = \frac{R_L \frac{N_B}{N_A} V_i}{R_L + \frac{N_B^2}{N_A^2} R_i}$$

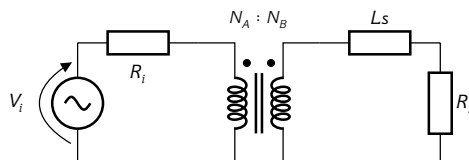
De stroom in de primaire kring wordt

$$I_1 = -\frac{N_B}{N_A} I_2 = \frac{N_B}{N_A} \frac{\frac{N_B}{N_A} V_i}{R_L + \frac{N_B^2}{N_A^2} R_i} = \frac{\frac{N_B^2}{N_A^2} V_i}{R_L + \frac{N_B^2}{N_A^2} R_i}$$

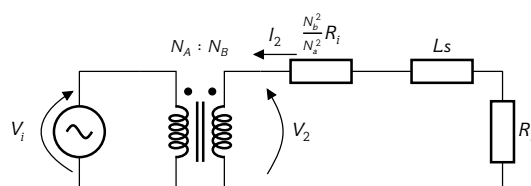
waardoor we het vermogen kunnen schrijven als

$$P = V_i I_1 = \frac{\frac{N_B^2}{N_A^2} V_i^2}{R_L + \frac{N_B^2}{N_A^2} R_i}$$

Oplossing 4.5.1-3: Aangezien we uitgaan van het feit dat je de rekentechniek 'werken met s ' kent, werken we ineens met complexe impedanties.



We schuiven de impedantie van de primaire door naar de secundaire:



Hierdoor kunnen we V_2 bepalen:

$$V_2 = \frac{N_B}{N_A} V_i$$

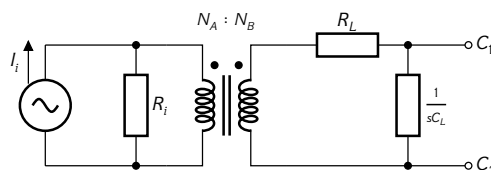
en ook I_2 :

$$I_2 = -\frac{V_2}{\frac{N_B^2}{N_A^2} R_i + Ls + R_L}$$

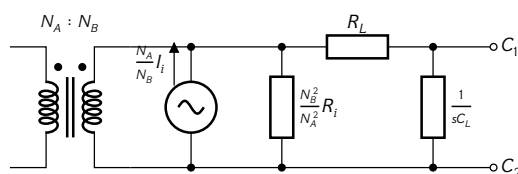
waardoor we het actief vermogen in R_L kunnen bepalen als:

$$\begin{aligned} P_{R_L} &= \frac{R_L I_2 I_2^*}{2} = \frac{R_L |I_2|^2}{2} = \frac{R_L}{2} \left| \frac{\frac{N_B^2}{N_A^2} V_i}{\frac{N_B^2}{N_A^2} R_i + j\omega L + R_L} \right|^2 \\ &= \frac{R_L}{2} \frac{\frac{N_B^4}{N_A^4} V_i^2}{\left(\frac{N_B^2}{N_A^2} R_i + R_L \right)^2 + (\omega L)^2} \end{aligned}$$

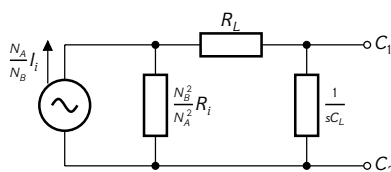
Oplossing 4.5.1-4: Aangezien we uitgaan van het feit dat je de rekentechniek 'werken met s ' kent, werken we ineens met complexe impedanties.



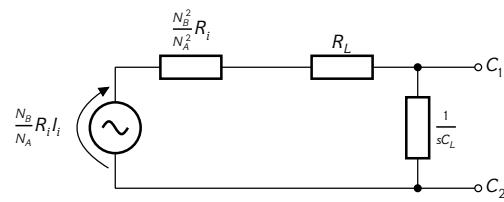
We schuiven de elementen van de primaire door naar de secundaire:



Vermits de transformator nu op een van zijn poorten niet aangesloten is ('los hangt'), kunnen we hem weglaten.



Nu kunnen we het Thévenin-equivalent bepalen, door (1) de openklemspanning te bepalen tussen C_1 en C_2 , en (2) de impedantie tussen C_1 en C_2 te bepalen waarbij alle bronnen 'dood' gemaakt worden (spanningsbronnen kortsluiten, van stroombronnen een open keten maken). We maken het rekenwerk wat eenvoudiger, door de stroombron en de linkse impedantie te vervangen door hun Thévenin equivalent:



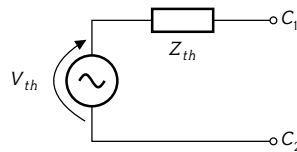
Op die manier wordt de openklemspanning eenvoudig te bepalen:

$$V_{th} = \frac{\frac{1}{sC_L}}{\frac{1}{sC_L} + R_L + \frac{N_B^2}{N_A^2} R_i} \cdot \frac{N_B}{N_A} R_i I_i = \frac{1}{1 + sC_L(R_L + \frac{N_B^2}{N_A^2} R_i)} \cdot \frac{N_B}{N_A} R_i I_i$$

en ook de de impedantie met 'dode' bronnen:

$$Z_{th} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{N_B^2}{N_A^2} R_i + R_L} + sC_L} = \frac{\frac{N_B^2}{N_A^2} R_i + R_L}{1 + s \left(\frac{N_B^2}{N_A^2} R_i + R_L \right) C_L}$$

waarbij de opstelling het klassieke Thévenin-combo is:



Rekentechnieken voor lineaire netwerken

Oplossing 5.1.3-1: Door hetingangssignaal in te vullen krijgen we de volgende vergelijking:

$$RC \frac{di_C}{dt} + i_C = C\omega \cos \omega t \quad (5.1)$$

In je lessen wiskunde heb je deze vergelijking leren oplossen door het probleem op te splitsen in een geassocieerd homogeen probleem (met oplossing $i_{C,h}$) en het vinden van een particuliere oplossing $i_{C,p}$. De algemene oplossing is dan de som van beide oplossingen:

$$i_C = i_{C,h} + i_{C,p}$$

De geassocieerde homogene vergelijking is:

$$RC \frac{di_{C,h}}{dt} + i_{C,h} = 0$$

wat met de D -operator kan voorgesteld worden als:

$$(RC \cdot D + 1)i_{C,h} = 0$$

waaruit $D = -1/RC$. De algemene oplossing van de vergelijking is dus

$$i_{C,h} = A e^{-\frac{t}{RC}}$$

met A een reële constante.

Vervolgens zoeken we een particuliere oplossing door een annihilator te zoeken voor het rechterlid van (5.1), $\omega \cos \omega t$. We weten dat $((D-a)^2 + b^2)y = 0$ oplossingen heeft van de vorm $y = U e^{at} \sin(bt) + V e^{at} \cos(bt)$, bijgevolg is $D^2 + \omega^2$ een annihilator van het rechterlid.

Toepassen van deze annihilator op de oorspronkelijke vergelijking levert het volgende op:

$$(D^2 + \omega^2)(RCD + 1)i_{C,p} = 0$$

met de volgende algemene oplossing:

$$i_{C,p} = A e^{-\frac{t}{RC}} + U \sin \omega t + V \cos \omega t$$

waaruit we de term horende bij de oplossing van de oorspronkelijke geassocieerde homogene vergelijking geschrapt hebben.

We bepalen nu U en V door deze uitdrukking in te vullen in de gegeven vergelijking:

$$RC(U\omega \cos \omega t - V\omega \sin \omega t) + U \sin \omega t + V \cos \omega t = C\omega \cos \omega t$$

Deze vergelijking kan enkel voor alle t voldaan zijn, indien:

$$\begin{cases} RCU\omega + V = C\omega \\ -RCV\omega + U = 0 \end{cases}$$

waaruit we kunnen afleiden:

$$U = \frac{RC^2\omega^2}{1 + (RC\omega)^2} \qquad V = \frac{C\omega}{1 + (RC\omega)^2}$$

Bijgevolg:

$$i_{C,p} = \frac{RC^2\omega^2}{1 + (RC\omega)^2} \sin \omega t + \frac{C\omega}{1 + (RC\omega)^2} \cos \omega t$$

De totale (algemene) oplossing wordt op die manier:

$$i_C = A e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{RC^2\omega^2}{1 + (RC\omega)^2} \sin \omega t + \frac{C\omega}{1 + (RC\omega)^2} \cos \omega t$$

Uit het stellen van de beginvoorwaarde ($i_C(0) = 0$) kan je afleiden dat:

$$A = -\frac{C\omega}{1 + (RC\omega)^2}$$

Oplossing 5.1.3-2: We lossen de volgende differentiaalvergelijking op:

$$LC \frac{d^2 v_{R_2}}{dt^2} + R_2 C \frac{dv_{R_2}}{dt} + v_{R_2} = R_2 t \quad (5.2)$$

In je lessen wiskunde heb je deze vergelijking leren oplossen door het probleem op te splitsen in een geassocieerd homogeen probleem (met oplossing $i_{C,h}$) en het vinden van een particuliere oplossing $i_{C,p}$. De algemene oplossing is dan de som van beide oplossingen:

$$v_{R_2} = v_{R_2,h} + v_{R_2,p}$$

De geassocieerde homogene vergelijking is:

$$LC \frac{d^2 v_{R_2,h}}{dt^2} + R_2 C \frac{dv_{R_2,h}}{dt} + v_{R_2,h} = 0$$

wat met de D -operator kan voorgesteld worden als:

$$(LC \cdot D^2 + R_2 C \cdot D + 1)v_{R_2,h} = 0$$

waaruit we kunnen oplossen:

$$D = \frac{-R_2}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R_2}{L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

Gezien de voorwaarde uit de opgaven, kunnen we dit herwerken tot:

$$D = \frac{-R_2}{2L} \pm j \underbrace{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R_2}{L}\right)^2}}_{\equiv \omega_d}$$

Hieruit kunnen we concluderen dat de algemene oplossing er als volgt uitziet:

$$v_{R_2,h} = A e^{-\frac{R_2}{2L}t} \sin \omega_d t + B e^{-\frac{R_2}{2L}t} \cos \omega_d t$$

met A en B reële constanten.

Vervolgens zoeken we een particuliere oplossing door een annihilator te zoeken voor het rechterlid van (5.2), Rt . We weten dat $D^2 y = 0$ oplossingen heeft van de vorm $y = Ut + V$, bijgevolg is D^2 een annihilator van het rechterlid.

Toepassen van deze annihilator op de oorspronkelijke vergelijking levert het volgende op:

$$D^2(LC \cdot D^2 + R_2 C \cdot D + 1)v_{R_2,p} = 0$$

met de volgende algemene oplossing:

$$v_{R_2,p} = Ut + V + A e^{-\frac{R_2}{2L}t} \sin \omega_d t + B e^{-\frac{R_2}{2L}t} \cos \omega_d t$$

waaruit we de term horende bij de oplossing van de oorspronkelijke geassocieerde homogene vergelijking geschrapt hebben.

We bepalen nu U en V door deze uitdrukking in te vullen in de gegeven vergelijking:

$$\begin{aligned} LC(Ut + V)'' + R_2 C(Ut + V)' + Ut + V &= Rt \\ \Leftrightarrow R_2 CU + Ut + V &= R_2 t \end{aligned}$$

Deze vergelijking kan enkel voor alle t voldaan zijn, indien:

$$\begin{cases} R_2 CU + V = 0 \\ U = R_2 \end{cases}$$

waaruit we kunnen afleiden:

$$U = R_2 \qquad V = -R_2^2 C$$

Bijgevolg:

$$v_{R_2,p} = R_2(t - R_2 C)$$

wat ons de volgende (algemene) oplossing geeft:

$$v_{R_2} = A e^{-\frac{R_2}{2L}t} \sin \omega_d t + B e^{-\frac{R_2}{2L}t} \cos \omega_d t + R_2(t - R_2 C)$$

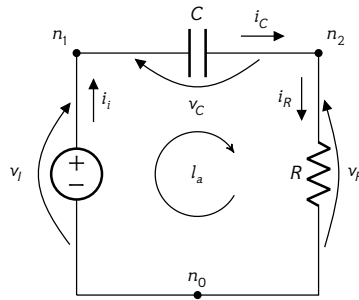
met bijhorende afgeleide:

$$\begin{aligned} \frac{dv_{R_2}}{dt} &= A \omega_d e^{-\frac{R_2}{2L}t} \cos \omega_d t - A \frac{R_2}{2L} e^{-\frac{R_2}{2L}t} \sin \omega_d t - B \omega_d e^{-\frac{R_2}{2L}t} \sin \omega_d t - B \frac{R_2}{2L} e^{-\frac{R_2}{2L}t} \cos \omega_d t + R_2 \\ &= A e^{-\frac{R_2}{2L}t} (\omega_d \cos \omega_d t - \frac{R_2}{2L} \sin \omega_d t) - B e^{-\frac{R_2}{2L}t} (\omega_d \sin \omega_d t + \frac{R_2}{2L} \cos \omega_d t) + R_2 \end{aligned}$$

We stellen nu de beginvoorwaarden, wat leidt tot:

$$\begin{cases} v_{R_2}(0) = 1 \\ \frac{dv_{R_2}(t)}{dt} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B - R_2^2 C = 1 \\ A \omega_d - B \frac{R_2}{2L} + R_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 1 + R_2^2 C \\ A = R_2 \frac{1 + R_2^2 C}{\omega_d} - 1 \end{cases}$$

Oplossing 5.1.3-3: We starten in het tijddomein en duiden alle stromen en spanningen aan op het schema, kiezen een referentieknoop n_0 en duiden alle andere knopen en ook de lus aan die we zullen beschouwen:



Vervolgens schrijven we Kirchhoffs wetten, aangevuld met de (veralgemeende) wetten van Ohm:

$$\left\{ \begin{array}{ll} i_i = i_C & (\text{KCL-}n_1) \\ i_C = i_R & (\text{KCL-}n_2) \\ v_I - v_C - v_R = 0 & (\text{KVL-}I_a) \\ v_R = Ri_R & (\text{BE-}R) \\ i_C = C \frac{dv_C}{dt} & (\text{BE-}C) \end{array} \right.$$

Uit deze vergelijkingen elimineren we i_C , v_C en i_i startende vanuit de laatste vergelijking om i_R en v_R te bepalen:

$$\left\{ \begin{array}{l} i_R = C \frac{d(v_I - Ri_R)}{dt} = C \left(\frac{dv_I}{dt} - R \frac{di_R}{dt} \right) \\ v_R = Ri_R \end{array} \right.$$

De eerste vergelijking is een eerste orde differentiaalvergelijking:

$$RC \frac{di_R}{dt} + i_R = C \frac{dv_I}{dt}$$

We kunnen deze vergelijking oplossen voor $v_I = t$ en vinden zo:

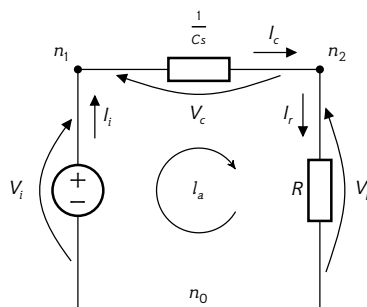
$$i_R = C \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

Bijgevolg:

$$v_R = RC \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

In het DC-domein wordt de condensator een open keten en bijgevolg is $I_R = 0$ en $V_R = 0$.

In het frequentiedomein vervangen we alle passieve componenten door een complexe impedantie en vervangen we alle signalen (stromen en spanningen) door hun amplitude (aangeduid met hoofdletter en klein onderschrift), en krijgen zo:



Hieruit kunnen we gemakkelijk een gelijkaardig stelsel afleiden als in het tijddomein:

$$\left\{ \begin{array}{ll} I_i = I_c & (\text{KCL-}n_1) \\ I_c = I_r & (\text{KCL-}n_2) \\ V_i - V_c - V_r = 0 & (\text{KVL-}l_a) \\ V_r = RI_r & (\text{BE-}R) \\ I_c = CsV_c & (\text{BEC}) \end{array} \right.$$

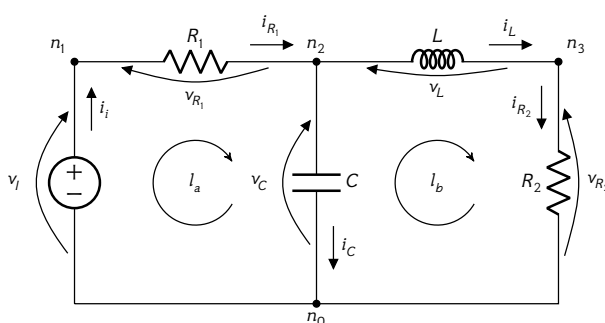
Met een gelijkaardige afleiding, krijgen we:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_r = Cs(V_i - RI_r) \\ V_r = RI_r \end{array} \right.$$

Waaruit we gemakkelijk de volgende conclusie kunnen trekken:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_r = \frac{CsV_i}{1 + RCs} \\ V_r = \frac{RCs}{1 + RCs}V_i \end{array} \right.$$

Oplossing 5.1.3-4: We starten met het tijddomein. We tekenen opnieuw het schema en duiden alle mogelijke stromen en spanningen aan, kiezen een referentieknoop n_0 en duiden alle andere knopen en ook de lussen aan die we zullen beschouwen:



Nu kunnen we Kirchhoffs vergelijkingen en de takrelaties neerschrijven:

$$\left\{ \begin{array}{ll} i_i = i_{R_1} & (\text{KCL-}n_1) \\ i_{R_1} = i_C + i_L & (\text{KCL-}n_2) \\ i_L = i_{R_2} & (\text{KCL-}n_3) \\ v_i = v_{R_1} + v_C & (\text{KVL-}l_a) \\ v_C = v_L + v_{R_2} & (\text{KVL-}l_b) \\ v_{R_1} = R_1 i_{R_1} & (\text{BE-}R_1) \\ i_C = C \frac{dv_C}{dt} & (\text{BE-}C) \\ v_L = L \frac{di_L}{dt} & (\text{BE-}L) \\ v_{R_2} = R_2 i_{R_2} & (\text{BE-}R_1) \end{array} \right.$$

Uit dit stelsel vergelijkingen, elimineren we alle variabelen, behalve de ingangsspanning v_I en de stroom een spanning horende bij R_2 , nl. i_{R_2} en v_{R_2} . We starten met de eliminatie van v_{R_1} , v_L , v_{R_2} en i_{R_1} :

$$\begin{cases} i_L = i_{R_2} \\ v_I = R_1(i_C + i_L) + v_C \\ v_C = L \frac{di_L}{dt} + R_2 i_{R_2} \\ i_C = C \frac{dv_C}{dt} \end{cases}$$

Vervolgens elimineren we i_L en i_C :

$$\begin{cases} v_I = R_1 \left(C \frac{dv_C}{dt} + i_{R_2} \right) + v_C \\ v_C = L \frac{di_{R_2}}{dt} + R_2 i_{R_2} \end{cases}$$

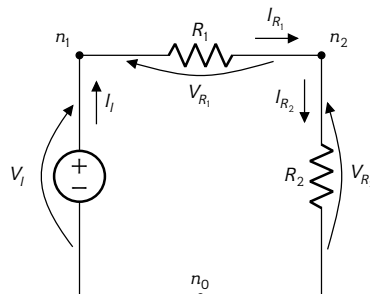
Tot slot elimineren we v_C :

$$\begin{aligned} v_I &= R_1 \left(C \left(L \frac{d^2 i_{R_2}}{dt^2} + R_2 \frac{di_{R_2}}{dt} \right) + i_{R_2} \right) + L \frac{di_{R_2}}{dt} + R_2 i_{R_2} \\ \Leftrightarrow v_I &= R_1 C L \frac{d^2 i_{R_2}}{dt^2} + (R_1 R_2 C + L) \frac{di_{R_2}}{dt} + (R_1 + R_2) i_{R_2} \\ \Leftrightarrow \frac{v_I}{R_1} &= LC \frac{d^2 i_{R_2}}{dt^2} + \left(R_2 C + \frac{L}{R_1} \right) \frac{di_{R_2}}{dt} + \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) i_{R_2} \end{aligned}$$

Als je nog wiskundige oefening nodig hebt: ga je gang om deze vergelijking verder op te lossen. Er bestaan echter ook moderne hulpmiddelen om dergelijke vergelijkingen op te lossen. Bv. Matlab. Het onderstaande script berekent de oplossing van deze lineaire differentiaalvergelijking met $v_I(t) = t$:

```
clear all;
syms i(t) L C R1 R2;
di = diff(i,t,1);
ddi = diff(i,t,2);
eqn = L*C*ddi + (R2*C+L/R1)*di + (1+R2/R1)*i == t/R1;
inicond = [ di(0) == 1e-3, ddi(0) == 0 ];
result = dsolve(eqn, inicond);
pretty(result);
```

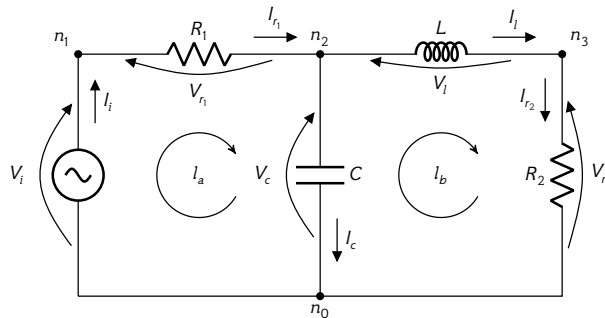
In DC-regime wordt de condensator een open keten en de spoel een kortsluiting, waardoor het netwerk zich reduceert tot:



Met een afleiding gelijk aan die uit het eerste deel van de oefening, bekommen we het volgende resultaat:

$$\begin{aligned} I_{R_2} &= \frac{V_I}{R_1 + R_2} \\ V_{R_2} &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_I \end{aligned}$$

In het frequentiedomein vervangen we alle passieve componenten door een complexe impedantie en vervangen we alle signalen (stromen en spanningen) door hun amplitude (aangeduid met hoofdletter en klein onderschrift), en krijgen zo:



Hieruit kunnen we gemakkelijk een gelijkaardig stelsel afleiden als in het tijddomein:

$$\begin{aligned}
 I_i &= I_{r_1} && \text{(KCL-}n_1\text{)} \\
 I_{r_1} &= I_c + I_l && \text{(KCL-}n_2\text{)} \\
 I_l &= I_{r_2} && \text{(KCL-}n_3\text{)} \\
 V_i &= V_{r_1} + V_c && \text{(KVL-}I_a\text{)} \\
 V_c &= V_l + V_{r_2} && \text{(KVL-}I_b\text{)} \\
 V_{r_1} &= R_1 I_{r_1} && \text{(BE-}R_1\text{)} \\
 I_c &= CsV_c && \text{(BE-C)} \\
 V_l &= LsI_l && \text{(BE-L)} \\
 V_{r_2} &= R_2 I_{r_2} && \text{(BE-}R_1\text{)}
 \end{aligned}$$

Uit dit stelsel vergelijkingen, elimineren we alle variabelen, behalve de ingangsspanning V_i en de stroom een spanning horende bij R_2 , nl. I_{r_2} en V_{r_2} . We starten met de eliminatie van V_{r_1} , V_l , V_{r_2} en I_{r_1} :

$$\begin{cases}
 I_l = I_{r_2} \\
 V_i = R_1(I_c + I_l) + V_c \\
 V_c = LsI_l + R_2I_{r_2} \\
 I_c = CsV_c
 \end{cases}$$

Vervolgens elimineren we I_l en I_c :

$$\begin{cases}
 V_i = R_1(CsV_c + I_{r_2}) + V_c \\
 V_c = LsI_{r_2} + R_2I_{r_2}
 \end{cases}$$

Tot slot elimineren we V_c :

$$\begin{aligned}
 V_i &= R_1 \left(Cs(LsI_{r_2} + R_2I_{r_2}) + I_{r_2} \right) + LsI_{r_2} + R_2I_{r_2} \\
 \Leftrightarrow V_i &= I_{r_2} \left(R_1(Cs(Ls + R_2) + 1) + Ls + R_2 \right) \\
 \Leftrightarrow I_{r_2} &= \frac{V_i}{R_1LCs^2 + (L + R_1R_2C)s + R_1 + R_2}
 \end{aligned}$$

en bijgevolg ook:

$$V_{r_2} = \frac{R_2}{R_1LCs^2 + (L + R_1R_2C)s + R_1 + R_2} V_i$$

Oplossing 5.1.3-5: We weten uit eerdere berekeningen dat:

$$\begin{cases} I_r = \frac{CsV_i}{1+RCs} \\ V_r = \frac{RCs}{1+RCs}V_i \end{cases}$$

We berekenen nu het schijnbaar vermogenverbruik van de condensator:

$$S_c = \frac{V_c I_c^*}{2} = \frac{1}{2} Z_c I_c I_c^* = \frac{1}{2} Z_c |I_c|^2$$

Aangezien $I_c = I_r$, en $s = j\omega$, weten we dat:

$$S_c = \frac{1}{2} \frac{1}{j\omega C} |I_r|^2 = -\frac{1}{2} \frac{1}{1+(RC\omega)^2} \frac{V_i^2}{j\omega C}$$

waaruit blijkt dat dit volledig reactief vermogen is (zuiver imaginaire waarde). Het actieve vermogen is gelijk aan nul.

We berekenen vervolgens het schijnbare vermogenverbruik van de weerstand en vinden:

$$S_r = \frac{1}{2} V_r I_r^* = \frac{1}{2} R I_r I_r^* = \frac{1}{2} R |I_r|^2 = \frac{1}{2} R \frac{(C\omega)^2}{1+(RC\omega)^2} V_i^2 = \frac{1}{2} \frac{(RC\omega)^2}{1+(RC\omega)^2} \frac{V_i^2}{R}$$

waaruit blijkt dat dit volledig actief vermogen is (zuiver reële waarde). Het reactieve vermogen is gelijk aan nul.

Omdat er nog symbolen in onze uitdrukkingen staan werken we de eenheden niet verder uit. Moesten we numerieke waarden hebben voor R en C dan zouden we verder kunnen reken. Doorgaans schrijven we dan schijnbare vermogens met eenheid VA omdat de eenheid W suggereert dat het om actief vermogen gaat.

De bron moet zowel het actieve vermogen opwekken, als het reactieve vermogen compenseren, immers:

$$S_v = \frac{1}{2} V_i I_i^* = \frac{1}{2} V_i I_r^*$$

Laten we eerst I_r^* berekenen:

$$I_r^* = \left(\frac{Cj\omega V_i}{1+jRC\omega} \right)^* = \left(\frac{Cj\omega V_i}{1+jRC\omega} \cdot \frac{1-jRC\omega}{1-jRC\omega} \right)^* = \left(\frac{(RC^2\omega^2) + jC\omega V_i}{1+(RC\omega)^2} \right)^* = \frac{(RC^2\omega^2) - jC\omega V_i}{1+(RC\omega)^2}$$

Waaruit volgt:

$$S_v = \frac{1}{2} \frac{(RC^2\omega^2) - jC\omega V_i}{1+(RC\omega)^2} V_i^2 = \underbrace{\frac{1}{2} \frac{(RC^2\omega^2)}{1+(RC\omega)^2} V_i^2}_{=S_r} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{-jC\omega}{1+(RC\omega)^2} V_i^2}_{=S_c}$$

Tot slot kunnen we overal V_i vervangen door de overeenkomstige spanningswaarde, 10V.

Oplossing 5.1.3-6: We berekenen eerder dat:

$$I_{r2} = \frac{V_i}{R_1 LCs^2 + (L + R_1 R_2 C)s + R_1 + R_2}$$

Bijgevolg kunnen we het schijnbare vermogenverbruik van de serieschakeling van R_2 en L berekenen als:

$$S_{r2,l} = \frac{1}{2} V_{r2,l} I_{r2,l}^* = \frac{1}{2} Z I_{r2,l} I_{r2,l}^* = \frac{1}{2} Z |I_{r2,l}|^2$$

We weten dat $I_{r2,l} = I_{r2}$ en $Z = R_2 + sL$ en dat we s moeten vervangen door $j\omega$, d.w.z.:

$$S_{r2,l} = \frac{1}{2} (R_2 + j\omega L) \cdot \frac{V_i^2}{(R_1 + R_2 - R_1 LC\omega^2)^2 + (L + R_1 R_2 C)^2 \omega^2}$$

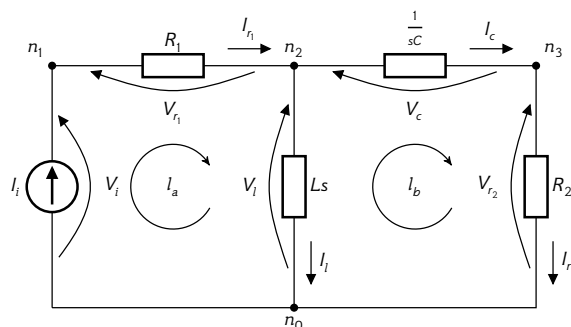
waarvan het reële deel actief vermogen is en door de weerstand in warmte wordt omgezet:

$$S_{r_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{R_2 V_i^2}{(R_1 + R_2 - R_1 L C \omega^2)^2 + (L + R_1 R_2 C)^2 \omega^2}$$

en het imaginaire deel reactief vermogen is dat door de spoel beheerd wordt:

$$S_l = \frac{1}{2} \cdot \frac{j\omega L V_i^2}{(R_1 + R_2 - R_1 L C \omega^2)^2 + (L + R_1 R_2 C)^2 \omega^2}$$

Oplossing 5.1.3-7: We starten met het hele schema te hertekenen in het frequentiedomein:



We hebben ook ineens alle stromen en spanningen aangeduid, de knopen benoemd en de lussen aangeduid. We schrijven nu Kirchhoffs wetten aangevuld met de takrelaties:

$$\left\{ \begin{array}{ll} I_i = I_{r_1} & \text{(KCL-}n_1\text{)} \\ I_{r_1} = I_l + I_c & \text{(KCL-}n_2\text{)} \\ I_c = I_{r_2} & \text{(KCL-}n_3\text{)} \\ V_i = V_{r_1} + V_l & \text{(KVL-}I_a\text{)} \\ V_l = V_c + V_{r_2} & \text{(KVL-}I_b\text{)} \\ V_{r_1} = R_1 I_{r_1} & \text{(BE-}R_1\text{)} \\ V_{r_2} = R_2 I_{r_2} & \text{(BE-}R_2\text{)} \\ V_l = sL I_l & \text{(BE-}L\text{)} \\ I_c = sC V_c & \text{(BE-}C\text{)} \end{array} \right.$$

Laten we eerst op zoek gaan naar I_{r_2} . We elimineren I_{r_1} , I_l , I_c , V_i en V_l gebruik makende van (KCL-*) en (KVL-*):

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{r_1} = R_1 I_i \\ V_{r_2} = R_2 I_{r_2} \\ V_c + V_{r_2} = sL I_i - sL I_{r_2} \\ I_{r_2} = sC V_c \end{array} \right.$$

Vervolgens elimineren we V_{r_1} en V_{r_2} :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_c + R_2 I_{r_2} = sL I_i - sL I_{r_2} \\ I_{r_2} = sC V_c \end{array} \right.$$

Tot slot elimineren we V_c :

$$\begin{aligned} I_{r_2} &= sC \left(-R_2 I_{r_2} + sL I_i - sL I_{r_2} \right) \\ \Leftrightarrow I_{r_2} &= -sR_2 C I_{r_2} + LCs^2 I_i - LCs^2 I_{r_2} \\ \Leftrightarrow LCs^2 I_{r_2} + R_2 C s I_{r_2} + I_{r_2} &= LCs^2 I_i \\ \Leftrightarrow I_{r_2} &= \frac{I_i s^2}{s^2 + \frac{R_2}{L} s + \frac{1}{LC}} \end{aligned}$$

Hierdoor kennen we ook:

$$\begin{aligned} V_{r_2} &= \frac{R_2 I_i s^2}{s^2 + \frac{R_2}{L} s + \frac{1}{LC}} \\ I_c &= \frac{I_i s^2}{s^2 + \frac{R_2}{L} s + \frac{1}{LC}} \\ V_c &= \frac{\frac{1}{C} I_i s^2}{s^2 + \frac{R_2}{L} s + \frac{1}{LC}} \end{aligned}$$

Vermits $I_l = I_i - I_c$, weten we ook:

$$\begin{aligned} I_l &= \frac{\frac{R_2}{L} s + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R_2}{L} s + \frac{1}{LC}} I_i \\ V_l &= \frac{R_2 s^2 + \frac{1}{C} s}{s^2 + \frac{R_2}{L} s + \frac{1}{LC}} I_i \end{aligned}$$

en wat we eigenlijk al van bij de start wisten:

$$\begin{aligned} I_{r_1} &= I_i \\ V_{r_1} &= R_1 I_i \end{aligned}$$

Tot slot:

$$V_i = V_{r_1} + V_l = \left(R_1 + \frac{R_2 s^2 + \frac{1}{C} s}{s^2 + \frac{R_2}{L} s + \frac{1}{LC}} \right) I_i$$

Zo kennen we alle stromen en spanningen.

Het vermogen van de bron is gelijk aan:

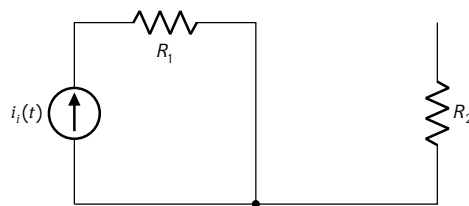
$$\begin{aligned} S_l &= \frac{V_l I_i^*}{2} = \frac{\left(R_1 + \frac{-R_2 \omega^2 + j \frac{\omega}{C}}{\frac{1}{LC} - \omega^2 + j \frac{R_2}{L} \omega} \right)}{2} I_i^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(R_1 + \frac{(-R_2 \omega^2 + j \frac{\omega}{C}) \left(\frac{1}{LC} - \omega^2 - j \frac{R_2}{L} \omega \right)}{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2 \right)^2 + \left(\frac{R_2}{L} \omega \right)^2} \right) I_i^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(R_1 + \frac{-\cancel{\frac{R_2}{LC} \omega^2} + R_2 \omega^4 + \cancel{\frac{R_2}{LC} \omega^2} + j \frac{\omega}{C} \left(\frac{1}{LC} - \omega^2 \right) + j \frac{R_2^2}{L} \omega^3}{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2 \right)^2 + \left(\frac{R_2}{L} \omega \right)^2} \right) I_i^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(R_1 + \frac{R_2 \omega^4 + j \frac{\omega}{LC^2} - j \frac{\omega^3}{C} + j \frac{R_2^2}{L} \omega^3}{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2 \right)^2 + \left(\frac{R_2}{L} \omega \right)^2} \right) I_i^2 \end{aligned}$$

We berekenen nu het vermogenverbruik van de verschillende elementen:

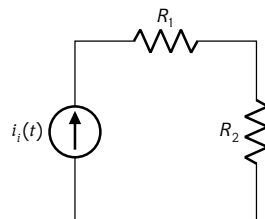
$$\begin{aligned}
 S_{R_1} &= \frac{R_1 I_i I_i^*}{2} = \frac{R_1 I_i^2}{2} \\
 S_L &= \frac{Z_L I_i I_i^*}{2} = \frac{j\omega L}{2} \left| \frac{\frac{1}{LC} + j\frac{R_2}{L}\omega}{\frac{1}{LC} - \omega^2 + j\frac{R_2}{L}\omega} \right|^2 I_i^2 \\
 &= \frac{j\omega L}{2} \frac{\left(\frac{1}{LC}\right)^2 + \left(\frac{R_2}{L}\omega\right)^2}{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{R_2}{L}\omega\right)^2} I_i^2 = \frac{1}{2} \frac{j\frac{\omega}{LC^2} + j\frac{R_2^2}{L}\omega^3}{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{R_2}{L}\omega\right)^2} I_i^2 \\
 S_{R_2} &= \frac{R_2 I_{r_2} I_{r_2}^*}{2} = \frac{R_2}{2} \frac{\omega^4}{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{R_2}{L}\omega\right)^2} I_i^2 \\
 S_{C_2} &= \frac{V V^*}{2 Z_C^*} = -\frac{j\omega C}{2} \left| \frac{j\frac{\omega}{C} I_i}{\frac{1}{LC} - \omega^2 + j\frac{R_2}{L}\omega} \right|^2 \\
 &= -\frac{j\omega C}{2} \frac{\left(\frac{\omega}{C}\right)^2}{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{R_2}{L}\omega\right)^2} I_i^2 = -\frac{1}{2} \frac{j\frac{\omega^3}{C}}{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{R_2}{L}\omega\right)^2} I_i^2
 \end{aligned}$$

De som van het actieve vermogen van beide weerstanden i.c.m. de reactieve vermogens van de condensator en de spoel komen term voor term overeen met het schijnbare vermogen dat de bron levert.

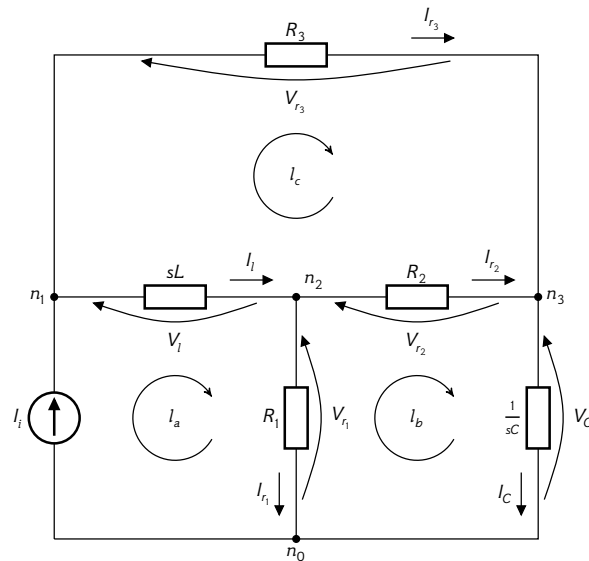
Voor $\omega = 0$ worden de condensator een open keten en de spoel een kortsluiting, dus:



Voor $\omega \rightarrow +\infty$ worden de condensator een kortsluiting en de spoel een open keten, dus:



Oplossing 5.1.3-8: We starten met het hele schema te hertekenen in het frequentiedomein:



We hebben ook ineens alle stromen en spanningen aangeduid, de knopen benoemd en de lussen aangeduid. We schrijven nu Kirchhoffs wetten aangevuld met de takrelaties:

$$\left\{ \begin{array}{ll} I_i = I_1 + I_{r_3} & (\text{KCL-}n_1) \\ I_1 = I_{r_1} + I_{r_2} & (\text{KCL-}n_2) \\ I_c = I_{r_2} + I_{r_3} & (\text{KCL-}n_3) \\ V_i = V_1 + V_{r_1} & (\text{KVL-}I_a) \\ V_{r_1} = V_{r_2} + V_c & (\text{KVL-}I_b) \\ V_{r_3} = V_1 + V_{r_2} & (\text{KVL-}I_c) \\ V_{r_1} = R_1 I_{r_1} & (\text{BE-}R_1) \\ V_{r_2} = R_2 I_{r_2} & (\text{BE-}R_2) \\ V_{r_3} = R_3 I_{r_3} & (\text{BE-}R_3) \\ V_1 = sL I_1 & (\text{BE-}L) \\ I_c = sC V_c & (\text{BE-}C) \end{array} \right.$$

Laten we op zoek gaan naar V_i . We kunnen terug met de hand alle variabelen buiten I_i en V_i elimineren. Je zal merken dat dat een aardige rekeninspanning is. We gebruiken deze oefening echter om te laten zien dat met een modern symbolisch wiskundeprogramma (zoals Maple, Mathematica, Macsyma of Matlab), je het rekenwerk kan laten uitvoeren. Hieronder een Matlab script:

```
syms s R1 R2 R3 L C Ii Vi I1 V1 Ic Vc Ir1 Vr1 Ir2 Vr2 Ir3 Vr3
sol = solve( Ii == I1 + Ir3, ...
I1 == Ir1 + Ir2, ...
Ic == Ir2 + Ir3, ...
Vi == V1 + Vr1, ...
Vr1 == Vr2 + Vc, ...
Vr3 == V1 - Vr2, ...
Vr1 == R1*Ir1, ...
Vr2 == R2*Ir2, ...
Vr3 == R3*Ir3, ...
V1 == s*L*I1, ...
Ic == s*C*Vc, ...
Vi, I1, V1, Ic, Vc, Ir1, Vr1, Ir2, Vr2, Ir3, Vr3 );
```

De individuele oplossingen kan je vervolgens op een meer leesbare manier afdrukken. Als voorbeeld de bronspanning V_i :

```
pretty( simplify( sol.Vi ) )
```

Hieruit vind je:

$$V_i = \frac{s^2 LC((R_1 + R_2)R_3 + s(L(R_1 + R_2 + R_3) + R_1 R_2 R_3 C) + R_1(R_2 + R_3))}{s^2 LC(R_1 + R_2) + s(L + (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)C) + R_2 + R_3} I_i$$

Het bronvermogen kunnen we dan berekenen als:

$$S = \frac{1}{2} V_i I_i^*$$

waarbij we natuurlijk $s = j\omega$ nemen.

Alweer met Matlab:

```
S = sol.Vi * Ii;
syms w;
S = subs( S, s, j*w ); %% substitutie van s door jw
%% real(S);
%% imag(S);
```

Spijtig genoeg slaagt Matlab er nog niet in om hier het reële deel en het imaginaire deel uit af te scheiden. Dan maar met de hand:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left. \frac{s^2 LC(R_1 + R_2)R_3 + s(L(R_1 + R_2 + R_3) + R_1 R_2 R_3 C) + R_1(R_2 + R_3)}{s^2 LC(R_1 + R_2) + s(L + (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)C) + R_2 + R_3} \right|_{s=j\omega} |I_i|^2 \\ &= \frac{R_1(R_2 + R_3) - \omega^2 LC(R_1 + R_2)R_3 + j\omega(L(R_1 + R_2 + R_3) + R_1 R_2 R_3 C)}{R_2 + R_3 - \omega^2 LC(R_1 + R_2) + j\omega(L + (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)C)} |I_i|^2 \\ &= S_A + S_R \end{aligned}$$

met

$$\begin{aligned} S_A &= \frac{(-CLR_3(R_1 + R_2)\omega^2 + R_1(R_2 + R_3))(-CL(R_1 + R_2)\omega^2 + R_2 + R_3) + \omega^2(L + C(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3))(L(R_1 + R_2 + R_3) + CR_1 R_2 R_3)}{D} \\ S_R &= \frac{\omega(L(R_1 + R_2 + R_3) + CR_1 R_2 R_3)(-CL(R_1 + R_2)\omega^2 + R_2 + R_3) - \omega(-CLR_3(R_1 + R_2)\omega^2 + R_1(R_2 + R_3))(L + C(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)C)}{D} \end{aligned}$$

met

$$D = (R_2 + R_3 - \omega^2 LC(R_1 + R_2))^2 + \omega^2(L + (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)C)^2$$

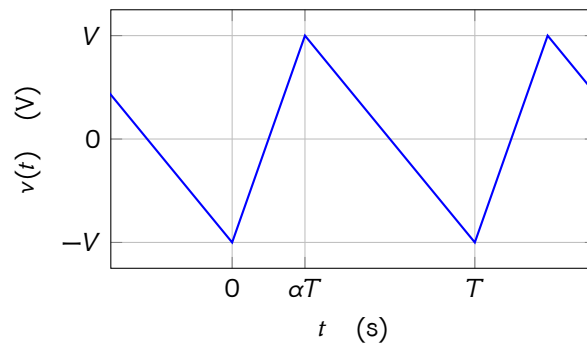
Merk op dat dit berekeningen zijn die je mogelijk nog wel met pen op papier kan maken, maar de kans dat je geen fouten maakt is klein. Het gebruik van een symbolische wiskundepakket is dus zeker aangeraden.

Oplossing 5.1.3-9: Wetende dat $\omega = 2\pi/T$, berekenen we de RMS-waarde van deze golf:

$$\begin{aligned} V_{RMS} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T A^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right) dt} \\ &\downarrow u = \frac{2\pi}{T}t \\ &= A \sqrt{\frac{1}{T} \frac{T}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(u) du} \\ &= A \sqrt{\frac{A^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2u)}{2} du} \\ &= A \sqrt{\frac{1}{2\pi} \left[\left. \frac{u}{2} \right]_0^{2\pi} - A \left[\frac{\sin(2u)}{4} \right]_0^{2\pi} \right]} = A \sqrt{\frac{1}{2\pi} \left[\frac{2\pi - 0}{2} - \frac{0 - 0}{4} \right]} = \frac{A}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Bijgevolg is de vormfactor $F = 1/\sqrt{2}$.

Oplossing 5.1.3-10: We tekenen eerst de driehoeksgolf:

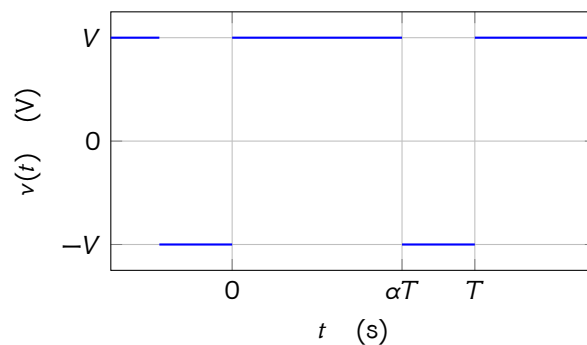


Om de notatie te verlichten (en het wortelteken te vermijden), berekenen we V_{RMS}^2 :

$$\begin{aligned}
 V_{RMS}^2 &= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\alpha T} \left(\frac{2V}{\alpha T} t - V \right)^2 dt + \int_{\alpha T}^T \left(-\frac{2V}{(1-\alpha)T} (t-T) - V \right)^2 dt \right) \\
 &= \frac{1}{T} \left(\frac{\alpha T}{2V} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{2V}{\alpha T} t - V \right)^3 \right]_0^{\alpha T} - \frac{(1-\alpha)T}{2V} \left[\frac{1}{3} \left(-\frac{2V}{(1-\alpha)T} (t-T) - V \right)^3 \right]_{\alpha T}^T \right) \\
 &= \frac{1}{T} \left(\frac{\alpha T}{2V} \frac{1}{3} (V^3 - (-V)^3) - \frac{(1-\alpha)T}{2V} \frac{1}{3} ((-V)^3 - V^3) \right) \\
 &= \frac{1}{T} \left(\frac{\alpha T V^2}{3} + \frac{(1-\alpha) T V^2}{3} \right) = \frac{V^2}{3}
 \end{aligned}$$

Hierdoor is $V_{RMS} = V/\sqrt{3}$ en bijgevolg de vormfactor gelijk is aan $1/\sqrt{3}$. De vormfactor is inderdaad geen functie van α .

Oplossing 5.1.3-11: We tekenen eerst de driehoeksgolf:



Om de notatie te verlichten (en het wortelteken te vermijden), berekenen we V_{RMS}^2 :

$$V_{RMS}^2 = \frac{1}{T} \left(\int_0^{\alpha T} V^2 dt + \int_{\alpha T}^T (-V)^2 dt \right) = \frac{1}{T} \int_0^T V^2 dt = \frac{1}{T} V^2 T = V^2$$

Hierdoor is $V_{RMS} = V$ en bijgevolg de vormfactor gelijk is aan 1. De vormfactor is inderdaad geen functie van α .

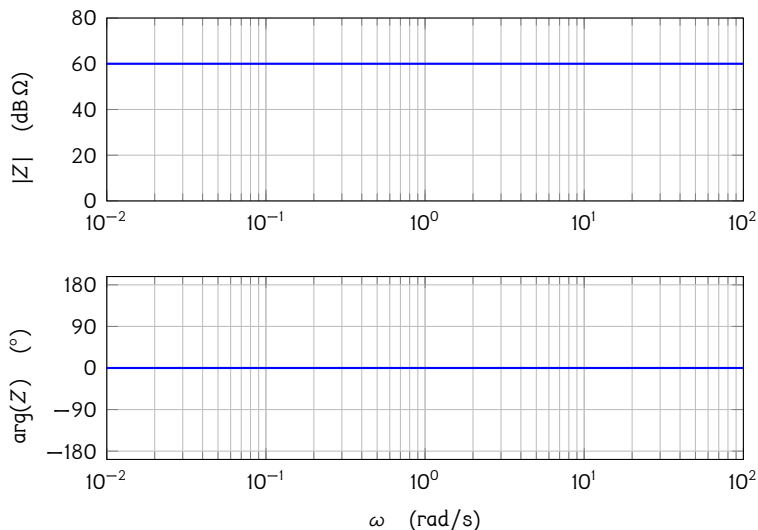
Oplossing 5.1.4-1: Reken eerste de impedantie uit i.f.v. s en vervang s door $j\omega$:

$$\begin{aligned}
 Z(s) &= R \\
 \Leftrightarrow Z(j\omega) &= R = 1000 \Omega
 \end{aligned}$$

We berekenen de magnitude (in dB) en de fase:

$$20 \log_{10}(|Z(j\omega)|) = 20 \log_{10}(1000 \Omega) = 60 \text{ dB} \quad \arg(Z(j\omega)) = \arg(1000 \Omega) = 0^\circ$$

Bijgevolg ziet de Bode plot er als volgt uit:



Oplossing 5.1.4-2: Reken eerste de impedantie uit i.f.v. s en vervang s door $j\omega$:

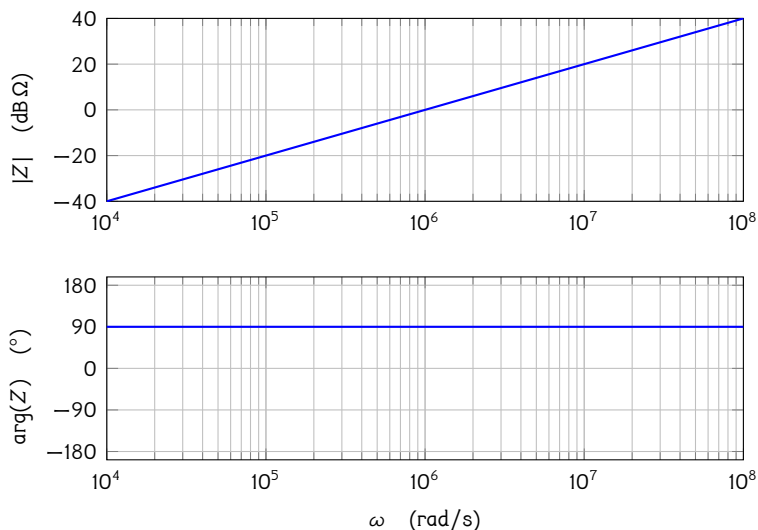
$$\begin{aligned} Z(s) &= sL \\ \Leftrightarrow Z(j\omega) &= j\omega L = j\omega \cdot 1 \mu\text{H} \end{aligned}$$

We berekenen de magnitude (in dB) en de fase:

$$20 \log_{10}(|Z(j\omega)|) = 20 \log_{10}(L \cdot \omega) = 20 \log_{10}(L) + 20 \log_{10} \omega = 20 \log_{10}(1 \mu\text{H}) + 20 \log_{10} \omega = -120 \text{ dB} + 20 \log_{10} \omega$$

Aangezien $\log_{10} \omega$ de x -as is van de bodeplot, zien we dat de magnitudecurve met 20 dB stijgt wanneer ω vertienvoudigd. Een sprong van een factor 10 op de frequentie-as noemen we een decade (dec). We spreken dus van een stijging van 20 dB/dec.

Bijgevolg ziet de Bode plot er als volgt uit:



Oplossing 5.1.4-3: Reken eerste de impedantie uit i.f.v. s en vervang s door $j\omega$:

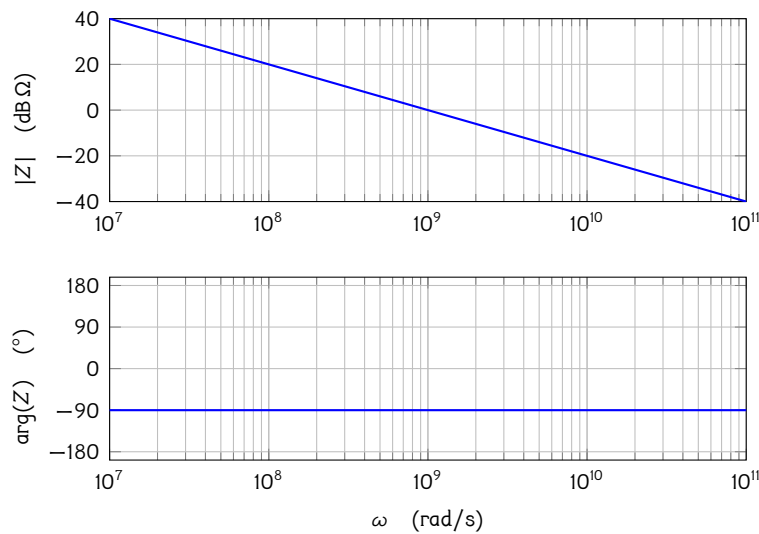
$$Z(s) = \frac{1}{sC}$$

$$\Leftrightarrow Z(j\omega) = \frac{-j}{\omega C} = \frac{-j}{\omega \cdot 1 \text{ nF}}$$

We berekenen de magnitude (in dB) en de fase:

$$20 \log_{10}(|Z(j\omega)|) = 20 \log_{10}\left(\frac{1}{C \cdot \omega}\right) = -20 \log_{10}(C) - 20 \log_{10} \omega = -20 \log_{10}(1 \text{ nF}) - 20 \log_{10} \omega = 180 \text{ dB} \Omega - 20 \log_{10} \omega$$

Aangezien $\log_{10} \omega$ de x -as is van de bodeplot, zien we dat de magnitudedecurve met 20 dB daalt wanneer ω vertienvoudigd. Een sprong van een factor 10 op de frequentie-as noemen we een decade (dec). We spreken dus van een helling van -20 dB/dec .



Oplossing 5.1.4-4: De spanningstransfer kan berekend worden (verifieer dit zelf) als:

$$H(s) = \frac{R}{R + Ls}$$

$$\Leftrightarrow H(j\omega) = \frac{R}{R + j\omega L}$$

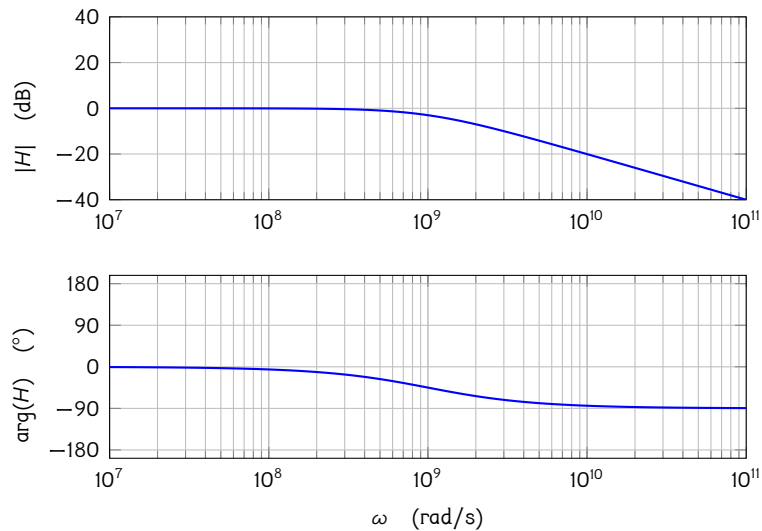
$$\Leftrightarrow H(j\omega) = \frac{1 \times 10^3}{1 \times 10^3 + j\omega \cdot 1 \times 10^{-6}}$$

We vind dus:

$$20 \log_{10} |H(j\omega)| = 20 \log_{10} 1 \times 10^3 - 20 \log_{10} \sqrt{(1 \times 10^3)^2 + (\omega \cdot 1 \times 10^{-6})^2}$$

$$\arg H(j\omega) = \arg 1 \times 10^3 - \text{atan} \frac{\omega \cdot 1 \times 10^{-6}}{1 \times 10^3} = - \text{atan} \frac{\omega \cdot 1 \times 10^{-6}}{1 \times 10^3}$$

Maak hiervan een tekening in je favoriet wiskundepakket of in je grafische rekenmachine en je vindt:



Oplossing 5.1.4-5: We berekenen eerst de transferfunctie:

$$H(s) = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + sR_1R_2C}$$

Vervolgens vervangen we s door $j\omega$:

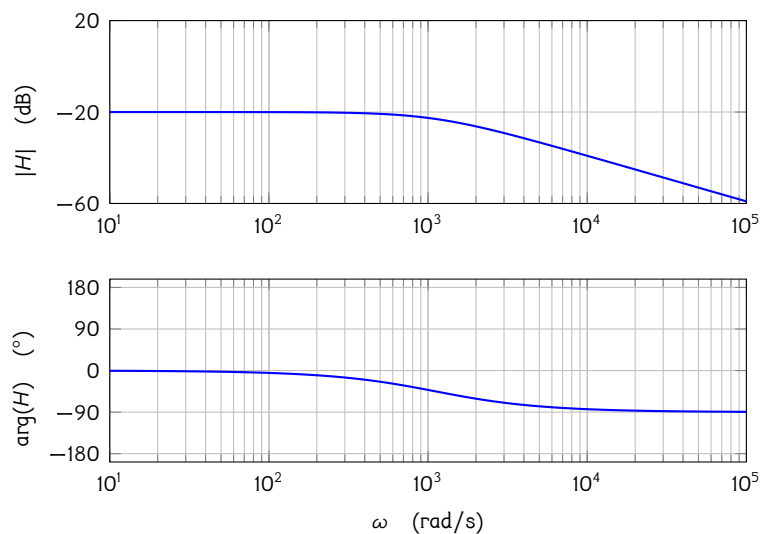
$$H(j\omega) = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + j\omega R_1R_2C}$$

Waaruit we de magnitude en de fase kunnen bepalen:

$$20 \log_{10} |H(j\omega)| = 20 \log_{10} R_2 - 20 \log_{10} \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (\omega R_1R_2C)^2}$$

$$\arg H(j\omega) = \arg R_2 - \operatorname{atan} \frac{\omega R_1R_2C}{R_1 + R_2} = -\operatorname{atan} \frac{\omega R_1R_2C}{R_1 + R_2}$$

Maak hiervan een tekening in je favoriet wiskundepakket of in je grafische rekenmachine en je vindt:



Oplossing 5.1.4-6: We berekenen eerst de transferfunctie:

$$H(s) = \frac{Ls}{1 + LCs^2}$$

Vervolgens vervangen we s door $j\omega$:

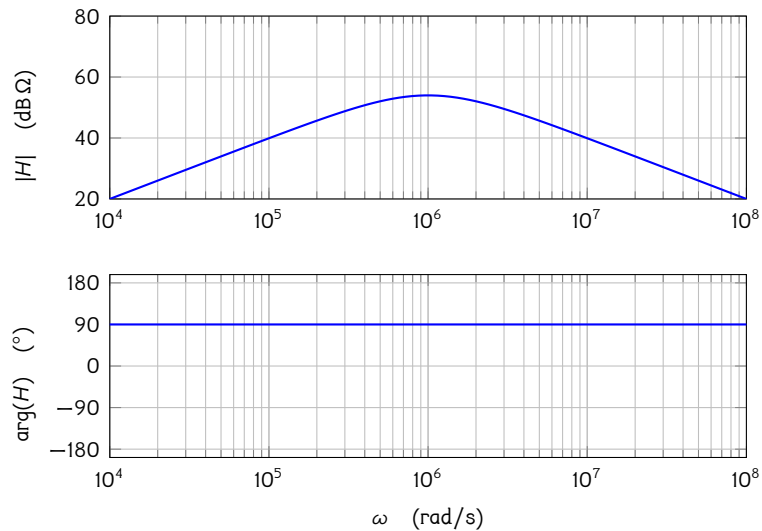
$$H(j\omega) = \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}$$

Waaruit we de magnitude en de fase kunnen bepalen:

$$20 \log_{10} |H(j\omega)| = 20 \log_{10}(L\omega) - 20 \log_{10}(1 - LC\omega^2)$$

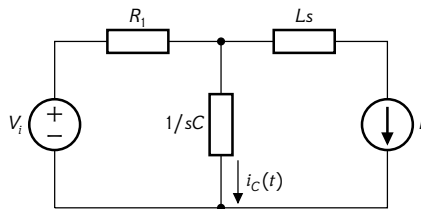
$$\arg H(j\omega) = \arg(jL\omega) - \arg(1 - LC\omega^2) = 90^\circ - 0^\circ = 90^\circ$$

Maak hiervan een tekening in je favoriet wiskundepakket of in je grafische rekenmachine en je vindt:



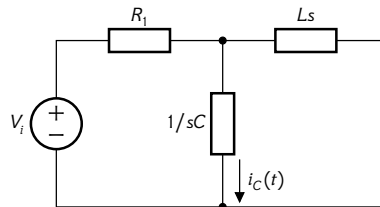
Let op de eenheden van de magnitudeplot!

Oplossing 5.1.5-1: We zetten het netwerk om naar het frequentiedomein



en passen superpositie toe, d.w.z. we beschouwen de bronnen één per één:

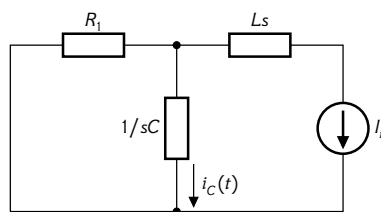
1. V_i behouden en van I_i een open keten maken



Dit leidt tot:

$$I_{c,1} = \frac{sC}{1 + sR_1C} V_i$$

2. I_i behouden en van V_i een kortsluiting maken



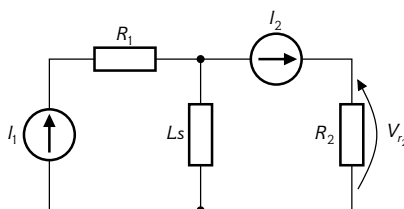
Dit leidt tot:

$$I_{c,2} = -\frac{sR_1C}{1 + sR_1C} I_i$$

In superpositie krijgen we:

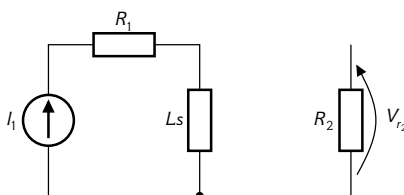
$$I_c = I_{c,1} + I_{c,2} = \frac{sC}{1 + sR_1C} V_i - \frac{sR_1C}{1 + sR_1C} I_i$$

Oplossing 5.1.5-2: We starten met het netwerk om te zetten naar het frequentiedomein:



Vervolgens passen we superpositie toe, d.w.z. we beschouwen de bronnen één per één:

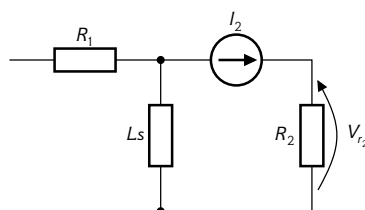
1. I_1 behouden en van I_2 een open keten maken



wat leidt tot:

$$V_{r2,1} = 0$$

2. I_2 behouden en van I_1 een open keten maken



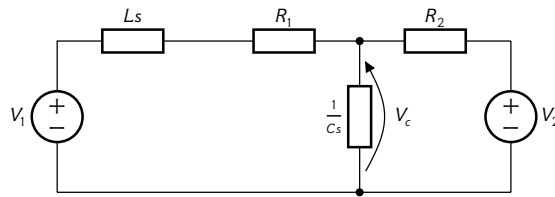
wat leidt tot:

$$V_{r2,2} = R_2 I_2$$

Bijgevolg volgt uit superpositie:

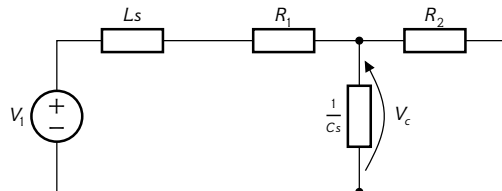
$$V_{r2} = V_{r2,1} + V_{r2,2} = R_2 I_2$$

Oplossing 5.1.5-3: We starten met het netwerk om te zetten naar het frequentiedomein:



Vervolgens passen we superpositie toe, d.w.z. we beschouwen de bronnen één per één:

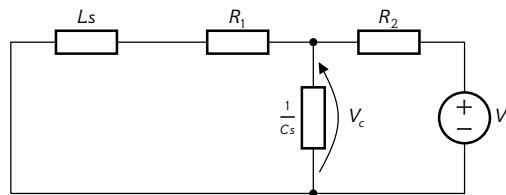
1. V_1 behouden en van V_2 kortsluiten



Dit levert als resultaat op:

$$V_{c,1} = \frac{1}{s^2 LC + s(R_1 C + \frac{L}{R_2}) + 1 + \frac{R_1}{R_2}} V_1$$

2. V_2 behouden en van V_1 kortsluiten



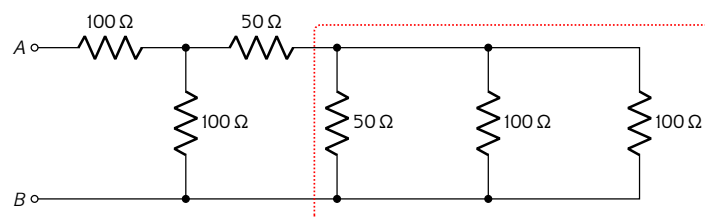
Dit levert als resultaat op:

$$V_{c,2} = \frac{\frac{L}{R_2} s + \frac{R_1}{R_2}}{s^2 LC + s(R_1 C + \frac{L}{R_2}) + 1 + \frac{R_1}{R_2}} V_2$$

Wat door superpositie leidt tot:

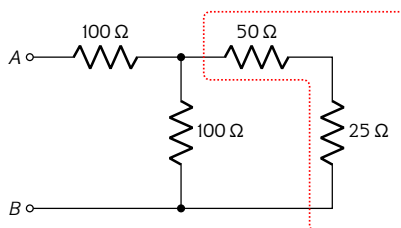
$$V_c = V_{c,1} + V_{c,2} = \frac{V_1 + \left(\frac{L}{R_2} s + \frac{R_1}{R_2} \right) V_2}{s^2 LC + s(R_1 C + \frac{L}{R_2}) + 1 + \frac{R_1}{R_2}}$$

Oplossing 5.2.2-1: We starten rechts in het netwerk, met de parallelschakeling van 3 weerstanden die we kunnen vereenvoudigen.



$$R = 50 \Omega \parallel 100 \Omega = \frac{1}{\frac{1}{50} + \frac{1}{100} + \frac{1}{100}} \Omega = 25 \Omega$$

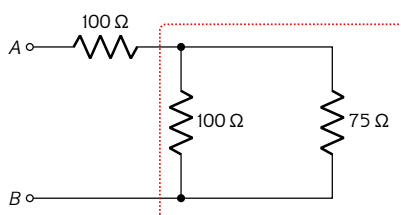
Vervolgens zien we in het resultaat een serieschakeling van twee weerstanden:



met een resulterende equivalente weerstand:

$$R = 50 \Omega + 25 \Omega = 75 \Omega$$

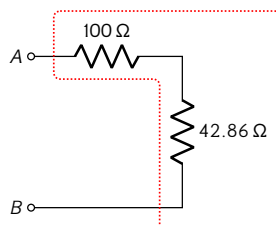
wat leidt tot onderstaand schema. Hierin herkennen we terug een parallelschakeling:



met een resulterende equivalente weerstand:

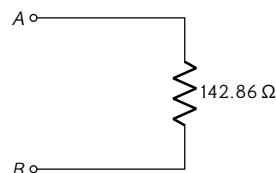
$$R = 100 \Omega \parallel 75 \Omega = \frac{1}{\frac{1}{100} + \frac{1}{75}} \Omega = 42.86 \Omega$$

Dit leidt tot een schema met een serieschakeling:

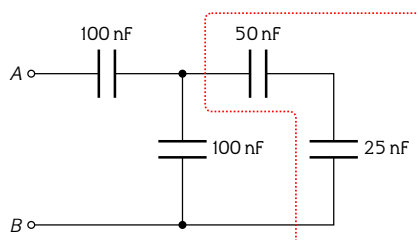


met als finale impedantie tussen klemmen A en B:

$$R = 100 \Omega + 42.86 \Omega = 142.86 \Omega$$



Oplossing 5.2.2-2: We starten weer rechts in het netwerk met een serieschakeling van twee condensatoren:

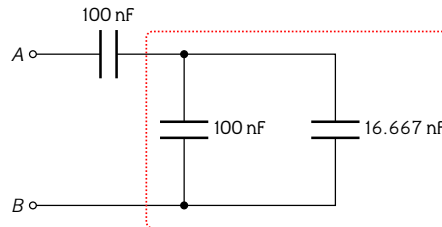


De equivalente waarde van de serieschakeling is:

$$C = 50 \text{ nF} \parallel 25 \text{ nF} = \frac{1}{\frac{1}{50} + \frac{1}{25}} \Omega = 16.667 \text{ nF}$$

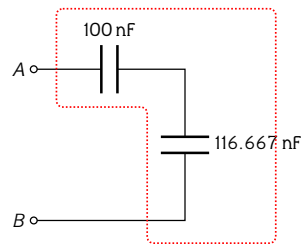
Merk op dat we de eenheden buiten de berekening houden. Dit mag zolang de eenheden in dezelfde schaal zitten (hier beiden in nF).

In het resulterende schema herkennen we nu een parallelschakeling:



$$C = 100 \text{ nF} + 16.667 \text{ nF} = 116.667 \text{ nF}$$

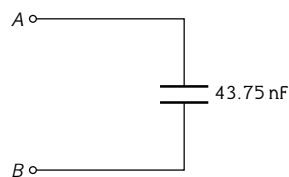
Op die manier eindigen we terug met een serieschakeling:



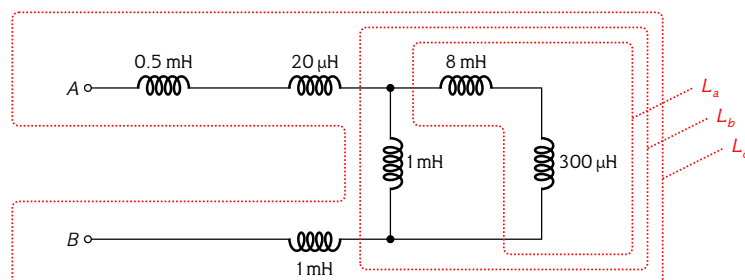
met

$$C = 100 \text{ nF} \parallel 116 \text{ nF} = \frac{1}{\frac{1}{100} + \frac{1}{116}} \text{ nF} = 43.750 \text{ nF}$$

Het eindresultaat is dan:



Oplossing 5.2.2-3: Op de tekening hieronder duiden we stap per stap de vereenvoudingen aan:



Waaruit we kunnen afleiden:

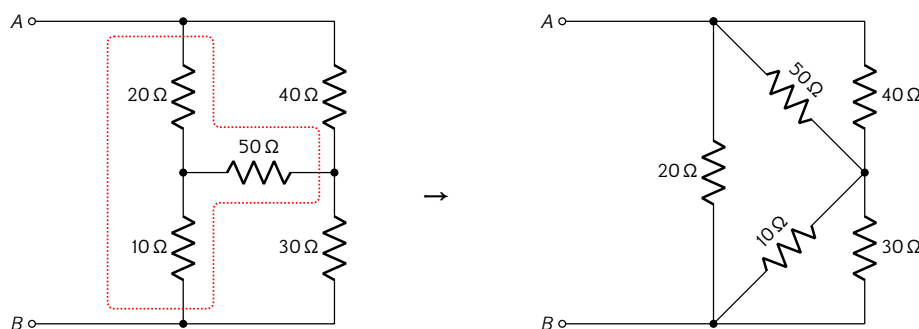
$$L_a = 8 \text{ mH} + 0.3 \text{ mH} = 8.3 \text{ mH}$$

$$L_b = 1 \text{ mH} \parallel 8.3 \text{ mH} = \frac{1}{\frac{1}{1} + \frac{1}{8.3}} \text{ mH} = 0.8925 \text{ mH}$$

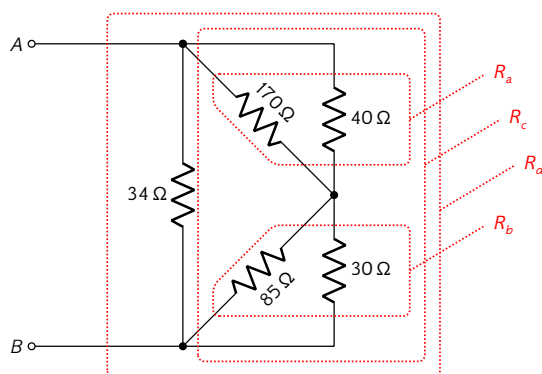
$$L_c = 0.5 \text{ mH} + 0.02 \text{ mH} + 0.8925 \text{ mH} + 1 \text{ mH} = 2.4125 \text{ mH}$$

Oplossing 5.2.2-4: Deze oefeningen gaan we niet kunnen oplossen m.b.v. een serie/parallelvereenvouding alleen. We hebben de ster-driehoekstransferomformatie nodig. Er zijn verschillende mogelijkheden. We nemen er een van. Probeer zeker de andere!

We maken van de sterconfiguratie die hieronder wordt aangegeven een driehoeksconfiguratie:



Waardoor we een eenvoudige sequentie van parallel- en serieschakelingen kunnen herkennen:



met

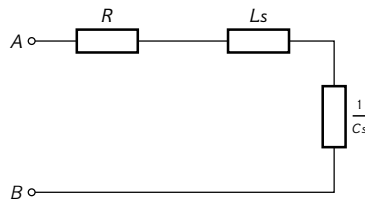
$$R_a = 170 \Omega \parallel 40 \Omega = \frac{1}{\frac{1}{170} + \frac{1}{40}} \Omega = 32.381 \Omega$$

$$R_b = 85 \Omega \parallel 30 \Omega = \frac{1}{\frac{1}{85} + \frac{1}{30}} \Omega = 22.174 \Omega$$

$$R_c = R_a + R_b = 32.381 \Omega + 22.174 \Omega = 54.555 \Omega$$

$$R_d = R_c \parallel 34 \Omega = \frac{1}{\frac{1}{34} + \frac{1}{54.555}} \Omega = 20.946 \Omega$$

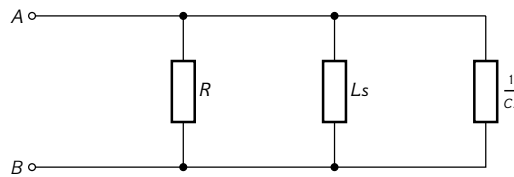
Oplossing 5.2.2-5: We zetten eerst het schema om naar het frequentiedomein:



We zien een serieschakeling van drie elementen, dus:

$$Z = R + Ls + \frac{1}{Cs}$$

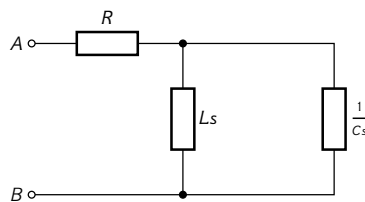
Oplossing 5.2.2-6: We zetten het netwerk eerst om naar het frequentiedomein:



We zien een parallelschakeling van drie elementen dus:

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{Ls} + Cs} = \frac{Ls}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1}$$

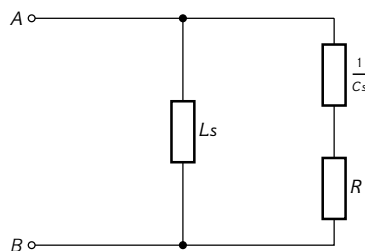
Oplossing 5.2.2-7: We zetten eerst het netwerk om naar het frequentiedomein:



We zien dat de weerstand in serie staat met de parallelschakeling van de spoel en de condensator, dus:

$$Z = R + \frac{1}{\frac{1}{Ls} + Cs} = R + \frac{Ls}{1 + LCs^2} = R \left(\frac{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1}{LCs^2 + 1} \right)$$

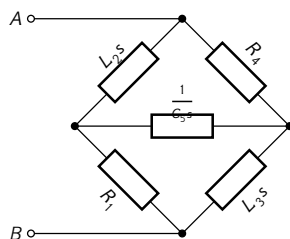
Oplossing 5.2.2-8: We zetten eerst het netwerk om naar het frequentiedomein:



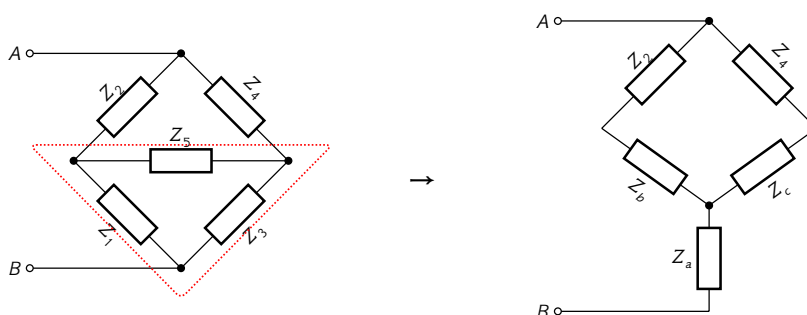
We zien de spoel parallel staan aan de serieschakeling van de condensator en de weerstand. Daarom:

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{Ls} + \frac{1}{R + \frac{1}{Cs}}} = \frac{1}{\frac{1}{Ls} + \frac{Cs}{RCs + 1}} = \frac{Ls(RCs + 1)}{LCs^2 + RCs + 1}$$

Oplossing 5.2.2-9: We zetten het netwerk eerst om naar het frequentiedomein:



Een vereenvoudiging van een serie- of parallelschakeling is in dit geval niet mogelijk. We kunnen in dit netwerk op verschillende plaatsen een een ster-driehoek- of een driehoek-ster-transformatie toepassen. We transformeren ditmaal de onderste driehoek, bestaande uit R_1 , C_5 en L_3 naar een sterconfiguratie. Om het schrijfwerk later wat te verlichten geven we de individuele impedanties generische namen Z_i .



met

$$Z_a = \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_3 + Z_5}$$

$$Z_b = \frac{Z_1 Z_5}{Z_1 + Z_3 + Z_5}$$

$$Z_c = \frac{Z_3 Z_5}{Z_1 + Z_3 + Z_5}$$

Vervolgens herkennen we de klassieke serie en parallelschakelingen. We schrijven ineens het finale resultaat:

$$Z = Z_a + [(Z_2 + Z_b) \parallel (Z_5 + Z_c)]$$

Je zal merken dat als je dit met de hand uitrekent, het heel wat voeten in de aarde zal hebben eer je aan een eenvoudig resultaat komt. We schakelen opnieuw Matlab in:

```
syms Z1 Z2 Z3 Z4 Z5
Za = Z1*Z3/(Z1+Z3+Z5);
Zb = Z1*Z5/(Z1+Z3+Z5);
Zc = Z3*Z5/(Z1+Z3+Z5);
Z = Za + 1/(1/(Z2+Zb)+1/(Z5+Zc));
Z = simplify(Z);
pretty(Z)
```

wat ons oplevert:

$$Z = \frac{Z_1 Z_5^2 + Z_2 Z_5^2 + Z_1 Z_2 Z_3 + Z_1 Z_2 Z_5 + 2Z_1 Z_3 Z_5 + 2Z_2 Z_3 Z_5}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + 2Z_1 Z_5 + Z_2 Z_5 + 2Z_3 Z_5 + Z_5^2}$$

Vervolgens vervangen we opnieuw de generische impedanties Z_i door hun werkelijke impedantie. Ook hier kunnen we Matlab voor inschakelen:

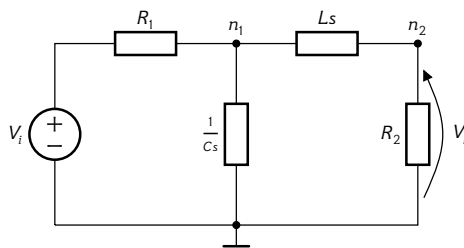
```
Z = subs(Z, {Z1, Z2, Z3, Z4, Z5}, {R1, L2*s, L3*s, R4, 1/C5/s});
Z = simplify(Z);
pretty(Z)
```

Het resultaat is:

$$Z = \frac{R_1 + L_2s + (C_5L_2R_1 + 2C_5L_3R_1)s^2 + 2C_5L_2L_3s^3 + C_5^2L_2L_3R_1s^4}{1 + 2C_5R_1s + (C_5L_2 + 2C_5L_3)s^2 + C_5^2L_2R_1s^3 + C_5^2L_2L_3s^4}$$

Je merkt hoe een relatief eenvoudig netwerk snel leidt tot een indrukwekkende uitdrukking. Dat verklaart ook waarom we in analoge elektronica meestal de passieve netwerken in omvang eerder beperkt houden.

Oplossing 5.4-1: We zetten het netwerk om naar het frequentiedomein en kiezen de onderste knoop als referentieknoop om met potentialen te kunnen werken.



We passen nu de stelling van Millman toe op knopen n_1 en n_2 :

$$V_1 = \frac{\frac{1}{R_1}V_i + \frac{1}{Ls}V_2}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{Ls} + Cs} \qquad V_2 = \frac{V_1 \frac{1}{Ls}}{\frac{1}{Ls} + \frac{1}{R_2}}$$

$$= \frac{\frac{L}{R_1}sV_i + V_2}{LCs^2 + \frac{L}{R_1}s + 1} \qquad = \frac{V_1}{\frac{L}{R_2}s + 1}$$

Hieruit kunnen we gemakkelijk V_1 elimineren door de eerste vergelijking in te vullen in de tweede:

$$V_2 = \frac{\frac{\frac{L}{R_1}sV_i + V_2}{LCs^2 + \frac{L}{R_1}s + 1}}{\frac{L}{R_2}s + 1}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{L}{R_2}s + 1\right) \left(LCs^2 + \frac{L}{R_1}s + 1\right) V_2 = \frac{L}{R_1}sV_i + V_2$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(\frac{L}{R_2}s + 1\right) \left(LCs^2 + \frac{L}{R_1}s + 1\right) - 1\right] V_2 = \frac{L}{R_1}sV_i$$

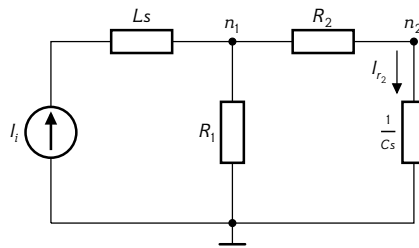
$$\Leftrightarrow \left(\frac{L}{R_2}LCs^3 + \left(\frac{L^2}{R_1R_2} + LC\right)s^2 + \left(\frac{L}{R_1} + \frac{L}{R_2}\right)s\right) V_2 = \frac{L}{R_1}sV_i$$

$$\Leftrightarrow \frac{L}{R_1}s \left(\frac{R_1}{R_2}LCs^2 + \left(\frac{L}{R_2} + R_1C\right)s + 1 + \frac{R_1}{R_2}\right) V_2 = \frac{L}{R_1}sV_i$$

$$\Leftrightarrow V_2 = \frac{\frac{R_2}{R_1}}{\left(LCs^2 + \left(\frac{L}{R_1} + R_2C\right)s + 1 + \frac{R_2}{R_1}\right)} V_i$$

Tot slot weten we dat $V_{r2} = V_2$.

Oplossing 5.4-2: We starten opnieuw met het omzetten van het schema naar het frequentiedomein en kiezen een referentieknoop:



Vervolgens passen we de stelling van Millman toe op knopen n_1 en n_2 :

$$V_1 = \frac{I_i + \frac{1}{R_2}V_2}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \qquad V_2 = \frac{\frac{1}{R_2}V_1}{\frac{1}{R_2} + Cs}$$

$$= \frac{R_1 R_2 I_i + R_1 V_2}{R_1 + R_2} \qquad = \frac{1}{1 + sR_2 C} V_1$$

Merk op dat de spoel niet meespeelt in het verhaal omdat de stroombron haar stroom oplegt aan de spoel. Dezelfde stroom I_i die langs de ene kant de spoel instroomt zal er langs de andere kant terug uitkomen. We elimineren terug V_1 uit het probleem door de eerste vergelijking in de tweede in te vullen, en we lossen daarna V_2 uit de vergelijking op:

$$V_2 = \frac{1}{1 + sR_2 C} \frac{R_1 R_2 I_i + R_1 V_2}{R_1 + R_2}$$

$$\Leftrightarrow (1 + sR_2 C)(R_1 + R_2)V_2 = R_1 R_2 I_i + R_1 V_2$$

$$\Leftrightarrow ((R_1 + R_2 + sR_2(R_1 + R_2)C) - R_1)V_2 = R_1 R_2 I_i$$

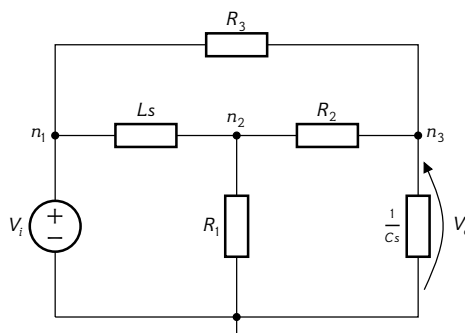
$$\Leftrightarrow (R_2 + sR_2(R_1 + R_2)C)V_2 = R_1 R_2 I_i$$

$$\Leftrightarrow V_2 = \frac{R_1}{1 + s(R_1 + R_2)C} I_i$$

Tot slot weten we dat $I_c = sCV_2$, waardoor:

$$I_c = \frac{sR_1 C}{1 + s(R_1 + R_2)C} I_i$$

Oplossing 5.4-3: We zetten het netwerk om naar het frequentiedomein:



Vervolgens passen we de stelling van Millman toe op knopen n_2 en n_3 :

$$V_2 = \frac{\frac{1}{Ls}V_i + \frac{1}{R_2}V_3}{\frac{1}{Ls} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1R_2V_i + sR_1LV_3}{R_1R_2 + (R_1 + R_2)Ls}$$

$$V_3 = \frac{\frac{1}{R_2}V_2 + \frac{1}{R_3}V_i}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + Cs} = \frac{R_3V_2 + R_2V_i}{R_2 + R_3 + R_2R_3Cs}$$

Ook hier zal je merken dat het elimineren van V_2 uit deze vergelijkingen heel wat voeten in de aarde heeft. We schakelen opnieuw Matlab in:

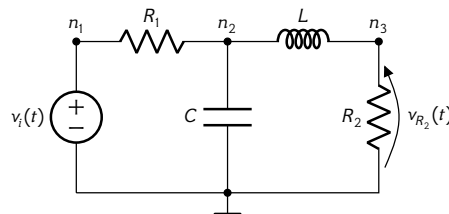
```
clear all;
close all;
clc;
syms R1 R2 R3 L C Vi V2 V3 real
syms s complex
sol = solve( V2 == (1/L/s * Vi + 1/R2 * V3)/(1/L/s+1/R1+1/R2), ...
V3 == (1/R2 * V2 + 1/R3 * Vi)/(1/R2+1/R3+C*s), ...
V2, V3, ReturnConditions = true );
S = simplify( sol.V3 );
pretty(S)
```

Het resultaat is:

$$V_3 = \frac{R_1(R_2 + R_3) + L(R_1 + R_2)s}{R_1(R_2 + R_3) + (L(R_1 + R_2 + R_3) + R_1R_2R_3C)s + LCR_3(R_1 + R_2)s^2}V_i$$

En tot slot: $V_c = V_3$.

Oplossing 5.5-1: We duiden in het netwerk de knopen aan en benoemen de spanning op knoop n_i als V_i . We tekenen het niet langer in het frequentiedomein omdat we ondertussen al voldoende vertrouwd zijn om dit in gedachten te doen:



Vervolgens stellen we de MNA-matrix op. We gebruiken geen aparte knooppuntsspanning voor n_1 omdat we de spanningsbron kunnen in het rechterlid plaatsen (zie tweede opmerking onder de MNA-procedure).

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + sC + \frac{1}{Ls} & -\frac{1}{Ls} \\ -\frac{1}{Ls} & \frac{1}{Ls} + \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}V_i \\ 0 \end{bmatrix}$$

De regel van Cramer leert ons dat:

$$V_3 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} + sC + \frac{1}{Ls} & \frac{1}{R_1} V_i \\ -\frac{1}{Ls} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} + sC + \frac{1}{Ls} & -\frac{1}{Ls} \\ -\frac{1}{Ls} & \frac{1}{Ls} + \frac{1}{R_2} \end{vmatrix}}$$

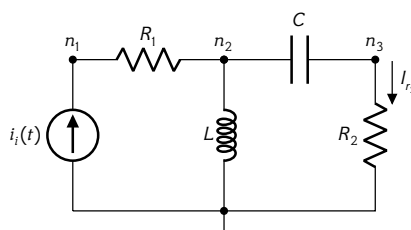
$$\frac{V_3}{V_i} = \frac{\frac{1}{R_1 Ls}}{\left(\frac{1}{R_1} + sC + \frac{1}{Ls}\right)\left(\frac{1}{Ls} + \frac{1}{R_2}\right) - \left(\frac{1}{Ls}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{R_1 Ls}}{\frac{sC}{R_2} + \frac{1}{R_1 R_2} + \frac{C}{L} + \frac{1}{R_1 Ls} + \frac{1}{R_2 Ls} - \left(\frac{1}{Ls}\right)^2}$$

↓ teller en noemer maal $R_1 R_2 Ls$

$$= \frac{R_2}{R_1 L C s^2 + (L + R_1 R_2 C)s + R_1 + R_2}$$

Oplossing 5.5-2: We duiden in het netwerk de knopen aan en benoemen de spanning op knoop n_i als V_i . We tekenen het niet langer in het frequentiedomein omdat we ondertussen al voldoende vertrouwd zijn om dit in gedachten te doen:



We weten dat $I_{r_2} = V_3/R_2$. Om die reden voegen we geen meetspanningsbron toe (zie eerste opmerking onder de MNA-procedure).

We schrijven ook geen KCL op knoop n_1 omdat de stroombron I_i haar stroom volledig in n_2 terecht komt.

We schrijven de MNA vergelijking:

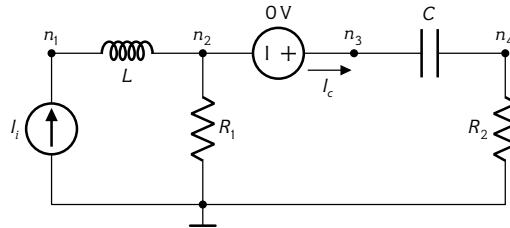
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{sL} + sC & -sC \\ -sC & \frac{1}{R_2} + sC \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_i \\ 0 \end{bmatrix}$$

Uit deze vergelijking vinden we met de regel van Cramer dat:

$$V_3 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{sL} + sC & I_i \\ -sC & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{sL} + sC & -sC \\ -sC & \frac{1}{R_2} + sC \end{vmatrix}} = \frac{sC}{\left(\frac{1}{sL} + sC\right)\left(\frac{1}{R_2} + sC\right) - (sC)^2} I_i = R_2 \frac{s^2 LC}{s^2 LC + sR_2 C + 1} I_i$$

De laatste stap is triviaal: $I_{r_2} = V_3/R_2$.

Oplossing 5.5-3: We starten weer met het aanduiden van knopen en met het invoegen van een meetspanningsbron toe (om stroom I_c te kunnen berekenen. We benoemen de spanning op knoop n_i als V_i .



We schrijven geen KCL op knoop n_1 omdat de stroombron I_i haar stroom volledig in n_2 terecht komt. De MNA vergelijking wordt:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & sC & -sC & -1 \\ 0 & -sC & \frac{1}{R_2} + sC & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Met de regel van Cramer kunnen we schrijven:

$$I_c = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 & I_i \\ 0 & sC & -sC & 0 \\ 0 & -sC & \frac{1}{R_2} + sC & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & sC & -sC & -1 \\ 0 & -sC & \frac{1}{R_2} + sC & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}$$

$$\stackrel{(C_4)}{=} \frac{\begin{vmatrix} 0 & sC & -sC \\ -I_i & 0 & \frac{1}{R_2} + sC \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & sC & -sC & -1 \\ 0 & -sC & \frac{1}{R_2} + sC & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}$$

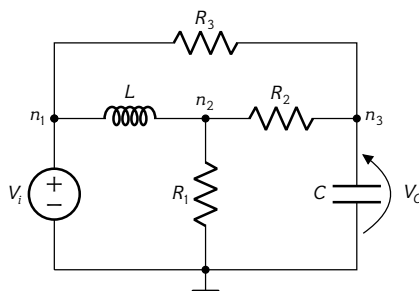
$$\stackrel{(C_1)}{=} \frac{\frac{1}{R_1} \begin{vmatrix} sC & -sC & -1 \\ -sC & \frac{1}{R_2} + sC & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ sC & -sC & -1 \\ -sC & \frac{1}{R_2} + sC & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & sC & -sC & -1 \\ 0 & -sC & \frac{1}{R_2} + sC & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}$$

$$\stackrel{(C_1)}{=} \frac{-I_i \begin{vmatrix} sC & -sC \\ -sC & \frac{1}{R_2} + sC \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & sC & -sC & -1 \\ 0 & -sC & \frac{1}{R_2} + sC & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}$$

$$\stackrel{(C_3, R_1)}{=} \frac{-\frac{1}{R_1} \begin{vmatrix} -sC & \frac{1}{R_2} + sC \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} sC & -sC \\ -sC & \frac{1}{R_2} + sC \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & sC & -sC & -1 \\ 0 & -sC & \frac{1}{R_2} + sC & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{-I_i \frac{sC}{R_2}}{-\frac{1}{R_1} \left(\frac{1}{R_2} + sC \right) - \frac{sC}{R_2}} = \frac{sR_1 C}{1 + s(R_1 + R_2)C} I_i$$

Oplossing 5.5-4: We starten weer met het aanduiden van de knopen en benoemen de spanning op knoop n_i als V_i .



Vervolgens stellen we de MNA beschrijving op:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{sL} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & sC + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{V_i}{sL} \\ \frac{V_i}{R_3} \end{bmatrix}$$

M.b.v. de regel van Cramer weten we dat:

$$\begin{aligned} V_3 &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{sL} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & \frac{1}{sL} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_3} \end{vmatrix} V_i}{\begin{vmatrix} \frac{1}{sL} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & sC + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \end{vmatrix}} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{sL} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \frac{1}{R_3} + \frac{1}{sL} \frac{1}{R_2}}{\left(\frac{1}{sL} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \left(sC + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) - \frac{1}{R_2^2}} V_i \\ &\quad \downarrow \text{teller en noemer maal } sR_1R_2R_3L \\ &= \frac{R_1(R_2 + R_3) + s(R_1 + R_2)L}{(R_1 + R_2)R_3LCs^2 + ((R_1 + R_2 + R_3)L + R_1R_2R_3C)s + R_1(R_2 + R_3)} V_i \end{aligned}$$

Tot slot: $V_c = V_3$.

Oplossing 5.5-5: Alle knopen werden benoemd. We kunnen ineens de MNA beschrijving noteren, waarbij we de spanningsbronnen alweer onmiddellijk in het rechterlid plaatsen:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + s(C_1 + C_2) & -sC_2 \\ -sC_2 & \frac{1}{R_2} + sC_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_{fb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sC_1V_i + \frac{1}{R_1}V_o \\ 0 \end{bmatrix}$$

Op basis van de regel van Cramer en superpositie, weten we dat:

$$\begin{aligned} \frac{V_{fb}}{V_i} &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} + s(C_1 + C_2) & sC_1 \\ -sC_2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} + s(C_1 + C_2) & -sC_2 \\ -sC_2 & \frac{1}{R_2} + sC_2 \end{vmatrix}} = \frac{s^2C_1C_2}{\frac{1}{R_1R_2} + s\left(\frac{C_2}{R_1} + \frac{C_1+C_2}{R_2}\right) + s^2C_1C_2} \\ &\quad \downarrow \text{vermenigvuldig teller en noemer met } R_1R_2 \\ &= \frac{s^2R_1R_2C_1C_2}{1 + s(R_2C_2 + R_1(C_1 + C_2)) + s^2R_1R_2C_1C_2} \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} \frac{V_{fb}}{V_o} &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} + s(C_1 + C_2) & \frac{1}{R_1} \\ -sC_2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} + s(C_1 + C_2) & -sC_2 \\ -sC_2 & \frac{1}{R_2} + sC_2 \end{vmatrix}} = \frac{s \frac{C_2}{R_1}}{\frac{1}{R_1 R_2} + s \left(\frac{C_2}{R_1} + \frac{C_1 + C_2}{R_2} \right) + s^2 C_1 C_2} \\ &\quad \downarrow \text{vermenigvuldig teller en noemer met } R_1 R_2 \\ &= \frac{s R_2 C_2}{1 + s(R_2 C_2 + R_1(C_1 + C_2)) + s^2 R_1 R_2 C_1 C_2} \end{aligned}$$

Merk op dat de noemers van beide transferfuncties identiek zijn.

Oplossing 5.5-6: Alle knopen werden benoemd. We kunnen ineens de MNA beschrijving noteren, waarbij we de spanningsbronnen alweer onmiddellijk in het rechterlid plaatsen:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + sC_1 & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + sC_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_{fb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} V_i + \frac{1}{R_3} V_o \\ sC_2 V_o \end{bmatrix}$$

M.b.v. de regel van Cramer kunnen we eenvoudig beide transferfuncties schrijven (door gebruik te maken van superpositie):

$$\begin{aligned} \frac{V_{fb}}{V_i} &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + sC_1 & \frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_2} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + sC_1 & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + sC_2 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{\frac{1}{R_1 R_2}}{\frac{1}{R_2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right) + s \left(\frac{C_1}{R_2} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) C_2 \right) + s^2 C_1 C_2} \\ &\quad \downarrow \text{vermenigvuldig teller en noemer met } R_1 R_2 R_3 \\ &= \frac{R_3}{R_1 + R_3 + s(R_1 R_3 C_1 + (R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1) C_2) + s^2 R_1 R_2 R_3 C_1 C_2} \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} \frac{V_{fb}}{V_o} &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + sC_1 & \frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_2} & sC_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + sC_1 & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + sC_2 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{\frac{1}{R_2 R_3} + s \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) C_2 + s^2 C_1 C_2}{\frac{1}{R_2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right) + s \left(\frac{C_1}{R_2} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) C_2 \right) + s^2 C_1 C_2} \\ &\quad \downarrow \text{vermenigvuldig teller en noemer met } R_1 R_2 R_3 \\ &= \frac{R_1 + s(R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1) C_2 + s^2 R_1 R_2 R_3 C_1 C_2}{R_1 + R_3 + s(R_1 R_3 C_1 + (R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1) C_2) + s^2 R_1 R_2 R_3 C_1 C_2} \end{aligned}$$

Merk op dat de noemers van beide transferfuncties identiek zijn.

Oplossing 5.5-7: Alle knopen werden benoemd. We kunnen ineens de MNA beschrijving noteren, waarbij we de spanningsbronnen alweer onmiddellijk in het rechterlid plaatsen:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + s(C_1 + C_2 + C_3) & -sC_2 \\ -sC_2 & \frac{1}{R_2} + sC_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_{fb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sC_1V_i + sC_3V_o \\ \frac{1}{R_2}V_o \end{bmatrix}$$

M.b.v. de regel van Cramer en superpositie, weten we dat:

$$\begin{aligned} \frac{V_{fb}}{V_i} &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} + s(C_1 + C_2 + C_3) & sC_1 \\ -sC_2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} + s(C_1 + C_2 + C_3) & -sC_2 \\ -sC_2 & \frac{1}{R_2} + sC_2 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{s^2C_1C_2}{\frac{1}{R_1R_2} + s\left(\frac{C_1+C_2+C_3}{R_2} + \frac{C_2}{R_1}\right) + s^2C_2(C_1 + C_3)} \\ &\quad \downarrow \text{vermenigvuldig teller en noemer met } R_1R_2 \\ &= \frac{s^2R_1R_2C_1C_2}{1 + s(R_1(C_1 + C_2 + C_3) + R_2C_2) + s^2R_1R_2C_2(C_1 + C_3)} \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} \frac{V_{fb}}{V_o} &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} + s(C_1 + C_2 + C_3) & sC_3 \\ -sC_2 & \frac{1}{R_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} + s(C_1 + C_2 + C_3) & -sC_2 \\ -sC_2 & \frac{1}{R_2} + sC_2 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{\frac{1}{R_1R_2} + s\frac{C_1+C_2+C_3}{R_2} + s^2C_2C_3}{\frac{1}{R_1R_2} + s\left(\frac{C_1+C_2+C_3}{R_2} + \frac{C_2}{R_1}\right) + s^2C_2(C_1 + C_3)} \\ &\quad \downarrow \text{vermenigvuldig teller en noemer met } R_1R_2 \\ &= \frac{1 + sR_1(C_1 + C_2 + C_3) + s^2R_1R_2C_2C_3}{1 + s(R_1(C_1 + C_2 + C_3) + R_2C_2) + s^2R_1R_2C_2(C_1 + C_3)} \end{aligned}$$

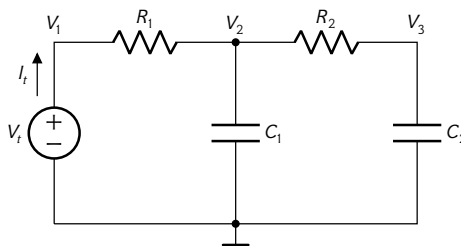
Merk op dat de noemers van beide transferfuncties identiek zijn.

Standaardkenmerken en -modellen

Oplossing 6.4.2-1: Merk op dat het netwerk geen onafhankelijke bronnen bevat. We kunnen dus meteen aan de slag met de vereenvoudigingsregels (serie/parallel):

$$\begin{aligned}
 Z_{AB} &= R_1 + \frac{1}{sC_1} \parallel \left(R_2 + \frac{1}{sC_2} \right) = R_1 + \frac{1}{sC_1 + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{sC_2}}} \\
 &= R_1 + \frac{1}{sC_1 + \frac{sC_2}{sR_2C_2 + 1}} \\
 &= R_1 + \frac{sR_2C_2 + 1}{s^2R_2C_1C_2 + s(C_1 + C_2)} \\
 &= \frac{s^2R_1R_2C_1C_2 + s(R_1(C_1 + C_2) + R_2C_2) + 1}{s^2R_2C_1C_2 + s(C_1 + C_2)}
 \end{aligned}$$

Hoewel deze methode heel effectief is, is ze niet heel generiek. De volgende is meer algemeen toepasbaar. We leggen een testspanning aan en berekenen welke teststroom gaat vloeien:



Omdat de MNA methode nogal effectief werkt, passen we die toe. Omdat we uitgaande van V_t de waarde van I_t willen berekenen, gebruiken we V_t ook ineens als meetspanningsbron en schrijven we ook een stroomvergelijking voor V_1 : De MNA vergelijkingen worden:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 0 & -1 \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC_1 & -\frac{1}{R_2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + sC_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ I_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_t \end{bmatrix}$$

Met behulp van de regel van Cramer bepalen we I_t als functie van V_t :

$$\begin{aligned}
 I_t &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC_1 & -\frac{1}{R_2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + sC_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & V_t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 0 & -1 \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC_1 & -\frac{1}{R_2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + sC_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}} \stackrel{(C4)}{=} \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC_1 & -\frac{1}{R_2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + sC_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & V_t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC_1 & -\frac{1}{R_2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + sC_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}} V_t \\
 &\stackrel{(C1)}{=} \frac{\frac{1}{R_1} \begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC_1 & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + sC_2 \end{vmatrix} + \frac{1}{R_1} \begin{vmatrix} -\frac{1}{R_1} & 0 \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + sC_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC_1 & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + sC_2 \end{vmatrix}} V_t \\
 &\stackrel{(R3)}{=} \frac{\frac{1}{R_1} \left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC_1 \right) \left(\frac{1}{R_2} + sC_2 \right) - \frac{1}{R_2^2} \right] - \frac{1}{R_1^2} \left(\frac{1}{R_2} + sC_2 \right)}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC_1 \right) \left(\frac{1}{R_2} + sC_2 \right) - \frac{1}{R_2^2}} \\
 &= \frac{\frac{1}{R_1} \left[\frac{1}{R_1 R_2} + s \left(\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) C_2 + \frac{1}{R_2} C_1 \right) + s^2 C_1 C_2 \right] - \frac{1}{R_1^2 R_2} - s \frac{1}{R_1^2} C_2}{\frac{1}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2} + s \left(\frac{C_1}{R_2} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) C_2 \right) + s^2 C_1 C_2 - \frac{1}{R_2^2}} \\
 &= \frac{\frac{1}{R_1} \left[s \left(\frac{1}{R_2} (C_1 + C_2) \right) + s^2 C_1 C_2 \right]}{\frac{1}{R_1 R_2} + s \left(\frac{C_1}{R_2} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) C_2 \right) + s^2 C_1 C_2} \\
 &\quad \downarrow \text{vermenigvuldig teller en noemer met } R_1 R_2 \\
 &= \frac{s(C_1 + C_2) + s^2 R_2 C_1 C_2}{1 + s(R_1 C_1 + (R_1 + R_2) C_2) + s^2 R_1 R_2 C_1 C_2}
 \end{aligned}$$

Toegegeven, dit had wat voeten in de aarde, maar kijk hoe eenvoudig het gaat, als je je laat helpen door Matlab of Octave:

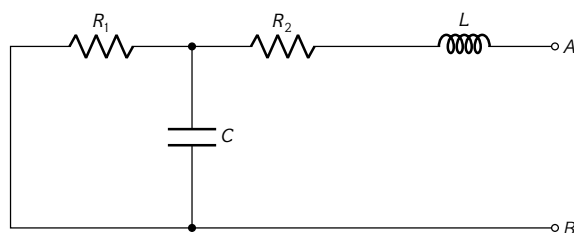
```

syms s R1 R2 C1 C2 Vt
A = [ 1/R1, -1/R1, 0, -1;
      -1/R1, 1/R1+1/R2+s*C1, -1/R2, 0;
      0, -1/R2, 1/R2+s*C2, 0;
      1, 0, 0, 0 ];
B = [ 0; 0; 0; Vt ];
X = A\b;
pretty( X(4) );

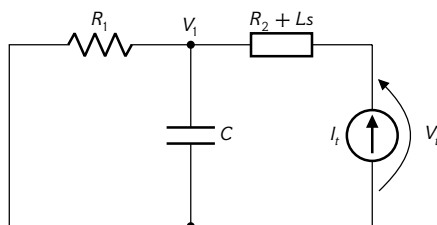
```

Verder is het eenvoudig om tot dezelfde impedantie te komen: $Z_{AB} = V_t/I_t$.

Oplossing 6.4.2-2: Het netwerk bevat onafhankelijke bronnen, die we eerst op nul moeten stellen om de impedantie te kunnen berekenen. We vervangen de stroombron door een open keten en de spanningsbron door een kortsluiting. Hierdoor krijgen we het volgende netwerk:



Vervolgens kunnen we in dit geval weer aan de slag met de vereenvoudigingsregels (doe dit zelf) of door een testspanning aan te leggen en de stroom die gaat vloeien te meten. We proberen nog eens een andere variant: we leggen een teststroom aan en bepalen de testspanning die ontstaat. Om het aantal knopen te beperken vervangen we de serieschakeling van R_2 en L door hun serie-impedantie:



De MNA beschrijving wordt:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + Ls} + Cs & -\frac{1}{R_2 + Ls} \\ -\frac{1}{R_2 + Ls} & \frac{1}{R_2 + Ls} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_t \end{bmatrix}$$

Merk op dat de MNA beschrijving met de teststroom compacter is, dan dezelfde beschrijving op basis van een testspanning waarbij we de stroom meten.

Hieruit bepalen we m.b.v. de regel van Cramer de testspanning:

$$V_t = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + Ls} + Cs & 0 \\ -\frac{1}{R_2 + Ls} & I_t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + Ls} + Cs & -\frac{1}{R_2 + Ls} \\ -\frac{1}{R_2 + Ls} & \frac{1}{R_2 + Ls} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + Ls} + Cs}{\frac{1}{R_1} \frac{1}{R_2 + Ls} + s \frac{C}{R_2 + Ls}} I_t$$

↓ vermenigvuldig teller en noemer met $R_1(R_2 + Ls)$

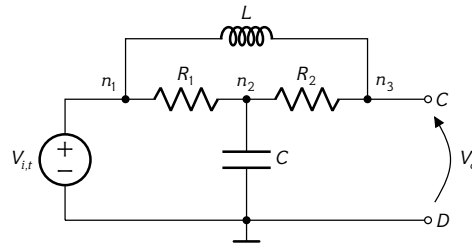
$$= \frac{R_1 + R_2 + s(L + R_1 R_2 C) + s^2 R_1 L C}{1 + s R_1 C} I_t$$

en bijgevolg:

$$Z_{AB} = \frac{V_t}{I_t} = \frac{R_1 + R_2 + s(L + R_1 R_2 C) + s^2 R_1 L C}{1 + s R_1 C}$$

Oplossing 6.4.2-3:

Spanningsversterking We leggen een spanningsbron aan tussen kleine A en B en meten de uitgangsspanning met een voltmeter tussen klemmen B en D . We tekenen de voltmeter niet expliciet. Om te kunnen werken met potentialen, kiezen we de referentiepotentialiaal op klemmen B en D .



Je kan opnieuw aan de slag met alle rekentechnieken die we in het vorige hoofdstuk gezien hebben. Hier gebruiken we de MNA methode. We plaatsen de testbron in het rechterlid en schrijven dus geen vergelijking voor de stroomwet op n_1 :

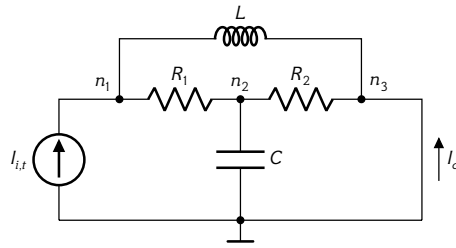
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{sL} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} V_{i,t} \\ \frac{1}{sL} V_{i,t} \end{bmatrix}$$

Hieruit leiden we eenvoudig af m.b.v. de regel van Cramer dat:

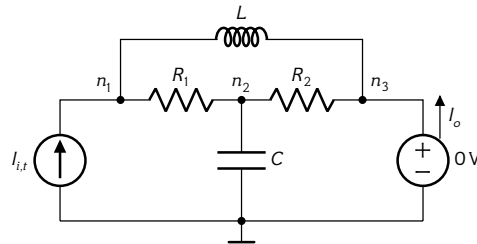
$$\begin{aligned} \frac{V_o}{V_{i,t}} = \frac{V_3}{V_{i,t}} &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC & \frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{sL} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{sL} \end{vmatrix}} = \frac{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC\right) \frac{1}{sL} + \frac{1}{R_1 R_2}}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC\right) \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{sL}\right) - \frac{1}{R_2^2}} \\ &= \frac{\frac{1}{sR_1 L} + \frac{1}{sR_2 L} + \frac{C}{L} + \frac{1}{R_1 R_2}}{\frac{1}{sR_1 L} + \frac{1}{sR_2 L} + \frac{1}{R_1 R_2} + \frac{C}{L} + \frac{sC}{R_2}} \\ &\quad \downarrow \text{vermenigvuldig teller en noemer met } sR_1 R_2 L \\ &= \frac{R_1 + R_2 + s(R_1 R_2 C + L)}{R_1 + R_2 + sL + sR_1 R_2 C + s^2 L C R_1} \\ &= \frac{1 + \frac{R_2}{R_1} + s\left(R_2 C + \frac{L}{R_1}\right)}{1 + \frac{R_2}{R_1} + s\left(R_2 C + \frac{L}{R_1}\right) + s^2 L C} \end{aligned}$$

Merk op hoe we hier door snel te kijken naar de dimensies van de termen, gemakkelijk kunnen vaststellen dat de uitdrukking 'steek houdt': we zien immers bij elke factor s een tijdconstante staan. Bijvoorbeeld in de noemer, bij de term in s staat een RC en een L/R tijdconstante. Bij de term in s^2 staat het kwadraat van een tijdconstante van de vorm \sqrt{LC} . Merk ook op dat de deling van de constante termen in teller en noemer dimensieloos is, wat overeenkomt met de dimensie van een spanningsversterking. Hoewel deze controle niet sluitend is, geeft ze — net zoals de negenproef bij een vermenigvuldiging — een eerste indicatie of er al dan niet domme rekenfouten gemaakt werden.

Stroomversterking We leggen een stroombron aan tussen kleine A en B en meten de uitgangsstroom met een ampèremeter tussen klemmen B en D . We tekenen de ampèremeter niet expliciet. Om te kunnen werken met potentialen, kiezen we de referentiepotentialiaal op klemmen B en D .



We gebruiken opnieuw de MNA methode. We voegen een meetspanningsbron met spanning nul toe, om I_o te kunnen meten. De stroombron $I_{i,t}$ nemen we weer mee op in het rechterlid.



We schrijven stroomvergelijkingen op n_1 en n_2 en een takvergelijking voor de meetspanningsbron:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{sL} & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{sL} & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC & -\frac{1}{R_2} & 0 \\ -\frac{1}{sL} & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{sL} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ I_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{i,t} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

waarbij we de laatste vergelijking (die in essentie stelt dat $V_3 = 0$) kunnen elimineren:

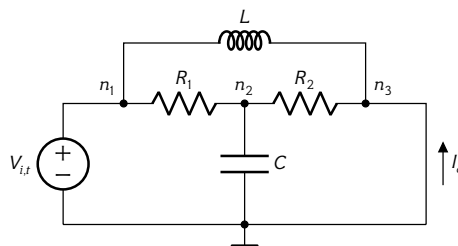
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{sL} & -\frac{1}{R_1} & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC & 0 \\ -\frac{1}{sL} & -\frac{1}{R_2} & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ I_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{i,t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

M.b.v. de regel van Cramer kunnen we stellen:

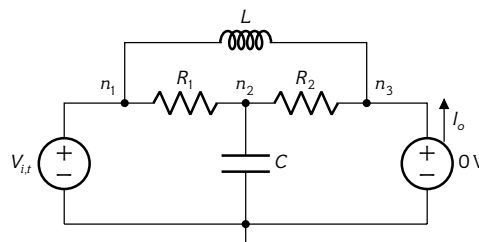
$$\begin{aligned}
 A_i = \frac{I_o}{I_{i,t}} &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{sL} & -\frac{1}{R_1} & 1 \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC & 0 \\ -\frac{1}{sL} & -\frac{1}{R_2} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{sL} & -\frac{1}{R_1} & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC & 0 \\ -\frac{1}{sL} & -\frac{1}{R_2} & -1 \end{vmatrix}} \stackrel{(C_3)}{=} \frac{\begin{vmatrix} -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC \\ -\frac{1}{sL} & -\frac{1}{R_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{sL} & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC \end{vmatrix}} \\
 &= -\frac{\frac{1}{R_1 R_2} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC\right) \frac{1}{sL}}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{sL}\right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC\right) - \frac{1}{R_1^2}} \\
 &= -\frac{\frac{1}{R_1 R_2} + \frac{C}{L} + \frac{1}{sR_1 L} + \frac{1}{sR_2 L}}{\frac{1}{R_1 R_1} + \frac{C}{L} + \frac{1}{sR_1 L} + \frac{1}{sR_2 L} + s\frac{C}{R_1}} \\
 &\quad \downarrow \text{vermenigvuldig teller en noemer met } sR_1 R_2 L \\
 &= -\frac{R_1 + R_2 + s(L + R_1 R_2 C)}{R_1 + R_2 + s(L + R_1 R_2 C) + s^2 L C R_2} \\
 &= -\frac{1 + \frac{R_1}{R_2} + s\left(\frac{L}{R_2} + R_1 C\right)}{R_1 + R_2 + s\left(\frac{L}{R_2} + R_1 C\right) + s^2 L C}
 \end{aligned}$$

Ook hier kunnen we weer zien dat de dimensies van de termen consistent zijn en dat de dimensie van de breuk dimensieloos is, wat klopt voor een stroomversterking.

Transadmittantie We leggen een spanningsbron aan tussen kleine A en B en meten de uitgangsstroom met een ampèremeter tussen klemmen B en D . Om te kunnen werken met potentialen, kiezen we de referentiepotentialiaal op klemmen B en D .



We plaatsen weer een meetspanningsbron om aan de slag te kunnen met de MNA methode:



Vervolgens schrijven we de volgende matrixvergelijking:

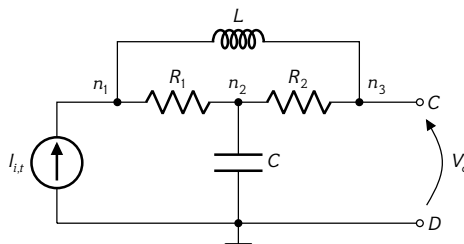
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC & -\frac{1}{R_2} & 0 \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{sL} & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \\ I_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} V_{i,t} \\ \frac{1}{sL} V_{i,t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Waarop we weer gemakkelijk de regel van Cramer kunnen toepassen om I_o en zo Y_t te bepalen:

$$\begin{aligned} Y_t = \frac{I_o}{V_{i,t}} &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{sL} & \frac{1}{sL} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC & -\frac{1}{R_2} & 0 \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{sL} & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}} \stackrel{(R_3)}{=} \frac{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC \right) \frac{1}{sL} + \frac{1}{R_1 R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC} \\ &= -\frac{\frac{1}{sR_1 L} + \frac{1}{sR_2 L} + \frac{C}{L} + \frac{1}{R_1 R_2}}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2} + sC} \\ &\quad \downarrow \text{vermenigvuldig teller en noemer met } sR_1 R_2 L \\ &= \frac{R_1 + R_2 + s(R_1 R_2 C + L)}{s(R_1 + R_2)L + s^2 R_1 R_2 LC} = \frac{1}{R_p} \frac{1 + s \left(R_p C + \frac{L}{R_s} \right)}{s \frac{L}{R_p} + s^2 LC} \end{aligned}$$

met $R_s = R_1 + R_2$ en $R_p = R_1 \parallel R_2$. Ook hier kunnen we weer zien dat de dimensies van de termen consistent zijn en dat de dimensie van de breuk S is, wat klopt voor een transadmittantie.

Transimpedantie We leggen een stroombron aan tussen kleine A en B en meten de uitgangsspanning met een voltmeter tussen klemmen B en D. Om te kunnen werken met potentialen, kiezen we de referentiepotentiaal op klemmen B en D.



We schrijven vervolgens onmiddellijk de MNA vergelijking:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{sL} & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{sL} \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{sL} & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{sL} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{i,t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

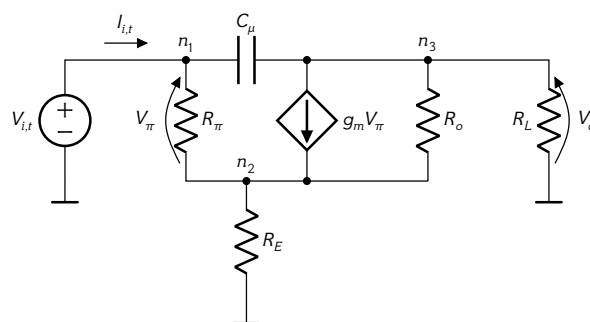
De regel van Cramer laat ons toe om te schrijven (met $Z_t = V_o/I_{i,t}$):

$$\begin{aligned}
 Z_t &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{sL} & -\frac{1}{R_1} & 1 \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC & 0 \\ -\frac{1}{sL} & -\frac{1}{R_2} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{sL} & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{sL} \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{sL} & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{sL} \end{vmatrix}} \\
 &\stackrel{(C3)}{=} \frac{\begin{vmatrix} -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC \\ -\frac{1}{sL} & -\frac{1}{R_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{sL} & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{sL} \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{sL} & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{sL} \end{vmatrix}} \\
 &\stackrel{(C3)}{=} \frac{-\frac{1}{sL} \begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_2} + sC \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{sL} \end{vmatrix} + \frac{1}{R_2} \begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{sL} & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{sL} & -\frac{1}{R_2} \end{vmatrix} + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{sL}\right) \begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{sL} & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC \end{vmatrix}}{\frac{1}{R_1 R_2} + \frac{1}{sL} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC\right)} \\
 &= \frac{-\frac{1}{sL} \left(\frac{1}{R_1 R_2} + \frac{1}{sL} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC\right)\right) - \frac{1}{R_2} \left(\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{sL}\right) \frac{1}{R_2} + \frac{1}{sR_1 L}\right) + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{sL}\right) \left(\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{sL}\right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC\right) - \frac{1}{R_1^2}\right)}{\frac{1}{R_1 R_2} + \frac{1}{sR_1 L} + \frac{1}{sR_2 L} + \frac{C}{L}} \\
 &= \frac{-\frac{1}{sR_1 R_2 L} - \frac{1}{s^2 R_1 L^2} - \frac{1}{s^2 R_2 L} - \frac{C}{sL^2} - \frac{1}{R_1 R_2^2} - \frac{1}{sR_2^2 L} - \frac{1}{sR_1 R_2 L} + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{sL}\right) \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_1 R_2} + \frac{1}{sR_1 L} + \frac{1}{sR_2 L} + \frac{sC}{R_1} + \frac{C}{L} - \frac{1}{R_1^2}\right)}{-\frac{C}{sL^2} + \frac{sC}{R_1 R_2} + \frac{C}{R_2 L} + \frac{C}{R_1 L} + \frac{C}{sL^2}} \\
 &\downarrow \text{vermenigvuldig teller en noemer met } sR_2 R_2 L \\
 &= \frac{R_1 + R_2 + s(R_1 R_2 C + L)}{s(R_1 + R_2)C + s^2 LC} = R_s \frac{1 + s \left(R_p C + \frac{L}{R_s}\right)}{sR_s C + s^2 LC}
 \end{aligned}$$

met $R_s = R_1 + R_2$ en $R_p = R_1 \parallel R_2$. Ook hier kunnen we weer zien dat de dimensies van de termen consistent zijn en dat de dimensie van de breuk Ω is, wat klopt voor een transimpedantie.

Oplossing 6.4.2-4: We gaan het op twee manieren aanpakken. Eerst: "bloed, zweet en tranen". Vervolgens zien we hoe Matlab of Octave ons kan helpen om het leed te verzachten.

Spanningsversterking en ingangsimpedantie Voor de spanningsversterking beschouwen we de volgende configuratie:



We willen $V_o/V_{i,t}$ en $V_{i,t}/I_{i,t}$ berekenen en noteren daartoe de MNA beschrijving. We schrijven vergelijkingen

voor alle knopen:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_\pi} + sC_\mu & -\frac{1}{R_\pi} & -sC_\mu & -1 \\ -\frac{1}{R_\pi} - g_m & \frac{1}{R_\pi} + \frac{1}{R_E} + \frac{1}{R_o} + g_m & -\frac{1}{R_o} & 0 \\ -sC_\mu + g_m & -\frac{1}{R_o} - g_m & \frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_L} + sC_\mu & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ I_{i,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_{i,t} \end{bmatrix}$$

Merk de regelmaat op van het patroon dat elk element in de matrix nalaat. Dat kan je gebruiken om te verifiëren of er geen tekenfouten in de vergelijking zitten. De laatste vergelijking zegt in essentie dat V_1 gelijk is aan $V_{i,t}$. We kunnen dus V_1 uit dit systeem elimineren door de eerste termen van elke vergelijking naar het rechterlid te verhuizen en de laatste vergelijking weg te laten. Dit levert op:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{R_\pi} & -sC_\mu & -1 \\ \frac{1}{R_\pi} + \frac{1}{R_E} + \frac{1}{R_o} + g_m & -\frac{1}{R_o} & 0 \\ -\frac{1}{R_o} - g_m & \frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_L} + sC_\mu & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \\ I_{i,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_\pi} - sC_\mu \\ \frac{1}{R_\pi} + g_m \\ sC_\mu - g_m \end{bmatrix} V_{i,t}$$

We gebruiken vervolgens de regel van Cramer om $V_o/V_{i,t}$ te bepalen, wetende dat $V_o = V_3$:

$$\begin{aligned} A_v = \frac{V_o}{V_{i,t}} &= \frac{\begin{vmatrix} -\frac{1}{R_\pi} & -\frac{1}{R_\pi} - sC_\mu & -1 \\ \frac{1}{R_\pi} + \frac{1}{R_E} + \frac{1}{R_o} + g_m & \frac{1}{R_\pi} + g_m & 0 \\ -\frac{1}{R_o} - g_m & sC_\mu - g_m & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\frac{1}{R_\pi} & -sC_\mu & -1 \\ \frac{1}{R_\pi} + \frac{1}{R_E} + \frac{1}{R_o} + g_m & -\frac{1}{R_o} & 0 \\ -\frac{1}{R_o} - g_m & \frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_L} + sC_\mu & 0 \end{vmatrix}} \\ &\stackrel{(C_3)}{=} \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_\pi} + \frac{1}{R_E} + \frac{1}{R_o} + g_m & \frac{1}{R_\pi} + g_m \\ -\frac{1}{R_o} - g_m & sC_\mu - g_m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_\pi} + \frac{1}{R_E} + \frac{1}{R_o} + g_m & -\frac{1}{R_o} \\ -\frac{1}{R_o} - g_m & \frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_L} + sC_\mu \end{vmatrix}} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{R_\pi} + \frac{1}{R_E} + \frac{1}{R_o} + g_m\right)(sC_\mu - g_m) + \left(\frac{1}{R_\pi} + g_m\right)\left(\frac{1}{R_o} + g_m\right)}{\left(\frac{1}{R_\pi} + \frac{1}{R_E} + \frac{1}{R_o} + g_m\right)\left(\frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_L} + sC_\mu\right) - \frac{1}{R_o}\left(\frac{1}{R_o} + g_m\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{R_\pi R_o} - \frac{g_m}{R_E} + sC_\mu\left(\frac{1}{R_\pi} + \frac{1}{R_E} + \frac{1}{R_o} + g_m\right)}{\frac{g_m}{R_L} + \frac{1}{R_\pi R_o} + \frac{1}{R_\pi R_L} + \frac{1}{R_E R_o} + \frac{1}{R_E R_L} + \frac{1}{R_o R_L} + sC_\mu\left(\frac{1}{R_\pi} + \frac{1}{R_E} + \frac{1}{R_o}\right)} \end{aligned}$$

Uit dezelfde MMA beschrijving, kunnen we $I_{i,t}/V_{i,t}$ afleiden:

$$\frac{I_{i,t}}{V_{i,t}} = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{1}{R_\pi} & -sC_\mu & -\frac{1}{R_\pi} - sC_\mu \\ \frac{1}{R_\pi} + \frac{1}{R_E} + \frac{1}{R_o} + g_m & -\frac{1}{R_o} & \frac{1}{R_\pi} + g_m \\ -\frac{1}{R_o} - g_m & \frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_L} + sC_\mu & sC_\mu - g_m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\frac{1}{R_\pi} & -sC_\mu & -1 \\ \frac{1}{R_\pi} + \frac{1}{R_E} + \frac{1}{R_o} + g_m & -\frac{1}{R_o} & 0 \\ -\frac{1}{R_o} - g_m & \frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_L} + sC_\mu & 0 \end{vmatrix}}$$

De berekening van de noemer kunnen we recupereren uit de vorige afleiding (op het minteken na). De teller T bekijken we even apart. We weten uit de lineaire algebra, dat de determinant niet wijzigt als we een rij (of kolom) vervangen door een lineaire combinatie van andere rijen (of kolommen). Dit kunnen we uitbuiten om de determinant wat 'sparser' te maken, zodat het rekenwerk wat minder uitgebreid wordt. Sparse is een Engelse term die dunbevolkt betekent. In een numerieke matrix duidt dit op de aanwezigheid van slechts enkele elementen die niet nul zijn. In een symbolische matrix, duidt dit ook op het korter worden van de uitdrukkingen die de elementen uitmaken.

We tellen de eerste en de derde rij bij de tweede:

$$T = \begin{vmatrix} -\frac{1}{R_\pi} & -sC_\mu & -\frac{1}{R_\pi} - sC_\mu \\ \frac{1}{R_\pi} + \frac{1}{R_E} + \frac{1}{R_o} + g_m & -\frac{1}{R_o} & \frac{1}{R_\pi} + g_m \\ -\frac{1}{R_o} - g_m & \frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_L} + sC_\mu & sC_\mu - g_m \end{vmatrix}$$

$$\downarrow R2 \leftarrow R2 + R1 + R3$$

$$= \begin{vmatrix} -\frac{1}{R_\pi} & -sC_\mu & -\frac{1}{R_\pi} - sC_\mu \\ \frac{1}{R_E} & \frac{1}{R_L} & 0 \\ -\frac{1}{R_o} - g_m & \frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_L} + sC_\mu & sC_\mu - g_m \end{vmatrix}$$

Dat scheelt een aardige slok op de borrel. We rekenen nu verder deze determinant uit:

$$T^{(R2)} = -\frac{1}{R_E} \begin{vmatrix} -sC_\mu & -\frac{1}{R_\pi} - sC_\mu \\ \frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_L} + sC_\mu & sC_\mu - g_m \end{vmatrix} + \frac{1}{R_L} \begin{vmatrix} -\frac{1}{R_\pi} & -\frac{1}{R_\pi} - sC_\mu \\ -\frac{1}{R_o} - g_m & sC_\mu - g_m \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{R_E} \left(sC_\mu (sC_\mu - g_m) - \left(\frac{1}{R_\pi} + sC_\mu \right) \left(\frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_L} + sC_\mu \right) \right) - \frac{1}{R_L} \left(\frac{1}{R_\pi} (sC_\mu - g_m) + \left(\frac{1}{R_\pi} + sC_\mu \right) \left(\frac{1}{R_o} + g_m \right) \right)$$

$$= \frac{1}{R_E} \left(s^2 C_\mu^2 - s g_m C_\mu - \frac{1}{R_\pi R_o} - \frac{1}{R_\pi R_L} - s C_\mu \left(\frac{1}{R_\pi} + \frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_L} \right) - s^2 C_\mu^2 \right)$$

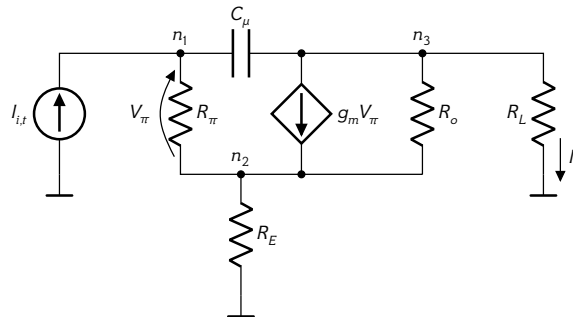
$$- \frac{1}{R_L} \left(\frac{s C_\mu}{R_\pi} - \frac{g_m}{R_\pi} + \frac{1}{R_\pi R_o} + \frac{g_m}{R_\pi} + \frac{s C_\mu}{R_o} + s C_\mu g_m \right)$$

$$= - \left(\frac{1}{R_E R_\pi R_o} + \frac{1}{R_E R_\pi R_L} + \frac{1}{R_L R_\pi R_o} + s C_\mu \left(\frac{1}{R_E R_\pi} + \frac{1}{R_E R_o} + \frac{1}{R_E R_L} + \frac{1}{R_L R_o} + \frac{g_m}{R_E} + \frac{g_m}{R_L} \right) \right)$$

Wat leidt tot:

$$Z_i = \frac{V_{i,t}}{I_{i,t}} = \frac{\frac{g_m}{R_L} + \frac{1}{R_\pi R_o} + \frac{1}{R_\pi R_L} + \frac{1}{R_E R_o} + \frac{1}{R_E R_L} + \frac{1}{R_o R_L} + sC_\mu \left(\frac{1}{R_\pi} + \frac{1}{R_E} + \frac{1}{R_o} \right)}{\frac{1}{R_E R_\pi R_o} + \frac{1}{R_E R_\pi R_L} + \frac{1}{R_L R_\pi R_o} + sC_\mu \left(\frac{1}{R_E R_\pi} + \frac{1}{R_E R_o} + \frac{1}{R_E R_L} + \frac{1}{R_L R_o} + \frac{g_m}{R_E} + \frac{g_m}{R_L} \right)}$$

Stroomversterking Voor de stroomversterking beschouwen we de volgende configuratie:



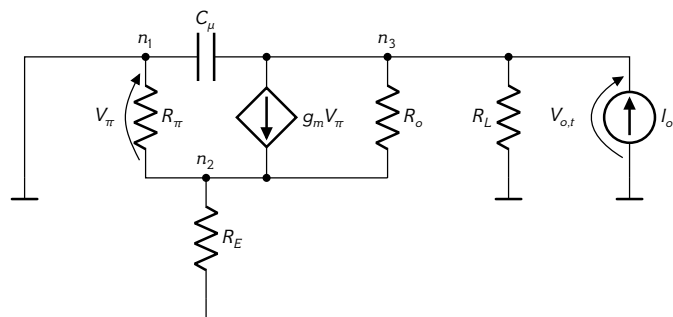
We zouden opnieuw dezelfde route kunnen nemen, maar we gaan slimmer zijn. Bij het berekenen van de spanningsversterking en de ingangsimpedantie, berekenden we voor eenzelfde $V_{i,t}$ al de bijhorende $I_{i,t}$ en V_o . Een eenvoudige toepassing van 'de kettingregel' laat ons toe om ook de stroomversterking te berekenen:

$$\frac{I_o}{I_{i,t}} = \frac{V_o/R}{I_{i,t}} = \frac{1}{R} \frac{V_o}{V_{i,t}} \frac{V_{i,t}}{I_{i,t}} = \frac{1}{R} A_v Z_i$$

Dus:

$$A_i = \frac{1}{R_L} \frac{\frac{1}{R_\pi R_o} - \frac{g_m}{R_E} + sC_\mu \left(\frac{1}{R_\pi} + \frac{1}{R_E} + \frac{1}{R_o} + g_m \right)}{\frac{1}{R_E R_\pi R_o} + \frac{1}{R_E R_\pi R_L} + \frac{1}{R_L R_\pi R_o} + sC_\mu \left(\frac{1}{R_E R_\pi} + \frac{1}{R_E R_o} + \frac{1}{R_E R_L} + \frac{1}{R_L R_o} + \frac{g_m}{R_E} + \frac{g_m}{R_L} \right)}$$

Uitgangsimpedantie Voor de uitgangsimpedantie beschouwen we een andere configuratie. Merk op dat we ervan uitgaan dat de schakeling in normale werking aangestuurd wordt door een spanningsbron, die we voor het meten van de uitgangsimpedantie in rust brengen (d.w.z. vervangen door een kortsluiting).



De MNA beschrijving wordt:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_\pi} + \frac{1}{R_o} + g_m & -\frac{1}{R_o} \\ -\frac{1}{R_o} - g_m & \frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_L} + sC_\mu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{o,t} \end{bmatrix}$$

En hier kunnen we dan gemakkelijk weer de uitgangsimpedantie uit berekenen, m.b.v. de regel van Cramer:

$$\begin{aligned}
 Z_o = \frac{V_3}{I_{o,t}} &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_\pi} + \frac{1}{R_o} + g_m & 0 \\ -\frac{1}{R_o} - g_m & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_\pi} + \frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_E} + g_m & -\frac{1}{R_o} \\ -\frac{1}{R_o} - g_m & \frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_L} + sC_\mu \end{vmatrix}} \\
 &= \frac{\frac{1}{R_\pi} + \frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_E} + g_m}{\left(\frac{1}{R_\pi} + \frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_E} + g_m\right)\left(\frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_L} + sC_\mu\right) - \frac{1}{R_o}\left(\frac{1}{R_o} + g_m\right)} \\
 &= \frac{\frac{1}{R_\pi} + \frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_E} + g_m}{\frac{1}{R_\pi R_o} + \frac{1}{R_o R_L} + \frac{1}{R_\pi R_L} + \frac{1}{R_E R_o} + \frac{1}{R_E R_L} + \frac{g_m}{R_L} + sC_\mu\left(\frac{1}{R_\pi} + \frac{1}{R_L} + \frac{1}{R_E} + g_m\right)}
 \end{aligned}$$

Als we even terugblikken, dan heeft dit ons toch bijna 3 bladzijden rekenwerk gekost. Gelukkig hebben we symbolische algebra pakketten, zoals Matlab of Octave die ons bij het uitwerken van deze stelsels kan helpen.

Als voorbeeld hieronder de matlab code om de uitgangsimpedantie te bepalen. De lezer kan ongetwijfeld dezelfde techniek toepassen om ook de spannings- en stroomversterking en de ingangsimpedantie te bepalen.

```

syms s gm Ro RE It Cmu RL Rpi;
A = [
+(1/(RE))+1/(Ro))+1/(Rpi))+gm, -(1/(Ro));
-(1/(Ro))-gm, +(s*(Cmu))+1/(RL))+1/(Ro));
];

%% RHS vector
B = [
0;
+(It);
];

X = A\B;
pretty( X(2) );

```

Oplossing 6.5.1-1: Er zijn twee mogelijkheden om dit spectrum te tekenen. De eerste zou je moeten zelf moeten hebben kunnen opstellen op basis van je algemene matlabkennis. De tweede vraagt wat kennis van de beschikbare toolboxes.

- zonder gebruik te maken van toolboxes
- door gebruik te maken van de control toolbox

Het volgende blok is gelijk voor de twee methodes:

```

%% De parameters
Cp = 106e-6;
Rp = 1.65e3;
Cs = 2.1e-3;
Rs = 873e-9;
Ls = 26.7e-9;

```

We starten met de eerste methode:

```

figure;
w = logspace( -2, 7, 500 );
s = j*w;
VocoverVs = (s .* Rp*Cs) ./ ...
(s.^3.*Rp*Cp*Cs + s.^2.*(Rp*Cp*Rs*Cs+Ls*Cs) + s.*(Rp*Cp+Rs*Cs+Rp*Cs) + 1);
subplot(2,1,1);
semilogx( w, 20*log10( abs( VocoverVs ) ) );
ylabel( 'Magnitude (dB)' );
title( 'Bode diagram van V_{oc}/V_s' );
grid on;
subplot(2,1,2);
semilogx( w, rad2deg( angle( VocoverVs ) ) );
ylabel( 'Phase (°)' );
xlabel( '\omega (rad/s)' );
grid on;

```

De tweede methode (is dankzij de toolbox) veel compacter:

```

figure;
s = tf( 's' );
VocoverVs = s*Rp*Cs ...
/ (s^3*Rp*Cp*Cs + s^2*(Rp*Cp*Rs*Cs+Ls*Cs) + s*(Rp*Cp+Rs*Cs+Rp*Cs) + 1);
bode( VocoverVs );
grid on;
title( 'Bode diagram van V_{oc}/V_s' );

```

De diagrammen die je moet bekomen vind je in het tekstboek.

Oplossing 6.5.1-2: Er zijn twee mogelijkheden om dit spectrum te tekenen. De eerste zou je moeten zelf moeten hebben kunnen opstellen op basis van je algemene matlabkennis. De tweede vraagt wat kennis van de beschikbare toolboxes.

- zonder gebruik te maken van toolboxes
- door gebruik te maken van de control toolbox

Beide methodes werden behandeld in de oplossing van de vorige oefening. Je kan daar zien hoe je de scripts opstelt.

De diagrammen die je moet bekomen vind je in het tekstboek.

Oplossing 6.5.1-3: Om het Thévenin-equivalent te kunnen opstellen, bepalen we tussen de klemmen A en B

- de openklemspanning, en
- de impedantie.

Aangezien bij open klemmen, er geen stroom vloeit door weerstand R_1 en er dus ook geen spanning over staat, is de openklemspanning gelijk aan de spanning over de condensator. Deze is eenvoudig te bepalen als:

$$\begin{aligned}
 V_c &= \frac{\frac{1}{sC}}{R_2 + \frac{1}{sC}} V \\
 &= \frac{1}{1 + sR_2C} V
 \end{aligned}$$

De impedantie kunnen we bepalen op twee manieren:

1. als de openklemspanning gedeeld door de kortsluitstroom

2. als de impedantie tussen klemmen A en B als alle inwendige autonome bronnen in rust zijn, d.w.z. $V = 0$ wat wil zeggen dat we de bron kunnen vervangen door een kortsluiting.

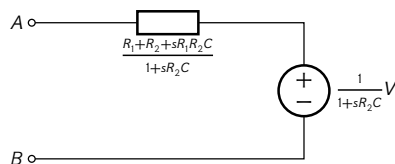
Merk op dat we voor de tweede methode moeten kunnen ingrijpen in het netwerk (we moeten het netwerk dus kennen), terwijl we de eerste methode in alle gevallen kunnen toepassen.

De eerste methode laten we aan de lezer. Gebruik je favoriete methode (bv. MNA, of het vereenvoudigen met serie-parallelschakelingen).

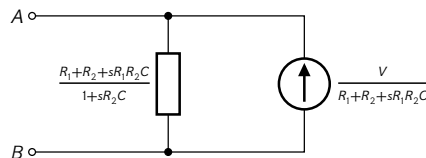
De tweede leert ons dat:

$$\begin{aligned} Z &= R_1 + \frac{1}{sC} \parallel R_2 \\ &= R_1 + \frac{1}{sC + \frac{1}{R_2}} \\ &= R_1 + \frac{R_2}{1 + sR_2C} \\ &= \frac{R_1 + R_2 + sR_1R_2C}{1 + sR_2C} \end{aligned}$$

Dit resultaat zou hetzelfde moeten zijn als wat je uitrekende met de eerste methode. Het Thévenin-equivalent is dus:



Het Norton-equivalent heeft dezelfde impedantie, maar gebruikt een stroombron met waarde gelijk aan de kortsluitstroom die uit de schakeling komt, m.a.w. $I_{sc} = V_{oc} / Z$. Hierdoor

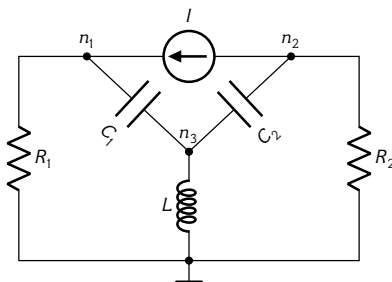


Oplossing 6.5.1-4: We moedigen de lezer aan om aan de slag te gaan met het vereenvoudigen van de schakeling om de kortsluitstroom en de impedantie te berekenen, om op die manier de waarde van de stroombron en de impedantie te bepalen.

Om de impedantie te bepalen, neutraliseren we de stroombron (vervangen door een open keten). We krijgen op die manier:

$$\begin{aligned} Z &= R_1 + \frac{1}{sC_1} + \frac{1}{sL} \parallel \left(\frac{1}{sC_2} + R_2 \right) \\ &= R_1 + \frac{1}{sC_1} + \frac{sL(1 + sR_2C_2)}{1 + sR_2C_2 + s^2LC_2} \end{aligned}$$

Om de kortsluitstroom te bepalen, tonen we ons nogmaals van onze meest luie kant en stellen we alweer een MNA-beschrijving op voor de onderstaande schakeling waaraan we zelfs geen meetspanningsbron toevoegen, want de kortsluitstroom is eenvoudigweg de stroom door R_1 , m.a.w. V_1 / R_1 .



De MNA beschrijving wordt:

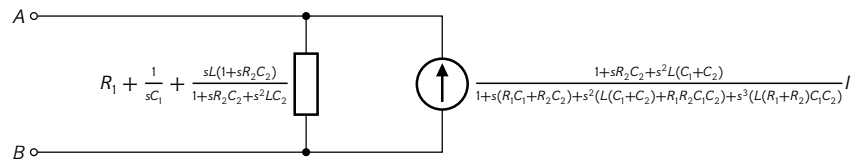
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + sC_1 & 0 & -sC_1 \\ 0 & \frac{1}{R_2} + sC_2 & -sC_2 \\ -sC_1 & -sC_2 & sC_1 + sC_2 + \frac{1}{sL} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ -I \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hieruit kunnen we m.b.v. de regel van Cramer bepalen dat:

$$\begin{aligned} V_3 &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -sC_1 \\ -1 & \frac{1}{R_2} + sC_2 & -sC_2 \\ 0 & -sC_2 & sC_1 + sC_2 + \frac{1}{sL} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} + sC_1 & 0 & -sC_1 \\ 0 & \frac{1}{R_2} + sC_2 & -sC_2 \\ -sC_1 & -sC_2 & sC_1 + sC_2 + \frac{1}{sL} \end{vmatrix}} I \\ &\downarrow R_3 \leftarrow R_1 + R_2 + R_3 \text{ voor teller en noemer} \\ &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -sC_1 \\ -1 & \frac{1}{R_2} + sC_2 & -sC_2 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & \frac{1}{sL} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} + sC_1 & 0 & -sC_1 \\ 0 & \frac{1}{R_2} + sC_2 & -sC_2 \\ \frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_2} & \frac{1}{sL} \end{vmatrix}} I \\ &\stackrel{(R3)}{=} \frac{\frac{1}{R_2}(sC_1 + sC_2) + \frac{1}{sL} \left(\frac{1}{R_2} + sC_2 \right)}{\frac{1}{R_1} sC_1 \left(\frac{1}{R_2} + sC_2 \right) + \frac{1}{R_2} sC_2 \left(\frac{1}{R_1} + sC_1 \right) + \frac{1}{sL} \left(\frac{1}{R_1} + sC_1 \right) \left(\frac{1}{R_2} + sC_2 \right)} I \\ &\downarrow \text{vermenigvuldig teller en noemer maal } sR_1R_2L \\ &= \frac{s^2LR_1(C_1 + C_2) + R_1 + sR_1R_2C_2}{s^2LC_1(1 + sR_2C_2) + s^2LC_2(1 + sR_1C_1) + (1 + sR_1C_1)(1 + sR_2C_2)} I \\ &= R_1 \frac{1 + sR_2C_2 + s^2L(C_1 + C_2)}{1 + s(R_1C_1 + R_2C_2) + s^2(L(C_1 + C_2) + R_1R_2C_1C_2) + s^3(L(R_1 + R_2)C_1C_2)} I \end{aligned}$$

waaruit we mooi R_1 kunnen wegdelen om de kortsluitstroom te bekomen.

Dit brengt ons tot het volgende Norton-equivalent:

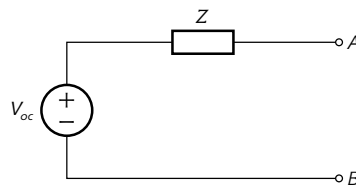


Oplossing 6.5.1-5: Stel zelf de nodige MNA beschrijvingen op, gebruik je favoriete rekenmachine (bv. Matlab of Octave) en je zou moeten vinden dat:

$$V_{oc} = \frac{Z_2 Z_3 - Z_1 Z_4}{R_s(Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4) + (Z_1 + Z_2)(Z_3 + Z_4)} V$$

$$Z = \frac{R_s(Z_1 + Z_3)(Z_2 + Z_4) + Z_1 Z_2 Z_3 + Z_1 Z_2 Z_4 + Z_1 Z_3 Z_4 + Z_2 Z_3 Z_4}{R_s(Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4) + (Z_1 + Z_2)(Z_3 + Z_4)}$$

horende bij het onderstaande schema:



Oplossing 6.5.3-1: Je vindt de oplossingen in de appendix met tweepoorttabellen.

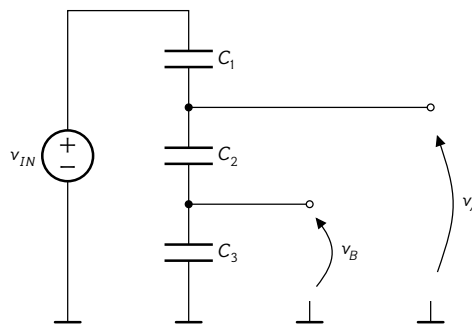
Basisnetwerken, versterkers en comparatoren

Oplossing 7.1.4-1:

$$v_A = \frac{R_2 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3} v_{IN}$$

$$v_B = \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} v_{IN}$$

Oplossing 7.1.4-2: Het schema ziet er nu als volgt uit:

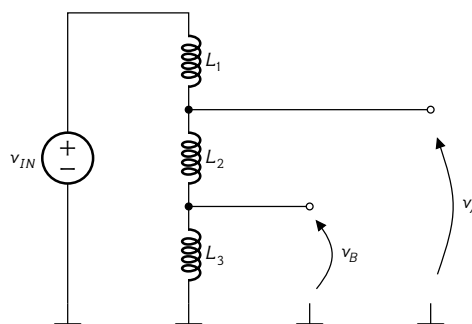


De uitgangsspanningen worden nu:

$$v_A = \frac{C_1(C_2 + C_3)}{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3} v_{IN}$$

$$v_B = \frac{C_1C_2}{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3} v_{IN}$$

Oplossing 7.1.4-3: Het schema ziet er nu als volgt uit:



De uitgangsspanningen worden nu:

$$v_A = \frac{L_2 + L_3}{L_1 + L_2 + L_3} v_{IN}$$

$$v_B = \frac{L_3}{L_1 + L_2 + L_3} v_{IN}$$

Oplossing 7.1.4-4: De schakeling vormt een potentiometrische deler, waarbij we de spanning over de weerstand in het frequentiedomein kunnen schrijven als:

$$V_r = \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{sRC}{1 + sRC} V_{in}$$

We wensen $|V_r|/|V_{in}| = 1/10$, dus

$$\frac{|sRC|}{|1 + sRC|} = \frac{1}{10}$$

$$\downarrow s = j\omega$$

$$\frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} = \frac{1}{10}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\omega RC)^2}{1 + (\omega RC)^2} = \frac{1}{100}$$

$$\Leftrightarrow 100(\omega RC)^2 = 1 + (\omega RC)^2$$

$$\Leftrightarrow C = \frac{1}{\sqrt{99} \omega R} = \frac{1}{\sqrt{99} 2\pi f R} = 57.127 \mu\text{F}$$

Merk op dat de quick-n-dirty berekening die wel eens door 'oude rotten in het vak' gemaakt wordt, uitgaat van het feit dat je de grootte van de impedantie van de condensator 9 keer groter wil maken dan die van de weerstand om zo tot een deling door 10 te komen:

$$\frac{1}{\omega C} = 9R$$

$$\Leftrightarrow C = \frac{1}{9\omega R}$$

Deze berekening is inderdaad quick, maar ook dirty: ze zit er zo'n 10% naast!

Oplossing 7.1.4-5:

$$i_{OUT} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i_{IN}$$

Oplossing 7.1.4-6: Indien we een spanningsomvormer maken met vier takken die vanop een knoop met potentiaal v_1 t.e.m. v_4 met weerstanden R_1 t.e.m. R_4 verbonden zijn met een centraal knooppunt met potentiaal v_o , dan weten (met $G_i = 1/R_i$) we via de stelling van Millman dat:

$$v_o = \frac{G_1 v_1 + G_2 v_2 + G_3 v_3 + G_4 v_4}{G_1 + G_2 + G_3 + G_4}$$

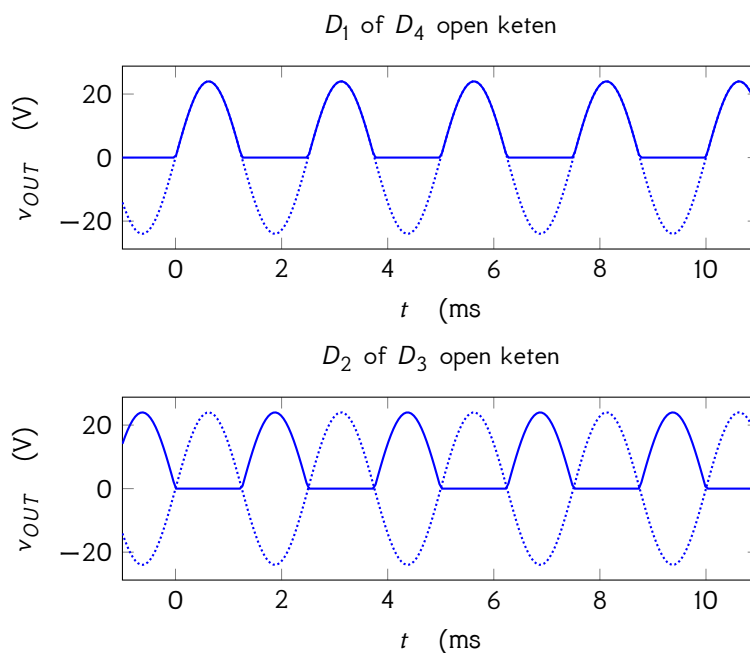
Als we dus kiezen voor $G_1 \sim 11$, $G_2 \sim 7$, $G_3 \sim 5$ en $G_4 \sim 3$, dan krijgen we het beoogde resultaat. Dus bv.:

$$R_1 = \frac{1}{11} \Omega \quad R_2 = \frac{1}{7} \Omega \quad R_3 = \frac{1}{5} \Omega \quad R_4 = \frac{1}{3} \Omega$$

Deze waarden zijn in de praktijk vermoedelijk wat klein om energiezuinig te zijn en de signaallijnen niet teveel te belasten. De weerstanden op eenzelfde manier schalen wijzigt de gewichten niet, dus als beter voorstel kan dit bijvoorbeeld:

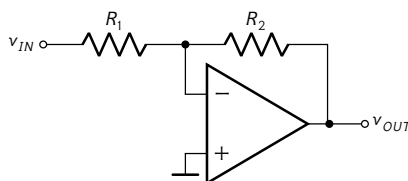
$$R_1 = \frac{10}{11} \text{ k}\Omega \quad R_2 = \frac{10}{7} \text{ k}\Omega \quad R_3 = \frac{10}{5} \text{ k}\Omega \quad R_4 = \frac{10}{3} \text{ k}\Omega$$

Oplossing 7.1.4-7: Hieronder maken we een schets voor elk van de vier diodes die een open keten wordt. Deingangsspanning v_{IN} werd in stippellijn weergegeven. De curves voor D_1 en D_4 zijn dezelfde. Idem voor D_2 en D_3 .



De situatie met kortsluiting is minder genuanceerd. Als een van de diodes korgesloten wordt, dan zal ook de volledige voedingsspanning over een andere diode komen te staan. Als die een open keten wordt, dan kom je in de bovenstaande gevallen terecht. Als de andere diode ook een kortsluiting wordt, dan is je voedingsbron kortgesloten, waardoor in het beste geval een smeltzekering doorsmelt, in het slechtste geval, zoek je beter een brandblusser (of zorg je ervoor dat je een paar goede loopschoenen aanhebt¹).

Oplossing 7.2.4-1: Onderstaand schema is een inverterende opampversterker:



De gewenste versterking bedraagt 30 dB wat overeenkomt met een lineaire versterking van:

$$|A| = 10^{\frac{30}{20}} = 31.6$$

De versterking is bepaald als:

$$A = -\frac{R_2}{R_1}$$

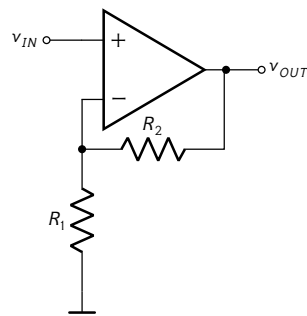
$$\Leftrightarrow |A| = \frac{R_2}{R_1}$$

Deingangsimpedantie van de versterker is gelijk aan R_1 . Bijgevolg moet R_1 minstens 10 k Ω bedragen. We kiezen R_1 bv. gelijk aan 15 k Ω . Dan wordt

$$R_2 = |A| \cdot R_1 = 474 \text{ k}\Omega$$

¹Grapje natuurlijk. Eerste werk: bel de brandweer!

Oplossing 7.2.4-2: Onderstaand schema is een niet-inverterende opampversterker:



De gewenste versterking bedraagt 50 dB wat overeenkomt met een lineaire versterking van:

$$|A| = 10^{\frac{50}{20}} = 316.2$$

De versterking is bepaald als:

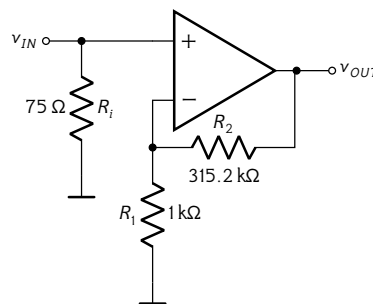
$$A = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

$$\Leftrightarrow |A| = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

De ingangsimpedantie van de versterker is oneindig groot. Bijgevolg hangen de weerstandswaarden niet af van de benodigde ingangsimpedantie: We kiezen R_1 bv. gelijk aan $1\text{ k}\Omega$. Dan wordt

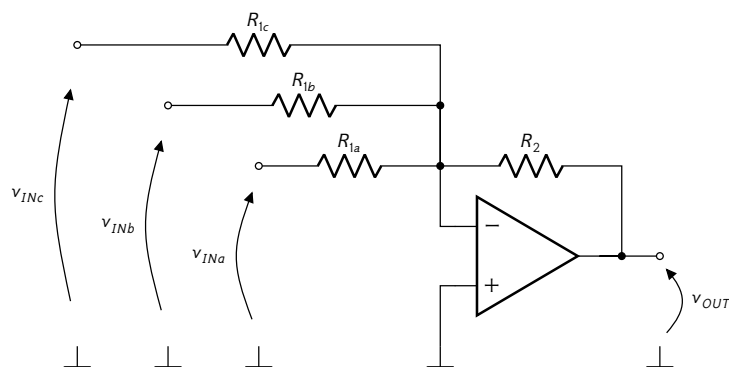
$$R_2 = (|A| - 1) \cdot R_1 = 315.2\text{ k}\Omega$$

De ingangsimpedantie corrigeren we dan door een extra weerstand toe te voegen om de ingang te belasten met $75\ \Omega$:



Oplossing 7.2.4-3: Laten we de ingangen a , b , en c noemen en de gewichten in dezelfde volgorde aan de ingangen toekennen.

Hieronder de inverterende somversterker met drie ingangen:



De ingangs-uitgangsrelatie is snel opgesteld als:

$$v_{OUT} = - \left(\frac{R_2}{R_{1a}} v_{INa} + \frac{R_2}{R_{1b}} v_{INb} + \frac{R_2}{R_{1c}} v_{INc} \right)$$

De ingangsimpedanties zijn R_{1a} , R_{1b} en R_{1c} .

Uit gelijkstelling van de symbolische en numerieke gewichten, krijgen we het volgende stelsel:

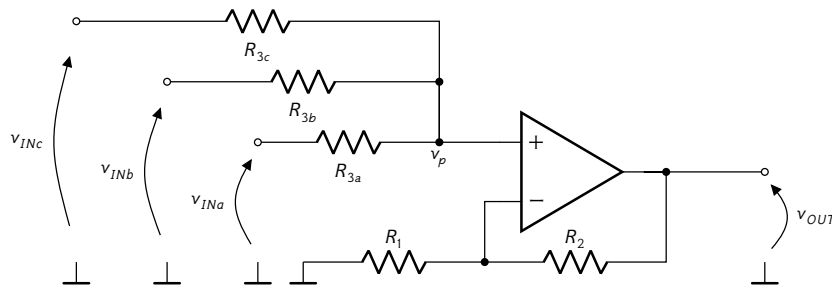
$$\begin{cases} \frac{R_2}{R_{1a}} = \frac{5}{4} \\ \frac{R_2}{R_{1b}} = \frac{1}{2} \\ \frac{R_2}{R_{1c}} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_{1a} = \frac{4}{5} R_2 \\ R_{1b} = 2 R_2 \\ R_{1c} = \frac{1}{3} R_2 \end{cases}$$

We hebben in dit stelsel een vrijheidsgraad, i.e. R_2 . Ongeacht de keuze voor R_2 , zal de kleinste ingangsimpedantie R_{1c} zijn. Laten we die gelijk stellen aan $1 \text{ k}\Omega$. Dan kunnen we uit het bovenstaande stelsel de andere waarden bepalen:

$$\begin{cases} R_{1a} = \frac{4}{5} R_2 = 2.4 \text{ k}\Omega \\ R_{1b} = 2 R_2 = 6 \text{ k}\Omega \\ R_2 = 3 R_{1c} = 3 \text{ k}\Omega \end{cases}$$

Oplossing 7.2.4-4: Laten we de ingangen a , b , en c noemen en de gewichten in dezelfde volgorde aan de ingangen toekennen.

Hieronder de niet-inverterende somversterker met drie ingangen:



De ingangs-uitgangsrelatie is snel opgesteld m.b.v. de stelling van Millman en kennis van de niet-inverterende versterker:

$$v_{OUT} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{\frac{1}{R_{3a}} v_{INa} + \frac{1}{R_{3b}} v_{INb} + \frac{1}{R_{3c}} v_{INc}}{\frac{1}{R_{3a}} + \frac{1}{R_{3b}} + \frac{1}{R_{3c}}}$$

De gewichten zijn evenredig met de factoren $1/R_{3a}$, $1/R_{3b}$ en $1/R_{3c}$, bij gevolg zal $R_{3a} > R_{3b} > R_{3c}$.

We vatten dit samen met:

$$\begin{aligned} R_{3a} &= \frac{8}{3} K \\ R_{3b} &= \frac{3}{5} K \\ R_{3c} &= \frac{1}{2} K \end{aligned}$$

Laten we vervolgens eens de ingangsimpedanties van de somversterker bekijken. Via superpositie (leg een testspanning aan, aan één van de ingangen en sluit de andere ingangen kort), krijg je de volgende uitdrukkingen

voor de ingangsimpedanties Z van ingangen a , b , en c :

$$Z_a = \frac{R_{3a}R_{3b} + R_{3a}R_{3c} + R_{3b}R_{3c}}{R_{3b} + R_{3c}}$$

$$Z_b = \frac{R_{3a}R_{3b} + R_{3a}R_{3c} + R_{3b}R_{3c}}{R_{3a} + R_{3c}}$$

$$Z_c = \frac{R_{3a}R_{3b} + R_{3a}R_{3c} + R_{3b}R_{3c}}{R_{3a} + R_{3b}}$$

De conclusie is dat de grootste noemer de kleinste ingangsimpedantie zal opleveren. Dit is Z_c . Als we die gelijk nemen dan $5 \text{ k}\Omega$, dan zullen ook Z_a en Z_b voldoende groot zijn. Dus:

$$\frac{R_{3a}R_{3b} + R_{3a}R_{3c} + R_{3b}R_{3c}}{R_{3a} + R_{3b}} = 5 \text{ k}\Omega$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{8}{3}K \frac{3}{5}K + \frac{8}{3}K \frac{1}{2}K + \frac{3}{5}K \frac{1}{2}K}{\frac{8}{3}K + \frac{3}{5}K} = 5 \text{ k}\Omega$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{24}{15} + \frac{8}{6} + \frac{3}{10}}{\frac{8}{3} + \frac{3}{5}}K = 5 \text{ k}\Omega$$

$$\Leftrightarrow K = 5.052 \text{ k}\Omega$$

Conclusie:

$$R_{3a} = \frac{8}{3}K = 13.47 \text{ k}\Omega$$

$$R_{3b} = \frac{3}{5}K = 3.030 \text{ k}\Omega$$

$$R_{3c} = \frac{1}{2}K = 2.526 \text{ k}\Omega$$

Nu rest er ons enkel nog de versterking in te stellen, zodat we de gewichte niet enkel relatief kunnen garanderen, maar ook absoluut. We weten dat:

$$v_{OUT} = A_{cl} \frac{\frac{1}{R_{3a}}v_{INa} + \frac{1}{R_{3b}}v_{INb} + \frac{1}{R_{3c}}v_{INc}}{\frac{1}{R_{3a}} + \frac{1}{R_{3b}} + \frac{1}{R_{3c}}}$$

met A_{cl} de versterking van de niet-inverterende opampversterker zonder het sommatienetwerk. We wensen dat:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{cl} \frac{\frac{1}{R_{3a}}}{\frac{1}{R_{3a}} + \frac{1}{R_{3b}} + \frac{1}{R_{3c}}} = \frac{3}{8} \\ A_{cl} \frac{\frac{1}{R_{3b}}}{\frac{1}{R_{3a}} + \frac{1}{R_{3b}} + \frac{1}{R_{3c}}} = \frac{5}{3} \\ A_{cl} \frac{\frac{1}{R_{3c}}}{\frac{1}{R_{3a}} + \frac{1}{R_{3b}} + \frac{1}{R_{3c}}} = 2 \end{array} \right.$$

Dit zijn 3 identieke vergelijkingen. We kiezen er één (bv. de derde) en lossen er A_{cl} uit op.

$$A_{cl} = 2 \frac{\frac{1}{R_{3a}} + \frac{1}{R_{3b}} + \frac{1}{R_{3c}}}{\frac{1}{R_{3c}}} = 4.042$$

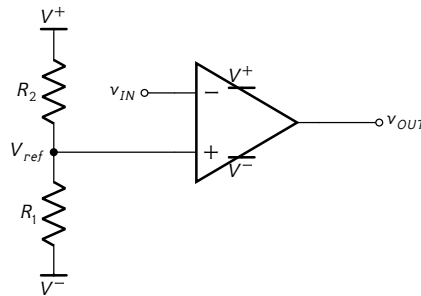
Als je wil kan de correctheid van deze waarde nog eens controleren a.d.h.v. de andere vergelijkingen. Indien we nu als waarden kiezen:

$$R_1 = 10 \text{ k}\Omega$$

$$R_2 = (A_{cl} - 1)R_1 = 3.042 \text{ k}\Omega$$

dan werkt deze somversterker zoals gevraagd.

Oplossing 7.2.6-1: Het onderstaande schema is dat van een inverterende comparator met een potentiometrische deler die de referentiespanning maakt.

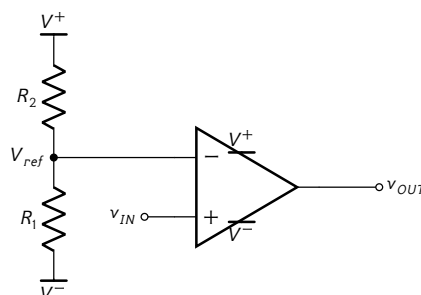


Als we de stroom door de potentiometrische deler beperkt willen houden, kiezen we bv. $R_1 + R_2 = 100 \text{ k}\Omega$. De waarde van de individuele weerstanden kunnen we bepalen uit:

$$\begin{aligned} V_{ref} &= V^- + \frac{R_1}{R_1 + R_2}(V^+ - V^-) \\ \Leftrightarrow V_{ref} &= -10 \text{ V} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} 20 \text{ V} \\ \Leftrightarrow 3 \text{ V} &= -10 \text{ V} + \frac{R_1}{100 \text{ k}\Omega} 20 \text{ V} \\ \Leftrightarrow R_1 &= \frac{13}{20} 100 \text{ k}\Omega = 65 \text{ k}\Omega \end{aligned}$$

waaruit vanzelfsprekend ook $R_2 = 35 \text{ k}\Omega$ volgt.

Oplossing 7.2.6-2: Het onderstaande schema is dat van een niet-inverterende comparator met een potentiometrische deler die de referentiespanning maakt.



Als we de stroom door de potentiometrische deler beperkt willen houden, kiezen we bv. $R_1 + R_2 = 200 \text{ k}\Omega$.

De waarde van de individuele weerstanden kunnen we bepalen uit:

$$V_{ref} = V^- + \frac{R_1}{R_1 + R_2}(V^+ - V^-)$$

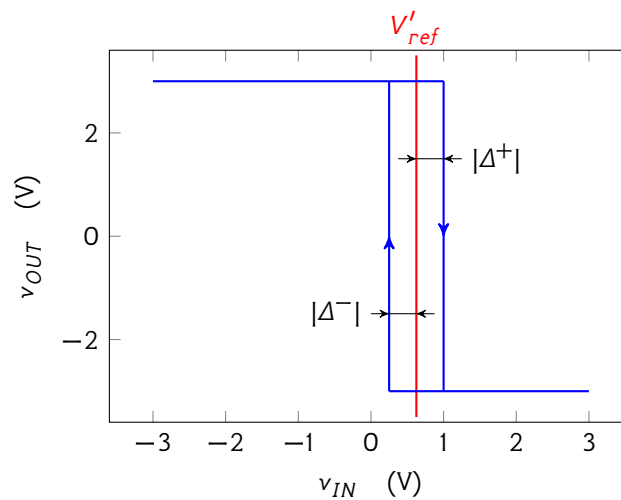
$$\Leftrightarrow V_{ref} = -5\text{ V} + \frac{R_1}{R_1 + R_2}10\text{ V}$$

$$\Leftrightarrow 2\text{ V} = -5\text{ V} + \frac{R_1}{100\text{ k}\Omega}10\text{ V}$$

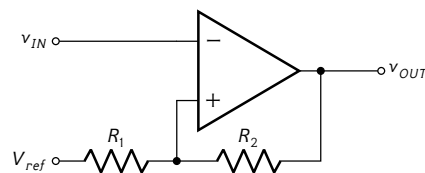
$$\Leftrightarrow R_1 = \frac{7}{10} 200\text{ k}\Omega = 140\text{ k}\Omega$$

waaruit vanzelfsprekend ook $R_2 = 60\text{ k}\Omega$ volgt.

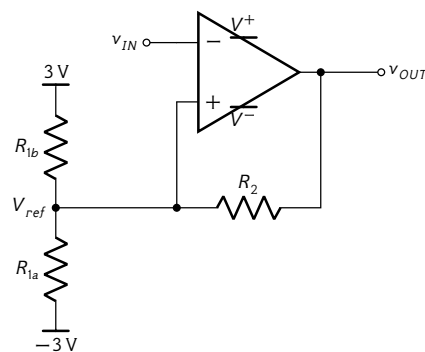
Oplossing 7.2.6-3: Dit is de ingangs-uitgangskarakteristiek van de Schmitt-trigger die we willen maken:



Het volgende schema implementeert een inverterende Schmitt trigger:



We vervangen zoals gevraagd de referentiespanningsbron V_{ref} en R_1 door een potentiometrische deler:



Op die manier wordt:

$$\begin{aligned} V_{ref} &= V^- + \frac{R_{1a}}{R_{1a} + R_{1b}}(V^+ - V^-) \\ &= -3\text{ V} + \frac{R_{1a}}{R_{1a} + R_{1b}}6\text{ V} \\ R_1 &= R_{1a} \parallel R_{1b} \end{aligned} \quad (7.1)$$

(je kan de potentiometrische deler vervangen door een Thévenin-equivalent en zo bekom je R_1 en V_{ref})

Uit het bestuderen van de inverterende Schmitt-trigger, weten we dat:

$$\begin{aligned} V_L &= \underbrace{\frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{ref}}_{\equiv V'_{ref}} + \underbrace{\frac{R_1}{R_1 + R_2} V^-}_{\equiv \Delta^+} \\ V_H &= \underbrace{\frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{ref}}_{\equiv V'_{ref}} + \underbrace{\frac{R_1}{R_1 + R_2} V^+}_{\equiv \Delta^-} \end{aligned}$$

Het zijn de verhoudingen van R_1 en R_2 t.o.v. hun som die de klapspanningen vastleggen. Laten we voor de eenvoud dus definiëren:

$$\alpha = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

waardoor ook:

$$1 - \alpha = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Dit laat toe om de oorspronkelijke vergelijkingen te herschrijven als:

$$\begin{aligned} V_L &= (1 - \alpha)V_{ref} + \alpha V^- \\ V_H &= (1 - \alpha)V_{ref} + \alpha V^+ \end{aligned}$$

Dit is een niet-lineair stelsel vergelijkingen in twee onbekenden (α en V_{ref}), dat we zullen oplossen door eerste V_{ref} te elimineren. We lossen hiervoor V_{ref} uit beide vergelijkingen op:

$$\begin{aligned} V_{ref} &= \frac{V_L - \alpha V^-}{1 - \alpha} \\ V_{ref} &= \frac{V_H - \alpha V^+}{1 - \alpha} \end{aligned} \quad (7.2)$$

We elimineren nu V_{ref} door beide vergelijkingen door elkaar te delen (waarbij we veronderstellen niet te delen door 0):

$$1 = \frac{V_L - \alpha V^-}{V_H - \alpha V^+}$$

Hieruit kunnen we vlot α oplossen:

$$\alpha = \frac{V_H - V_L}{V^+ - V^-} = \frac{1\text{ V} - 0.25\text{ V}}{3\text{ V} - (-3\text{ V})} = 0.125$$

en uit (7.2) weten we:

$$V_{ref} = \frac{1\text{ V} - 0.125 \cdot 3\text{ V}}{1 - 0.125} = 0.714\text{ V}$$

We weten nu:

$$\begin{aligned} R_1 &= \alpha(R_1 + R_2) \\ R_2 &= (1 - \alpha)(R_1 + R_2) \end{aligned}$$

Rest er ons nog een waarde te kiezen voor $R_1 + R_2$, bv 100 k Ω . We vinden dan:

$$\begin{aligned} R_1 &= 12.5\text{ k}\Omega \\ R_2 &= 87.5\text{ k}\Omega \end{aligned}$$

en gebruik makende van (7.1):

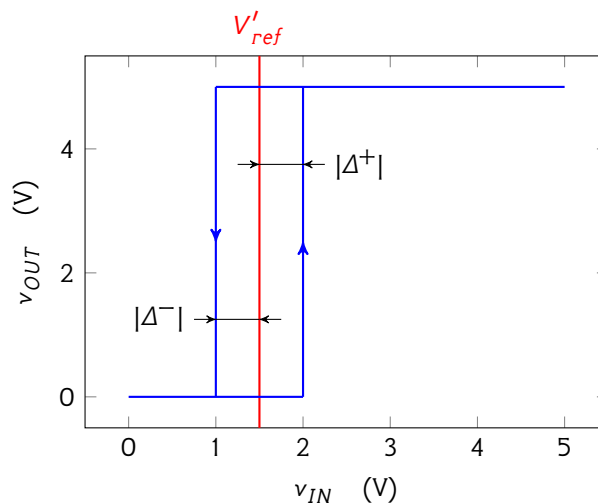
$$\begin{aligned}
 V_{ref} &= V^- + \frac{R_{1a}}{R_{1a} + R_{1b}}(V^+ - V^-) \\
 \Leftrightarrow \frac{R_{1a}}{R_{1a} + R_{1b}} &= \frac{V_{ref} - V^-}{V^+ - V^-} \\
 &= \frac{0.7143\text{ V} - (-3\text{ V})}{3\text{ V} - (-3\text{ V})} = 0.619
 \end{aligned}$$

En tot slot een trুকje:

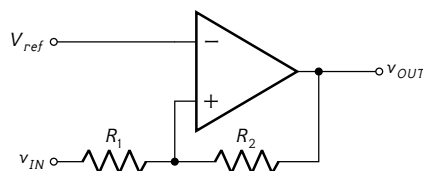
$$\begin{aligned}
 R_1 &= R_{1a} \parallel R_{1b} = \frac{R_{1a}R_{1b}}{R_{1a} + R_{1b}} = 0.619R_{1b} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} R_{1b} = \frac{R_1}{0.619} = \frac{12.5\text{ k}\Omega}{0.619} = 20.194\text{ k}\Omega \\ R_{1a} = \frac{R_1}{1 - 0.619} = \frac{12.5\text{ k}\Omega}{0.381} = 32.808\text{ k}\Omega \end{cases}
 \end{aligned}$$

Laat tot slot niet na om nogmaals te controleren dat $R_1 = R_{1a} \parallel R_{1b}$, en dat $V_{ref} = 0.7143\text{ V}$. Je maakt beter een gewoonte om nog eens te controleren of je resultaat wel klopt aan de hand van de eerdere analysevergelijkingen.

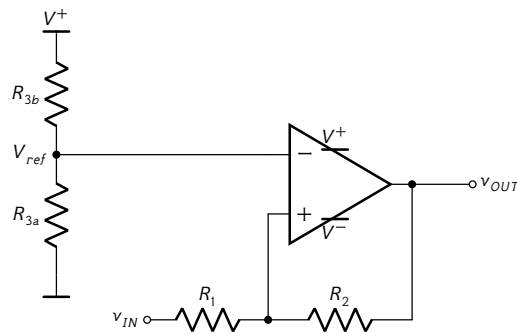
Oplossing 7.2.6-4: Dit is de ingangs-uitgangskarakteristiek van de Schmitt-trigger die we willen maken:



Het volgende schema implementeert een niet-inverterende Schmitt trigger:



We vervangen zoals gevraagd de referentiespanningsbron V_{ref} door een potentiometrische deler:



De ingangsimpedantie van de comparator is $R_1 + R_2$ (hierbij veronderstellen we dat de opamp in saturatie zit, d.w.z. dat zijn uitgang een vaste spanningsbron is, die we nul stellen bij het zoeken naar het Thévenin-equivalent). We weten dus:

$$R_1 + R_2 \geq 10 \text{ k}\Omega$$

We weten uit de analyse van de niet-inverterende Schmitt-trigger dat:

$$V_L = \underbrace{\left(\frac{R_1}{R_2} + 1\right) V_{ref}}_{\equiv V'_{ref}} + \underbrace{\left(-\frac{R_1}{R_2} V^+\right)}_{\equiv \Delta^-}$$

$$V_H = \underbrace{\left(\frac{R_1}{R_2} + 1\right) V_{ref}}_{\equiv V'_{ref}} + \underbrace{\left(-\frac{R_1}{R_2} V^-\right)}_{\equiv \Delta^+}$$

Het is de verhoudingen van R_1 over R_2 die de klapspanningen vastleggen. Laten we voor de eenvoud dus definiëren:

$$\alpha = \frac{R_1}{R_2}$$

Dit laat toe om de oorspronkelijke vergelijkingen te herschrijven als:

$$V_L = (\alpha + 1)V_{ref} - \alpha V^+$$

$$V_H = (\alpha + 1)V_{ref} - \alpha V^-$$

Dit is een niet-lineair stelsel in twee onbekenden, nl. α en V_{ref} . We lossen V_{ref} uit beide vergelijkingen op, zodat we die onbekende weer kunnen elimineren:

$$V_{ref} = \frac{V_L + \alpha V^+}{\alpha + 1}$$

$$V_{ref} = \frac{V_H + \alpha V^-}{\alpha + 1} \quad (7.3)$$

We delen weer beide vergelijkingen door elkaar:

$$1 = \frac{V_L + \alpha V^+}{V_H + \alpha V^-}$$

Hieruit lossen we α op:

$$\alpha = \frac{V_H - V_L}{V^+ - V^-} = \frac{2 \text{ V} - 1 \text{ V}}{5 \text{ V} - 0 \text{ V}} = 0.2$$

We kiezen nu $R_1 + R_2 = 10 \text{ k}\Omega$ zoals minimaal gevraagd. Dit in combinatie met $R_1 = \alpha R_2$ laat ons toe verder te gaan:

$$R_1 + R_2 = 10 \text{ k}\Omega$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + 1)R_2 = 10 \text{ k}\Omega$$

$$\Leftrightarrow R_2 = \frac{10 \text{ k}\Omega}{0.2 + 1} = 8.333 \text{ k}\Omega$$

Waardoor natuurlijk

$$\begin{cases} R_1 = \alpha R_2 = 1.667 \text{ k}\Omega \\ R_2 = 8.333 \text{ k}\Omega \end{cases}$$

Vervolgens halen we de referentiespanning uit (7.3):

$$V_{ref} = \frac{V_H + \alpha V^-}{\alpha + 1} = 2 \text{ V} + 0.20 \text{ V} \cdot 1.2 = 1.667 \text{ V}$$

Hieruit kunnen we onze potentiometrische deler berekenen. Als we voor de deler een totaalweerstand van $10 \text{ k}\Omega$ nemen, dan is het resultaat:

$$R_{3a} = 3.333 \text{ k}\Omega$$

$$R_{3b} = 6.667 \text{ k}\Omega$$

Laat alweer niet na om de klapspanningen en de referentiespanning nogmaals te berekenen aan de hand van de analysevergelijkingen. Je maakt beter een gewoonte om nog eens te controleren of je resultaat wel klopt aan de hand van de eerdere analysevergelijkingen.



Oplossing 8.3-1: De impedantie van een serie RC schakeling is de som van de impedanties:

$$Z = R + \frac{1}{sC}$$

Bijgevolg is de admittantie de reciproke ervan:

$$Y = \frac{1}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{sC}{1 + sRC}$$

Vervolgens stellen we $s = j\omega$:

$$Y(\omega) = \frac{j\omega C}{1 + j\omega RC}$$

Indien we als voorbeeld stellen dat $C = 1 \mu\text{F}$ en $R = 1 \text{ k}\Omega$, dan kan je a.d.h.v. het volgende Matlab/Octave-scriptje een Bode-diagram tekenen:

```
R = 1e3;
C = 1e-6;
w = logspace( 1, 6, 100 );
Y = j*w*C ./ (1+j*w*R*C);
figure(1);
subplot(2,1,1);
semilogx( w, 20*log10( abs( Y ) ) );
title( 'Admittantie Y van een serie RC-schakeling met R=1K en C=1u' );
xlabel( '\omega (rad/s)' );
ylabel( '|Y| (dB)' );
grid on;
subplot(2,1,2);
semilogx( w, angle( Y ) );
xlabel( '\omega (rad/s)' );
ylabel( 'arg Y (rad)' );
grid on;
```

Oplossing 8.3-2:

Serieschakeling De impedantie van een serie RL schakeling is de som van de impedanties:

$$Z_s = R + sL$$

Bijgevolg is de admittantie de reciproke ervan:

$$Y_s = \frac{1}{R + sL}$$

Vervolgens stellen we $s = j\omega$:

$$Y_s(\omega) = \frac{1}{R + sL}$$

Indien we als voorbeeld stellen dat $L = 1\text{mH}$ en $R = 1\text{k}\Omega$, dan kan je a.d.h.v. het volgende Matlab/Octave-scriptje een Bode-diagram tekenen:

```
R = 1e3;
L = 1e-3;
w = logspace( 3, 9, 100 );
Y = 1 ./ (R+j*w*L);
figure(1);
subplot(2,1,1);
semilogx( w, 20*log10( abs( Y ) ) );
title( 'Admittantie_Y_van_een_serie_RL-schakeling_met_R=1K_en_L=1m' );
xlabel( '\omega(rad/s)' );
ylabel( '|Y|(dB)' );
grid on;
subplot(2,1,2);
semilogx( w, angle( Y ) );
xlabel( '\omega(rad/s)' );
ylabel( 'arg_Y(rad)' );
grid on;
```

Parallelschakeling De admittantie van een parallel RL schakeling is de som van de admittanties:

$$Y_s = \frac{1}{R} + \frac{1}{sL} = \frac{sLR}{R + sL}$$

Vervolgens stellen we $s = j\omega$:

$$Y_s(\omega) = \frac{j\omega LR}{R + j\omega L}$$

Indien we als voorbeeld stellen dat $L = 1\text{mH}$ en $R = 1\text{k}\Omega$, dan kan je a.d.h.v. het volgende Matlab/Octave-scriptje een Bode-diagram tekenen:

```
R = 1e3;
L = 1e-3;
w = logspace( 3, 9, 100 );
Y = (j*w*L*R) ./ (R+j*w*L);
figure(1);
subplot(2,1,1);
semilogx( w, 20*log10( abs( Y ) ) );
title( 'Admittantie_Y_van_een_parallel_RL-schakeling_met_R=1K_en_L=1m' );
xlabel( '\omega(rad/s)' );
ylabel( '|Y|(dB)' );
grid on;
subplot(2,1,2);
semilogx( w, angle( Y ) );
xlabel( '\omega(rad/s)' );
ylabel( 'arg_Y(rad)' );
grid on;
```

Oplossing 8.3-3:

Serieschakeling De impedantie van een serie LC schakeling is de som van de impedanties:

$$Z_s = \frac{1}{sC} + sL$$

Bijgevolg is de admittantie de reciproke ervan:

$$Y_s = \frac{1}{\frac{1}{sC} + sL} = \frac{sC}{1 + s^2LC}$$

Vervolgens stellen we $s = j\omega$:

$$Y_s(\omega) = \frac{j\omega C}{1 + (j\omega)^2 LC} = \frac{j\omega C}{1 - \omega^2 LC}$$

Indien we als voorbeeld stellen dat $L = 1 \text{ mH}$ en $C = 1 \mu\text{F}$, dan kan je a.d.h.v. het volgende Matlab/Octave-scriptje een Bode-diagram tekenen:

```
C = 1e-6;
L = 1e-3;
w = logspace( 2, 7, 1000 );
Y = (j*w*C) ./ (1-w.^2*L*C);
figure(1);
subplot(2,1,1);
semilogx( w, 20*log10( abs( Y ) ) );
title( 'Admittantie Y van een serie LC-schakeling met C=1u en L=1m' );
xlabel( '\omega (rad/s)' );
ylabel( '|Y|(dB)' );
grid on;
subplot(2,1,2);
semilogx( w, angle( Y ) );
xlabel( '\omega (rad/s)' );
ylabel( 'arg Y (rad)' );
grid on;
```

Parallelschakeling De admittantie van een parallel LC schakeling is de som van de admittanties:

$$Y_s = sC + \frac{1}{sL} = \frac{1 + s^2 LC}{sL}$$

Vervolgens stellen we $s = j\omega$:

$$Y_s(\omega) = \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC}$$

Indien we als voorbeeld stellen dat $L = 1 \text{ mH}$ en $C = 1 \mu\text{F}$, dan kan je a.d.h.v. het volgende Matlab/Octave-scriptje een Bode-diagram tekenen:

```
C = 1e-6;
L = 1e-3;
w = logspace( 2, 7, 1000 );
Y = (j*w*L) ./ (1-w.^2*L*C);
figure(1);
subplot(2,1,1);
semilogx( w, 20*log10( abs( Y ) ) );
title( 'Admittantie Y van een parallel LC-schakeling met C=1u en L=1m' );
xlabel( '\omega (rad/s)' );
ylabel( '|Y|(dB)' );
grid on;
subplot(2,1,2);
semilogx( w, angle( Y ) );
xlabel( '\omega (rad/s)' );
ylabel( 'arg Y (rad)' );
grid on;
```

Oplossing 8.3-4:

Serieschakeling De impedantie van een serie RLC schakeling is de som van de impedanties:

$$Z_s = R + \frac{1}{sC} + sL$$

Bijgevolg is de admittantie de reciproke ervan:

$$Y_s = \frac{1}{R + \frac{1}{sC} + sL} = \frac{sC}{1 + sRC + s^2 LC}$$

Vervolgens stellen we $s = j\omega$:

$$Y_s(\omega) = \frac{j\omega C}{1 + j\omega RC + (j\omega)^2 LC} = \frac{j\omega C}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC}$$

Indien we als voorbeeld stellen dat $R = 1\text{ k}\Omega$, $L = 1\text{ mH}$ en $C = 1\text{ }\mu\text{F}$, dan kan je a.d.h.v. het volgende Matlab/Octave-scriptje een Bode-diagram tekenen:

```
R = 1e3;
L = 1e-3;
C = 1e-6;
w = logspace( 2, 7, 1000 );
Y = (j*w*C) ./ (1-w.^2*L*C+j*w*R*C);
figure(1);
subplot(2,1,1);
semilogx( w, 20*log10( abs( Y ) ) );
title( 'Admittantie Y van een serie LC-schakeling met R=1k, C=1u en L=1m' );
xlabel( '\omega (rad/s)' );
ylabel( '|Y|(dB)' );
grid on;
subplot(2,1,2);
semilogx( w, angle( Y ) );
xlabel( '\omega (rad/s)' );
ylabel( 'arg Y (rad)' );
grid on;
```

Parallelschakeling De admittantie van een parallel RLC schakeling is de som van de admittanties:

$$Y_s = \frac{1}{R} + sC + \frac{1}{sL} = \frac{R + sL + s^2 RLC}{sLR}$$

Vervolgens stellen we $s = j\omega$:

$$Y_s(\omega) = \frac{R - \omega^2 RLC + j\omega L}{j\omega LR}$$

Indien we als voorbeeld stellen dat $L = 1\text{ mH}$ en $C = 1\text{ }\mu\text{F}$, dan kan je a.d.h.v. het volgende Matlab/Octave-scriptje een Bode-diagram tekenen:

```
R = 1e3;
L = 1e-3;
C = 1e-6;
w = logspace( 2, 7, 1000 );
Y = (1-w.^2*L*C+j*w*L) ./ (j*w*L*R);
figure(1);
subplot(2,1,1);
semilogx( w, 20*log10( abs( Y ) ) );
title( 'Admittantie Y van een parallel RLC-schakeling met R=
1k, C=1u en L=1m' );
xlabel( '\omega (rad/s)' );
ylabel( '|Y|(dB)' );
grid on;
subplot(2,1,2);
semilogx( w, angle( Y ) );
xlabel( '\omega (rad/s)' );
ylabel( 'arg Y (rad)' );
grid on;
```

Oplossing 8.4-1: We volgen het volgende stappenplan:

1. Schrijf de functie in normaalvorm:

De transferfunctie staat al in genormaliseerde vorm. Die stap moeten we dus niet meer uitvoeren.

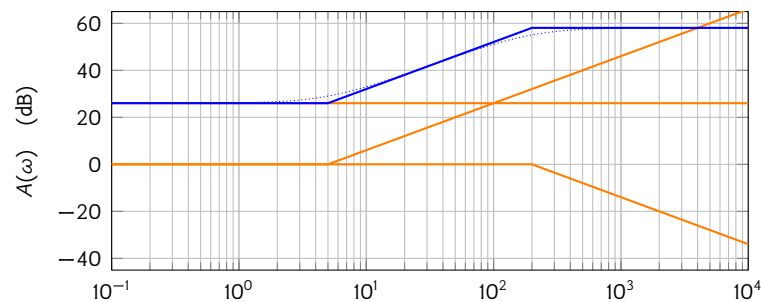
2. Bepaal de aparte factoren en hun kantelfrequenties:
We hebben drie factoren, met de bijhorende kantelfrequenties.

Factor	Kantelfrequenties
$K = 20$	-
$N_1 = 0.2s + 1$	$\frac{1}{ \tau } = \frac{1}{0.2} = 5 \text{ rad/s}$
$D_1 = 0.005s + 1$	$\frac{1}{ \tau } = \frac{1}{0.005} = 200 \text{ rad/s}$

3. Teken een leeg diagram: We zullen een magnitudegrafiek tekenen met een frequentiebereik van minstens één decade voor de laagste kantelfrequentie tot minsten één decade na de hoogste kantelfrequentie, bv. van $\omega = 0.1 \text{ rad/s}$ tot $\omega = 10\,000 \text{ rad/s}$.
4. Schets elke individuele bijdrage:

Factor	Magnitudegrafiek
$K = 20$	
$N_1 = 0.2s + 1$	
$D_1 = 0.005s + 1$	

5. Breng alle bijdragen over op de grafiek en tel ze allemaal op:
De bijdragen staan in oranje, de optelling ervan in blauw.



Oplossing 8.4-2: We volgen het volgende stappenplan:

1. Schrijf de functie in normaalvorm:

$$H(s) = \frac{100 \cdot (-100)}{1000} \frac{s \frac{s-100}{-100}}{\frac{s+1000}{1000}} = -10 \frac{s(-0.01s + 1)}{0.001s + 1}$$

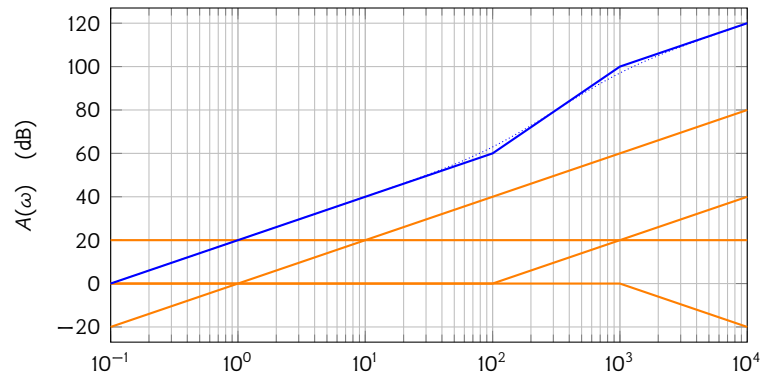
2. Bepaal de aparte factoren en hun kantelfrequenties:
We hebben drie factoren, met de bijhorende kantelfrequenties.

Factor	Kantelfrequenties
$K = -10$	-
$N_0 = s$	1 rad/s
$N_1 = -0.01s + 1$	$\frac{1}{ \tau } = \frac{1}{0.01} = 100 \text{ rad/s}$
$D_1 = 0.001s + 1$	$\frac{1}{ \tau } = \frac{1}{0.001} = 1000 \text{ rad/s}$

- Teken een leeg diagram: We zullen een magnitudegrafiek tekenen met een frequentiebereik van minstens één decade voor de laagste kantelfrequentie tot minsten één decade na de hoogste kantelfrequentie, bv. van $\omega = 0.1 \text{ rad/s}$ tot $\omega = 10\,000 \text{ rad/s}$.
- Schets elke individuele bijdrage:

Factor	Magnitudegrafiek
$K = -10$	
$N_0 = s$	
$N_1 = -0.01s + 1$	
$D_1 = 0.001s + 1$	

- Breng alle bijdragen over op de grafiek en tel ze allemaal op:
De bijdragen staan in oranje, de optelling ervan in blauw.



Oplossing 8.4-3: We volgen het volgende stappenplan:

- Schrijf de functie in normaalvorm:

$$H(s) = 0.1 \cdot 100 \frac{s+100}{100} \frac{1}{\frac{s^2+10s+64}{64}} = 10(0.01s+1) \frac{1}{\frac{s^2+10s+64}{64}}$$

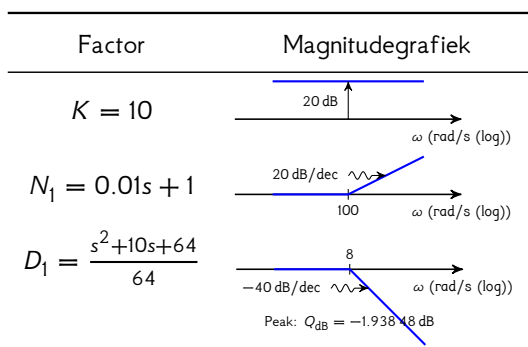
We controleerden hierbij ook dat de tweedegraadsfactor niet verder kan ontbonden worden (de discriminant is immers negatief).

- Bepaal de aparte factoren en hun kantelfrequenties:
We hebben drie factoren, met de bijhorende parameters

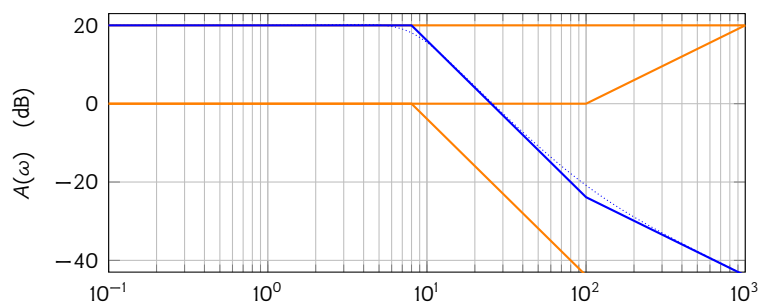
Factor	Parameters
$K = 10$	-
$N_1 = 0.01s + 1$	$\frac{1}{ T_1 } = \frac{1}{0.01} = 100 \text{ rad/s}$
$D_1 = \frac{s^2+10s+64}{64}$	$\omega_n = 8 \text{ rad/s}$, $\zeta = \frac{5}{8}$ en $Q = \frac{1}{2\zeta} = \frac{4}{5}$

- Teken een leeg diagram: We zullen een magnitudegrafiek tekenen met een frequentiebereik van minstens één decade voor de laagste kantelfrequentie tot minsten één decade na de hoogste kantelfrequentie, bv. van $\omega = 0.1 \text{ rad/s}$ tot $\omega = 1000 \text{ rad/s}$.

4. Schets elke individuele bijdrage:



5. Breng alle bijdragen over op de grafiek en tel ze allemaal op:
De bijdragen staan in oranje, de optelling ervan in blauw.



Oplossing 8.4-4: We volgen het volgende stappenplan:

1. Schrijf de functie in normaalvorm:

$$H(s) = \frac{0.1 \cdot (-10)}{81} \frac{\frac{s-10}{-10}}{s} \frac{81}{s^2 + 4s + 81} = \frac{-1}{81} \frac{-0.1s + 1}{s} \frac{81}{s^2 + 4s + 81}$$

We controleerden hierbij ook dat de tweedegraadsfactor niet verder kan ontbonden worden (de discriminant is immers negatief).

2. Bepaal de aparte factoren en hun kantelfrequenties:

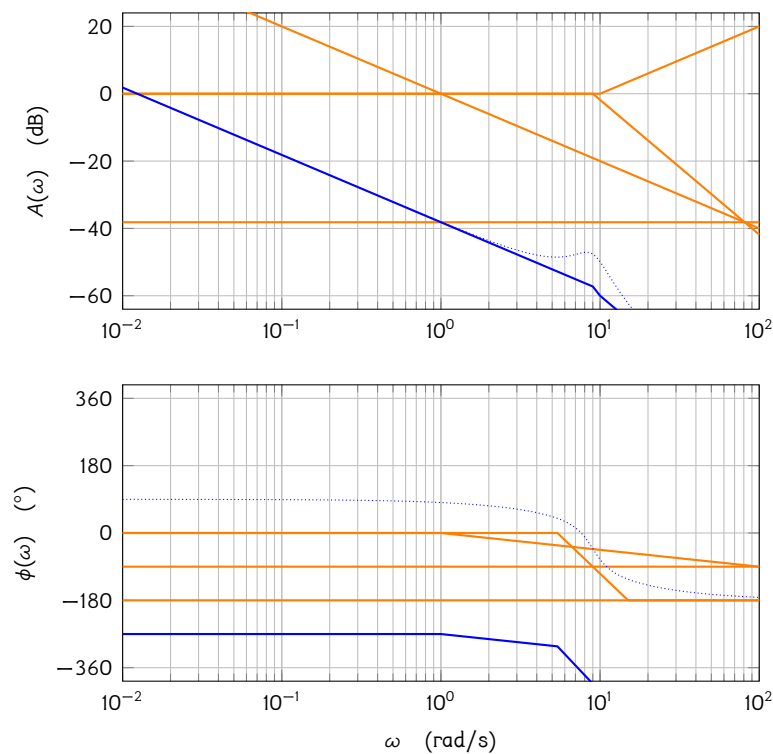
We hebben vier factoren, met de bijhorende parameters

Factor	Parameters
$K = -1/81$	-
$1/s$	-
$N_1 = -0.1s + 1$	$\frac{1}{ T } = \frac{1}{0.1} = 10 \text{ rad/s}$
$D_1 = \frac{s^2+4s+81}{81}$	$\omega_n = 9 \text{ rad/s}$, $\zeta = \frac{2}{9}$ en $Q = \frac{1}{2\zeta} = \frac{9}{4}$

3. Teken een leeg diagram: We zullen een magnitudegrafiek tekenen met een frequentiebereik van minstens één decade voor de laagste kantelfrequentie tot minstens één decade na de hoogste kantelfrequentie, bv. van $\omega = 0.01 \text{ rad/s}$ tot $\omega = 100 \text{ rad/s}$.
4. Schets elke individuele bijdrage:

Factor	Magnitudegrafiek
$K = -1/81$	
$1/s$	
$N_1 = -0.1s + 1$	
$D_1 = \frac{s^2 + 2s + 81}{81}$	

5. Breng alle bijdragen over op de grafiek en tel ze allemaal op:
De bijdragen staan in oranje, de optelling ervan in blauw.



Oplossing 8.4-5: We volgen het volgende stappenplan:

- Schrijf de functie in normaalvorm:

We stellen eerst vast dat de tweedegraadsfactor nog verder kan ontbonden worden (de discriminant is immers positief). Dus:

$$\begin{aligned}
 H(s) &= 40 \frac{s}{s+10} \frac{1}{(s+3)(s+17)} \\
 &= \frac{40}{10 \cdot 3 \cdot 17} \frac{s}{\frac{s+10}{10} \frac{s+3}{3} \frac{s+17}{17}} = 0.078431 \frac{s}{0.1s+1} \frac{1}{(0.33333s+1)(0.057724s+1)}
 \end{aligned}$$

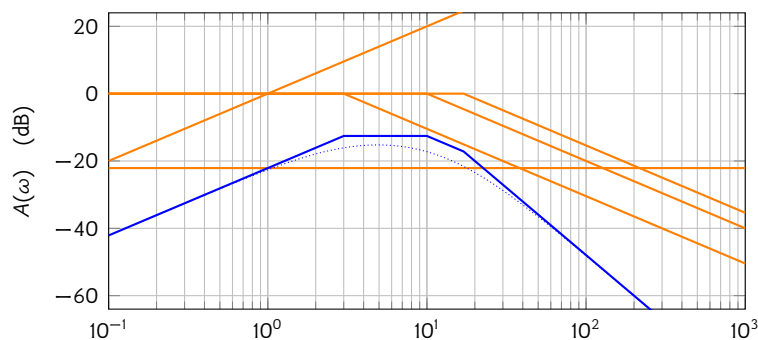
- Bepaal de aparte factoren en hun kantelfrequenties:
We hebben drie factoren, met de bijhorende parameters

Factor	Parameters
$K = 0.078431$	-
$N_1 = s$	$\omega = 1 \text{ rad/s}$
$D_1 = 0.1s + 1$	$\frac{1}{ \tau } = \frac{1}{0.1} = 10 \text{ rad/s}$
$D_2 = 0.33333s + 1$	$\frac{1}{ \tau } = \frac{1}{0.33333} = 3 \text{ rad/s}$
$D_3 = 0.057724s + 1$	$\frac{1}{ \tau } = \frac{1}{0.057724} = 17 \text{ rad/s}$

- Teken een leeg diagram: We zullen een magnitudegrafiek tekenen met een frequentiebereik van minstens één decade voor de laagste kantelfrequentie tot minsten één decade na de hoogste kantelfrequentie, bv. van $\omega = 0.1 \text{ rad/s}$ tot $\omega = 1000 \text{ rad/s}$.
- Schets elke individuele bijdrage:

Factor	Magnitudegrafiek
$K = 0.078431$	
$N_1 = s$	
$D_1 = 0.1s + 1$	
$D_2 = 0.33333s + 1$	
$D_3 = 0.057724s + 1$	

- Breng alle bijdragen over op de grafiek en tel ze allemaal op: De bijdragen staan in oranje, de optelling ervan in blauw.



Oplossing 8.4-6: Het startpunt is de frequentietransferfunctie (m.a.w. de transferfunctie die in de opgave genoteerd is met $s = j\omega$):

$$H(j\omega) = A \frac{j\omega_n \omega}{\omega_n^2 - \omega^2 + j \frac{\omega_n}{Q} \omega}$$

$$\Leftrightarrow |H(j\omega)| = |A| \frac{\omega_n \omega}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega_n}{Q} \omega\right)^2}}$$

We zagen eerder dat we volgende benaderingen kunnen maken:

- $\omega \ll \omega_n$: $|H(j\omega)| = |A| \frac{\omega_n \omega}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega_n}{Q} \omega\right)^2}} \approx |A| \frac{\omega_n \omega}{\omega_n^2} = |A| \frac{\omega}{\omega_n} \equiv |H_l(j\omega)|$
- $\omega \gg \omega_n$: $|H(j\omega)| = |A| \frac{\omega_n \omega}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega_n}{Q} \omega\right)^2}} \approx |A| \frac{\omega_n \omega}{\omega^2} = |A| \frac{\omega_n}{\omega} \equiv |H_h(j\omega)|$

Op een logaritmische frequentie- en magnitude-schaal vormen beide grafieken een lijn, waarvan het snijpunt eenvoudig kunnen berekenen als:

$$\begin{aligned} |H_l(j\omega)| &= |H_h(j\omega)| \\ \Leftrightarrow |A| \frac{\omega}{\omega_n} &= |A| \frac{\omega_n}{\omega} \\ \Leftrightarrow \omega &= \omega_n \end{aligned}$$

De magnitude waarbij we de snijding optreedt, kunnen we gemakkelijk berekenen door de gevonden snijfrequentie ($\omega = \omega_n$) in te vullen in de benaderende uitdrukkingen. Dit levert op:

$$|H_l(j\omega_n)| = |H_h(j\omega_n)| = |A|$$

Oplossing 8.4-7:

$$\begin{aligned} H(s) &= A \frac{\omega_n^2 s}{s^2 + \frac{\omega_n}{Q} s + \omega_n^2} \\ \Leftrightarrow H(j\omega_n) &= A \frac{j\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega_n^2 + j\frac{\omega_n^2}{Q}} = A \cdot Q \\ \Leftrightarrow |H(j\omega_n)| &= |A| \cdot |Q| \end{aligned}$$

Oplossing 8.4-8: We starten zoals gesuggereerd:

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega_n \omega}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega_n}{Q} \omega\right)^2}} = \frac{|A| \cdot |Q|}{\sqrt{2}}$$

Indien we uit deze vergelijking ω oplossen dan zouden we twee frequenties moeten bekomen: de onderste en de bovenste kantelfrequentie waarbij de verzwakking 3 dB bedraagt.

We kwadrateren beide leden en herschikken:

$$\begin{aligned} \omega^4 - 2\omega_n^2 \omega^2 + \omega_n^2 + \frac{\omega_n^2}{Q^2} \omega^2 &= \frac{2\omega_n^2 \omega^2}{Q^2} \\ \Leftrightarrow \omega^4 - \left(2\omega_n^2 + \frac{\omega_n^2}{Q^2}\right) \omega^2 + \omega_n^4 &= 0 \\ \downarrow \text{Beide leden delen door } \omega_n^4 & \\ \Leftrightarrow \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^4 - \left(2 + \frac{1}{Q^2}\right) \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Dit is een kwadratische vergelijking in $(\omega/\omega_n)^2$ die we kunnen oplossen:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 &= \frac{2 + \frac{1}{Q^2} \pm \sqrt{\left(2 + \frac{1}{Q^2}\right)^2 - 4}}{2} \\ &= \frac{2 + \frac{1}{Q^2} \pm \sqrt{\frac{4}{Q^2} + \frac{1}{Q^4}}}{2} \\ &= \frac{2 + \frac{1}{Q^2} \pm \frac{2}{Q} \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}}{2} \end{aligned}$$

Waar we in de laatste stap een term verwaarlozen. Bijgevolg:

$$\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \approx 1 + \frac{1}{2Q^2} \pm \frac{1}{Q}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\omega}{\omega_n} \approx \sqrt{1 + \frac{1}{2Q^2} \pm \frac{1}{Q}}$$

Indien x klein is, dan weten we dat $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2}$, bijgevolg:

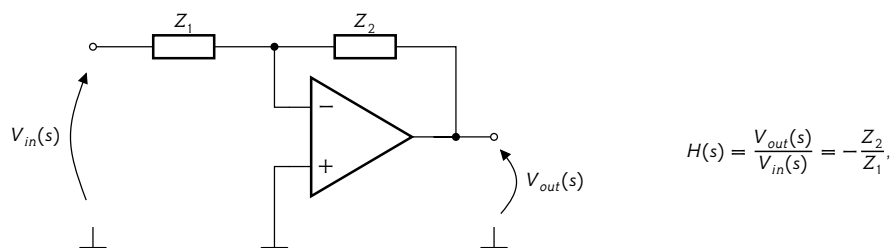
$$\frac{\omega}{\omega_n} \approx 1 + \frac{1}{4Q^2} \pm \frac{1}{2Q}$$

$$\Leftrightarrow \omega \approx \omega_n \left(1 + \frac{1}{4Q^2} \pm \frac{1}{2Q}\right)$$

Het plusteken geeft ons de bovenste -3 dB frequentie (ω_u) en het minteken de onderste (ω_l). Hierdoor wordt de bandbreedte:

$$\omega_u - \omega_l = \omega_n \left(\frac{1}{2Q} + \frac{1}{2Q}\right) = \frac{\omega_n}{Q}$$

Oplossing 8.7.5-1: Hieronder de inverterende versterker voorzien van complexe impedanties met bijhorende transferfunctie:



Serieschakeling van impedanties We proberen de opgegeven transferfunctie om te vormen naar deze versterkingsformule.

$$H(s) = -10 \cdot \frac{s + 10000}{s + 63000} = -\frac{10s + 100000}{s + 63000}$$

We matchen nu de twee uitdrukkingen:

$$Z_1 = \underbrace{s}_{L_1=1\text{H}} + \underbrace{63000}_{R_1=63\text{k}\Omega}$$

$$Z_2 = \underbrace{10s}_{L_2=10\text{H}} + \underbrace{100000}_{R_2=100\text{k}\Omega}$$

We kunnen beide realiseren als een serieschakeling van de vermelde impedanties.

Om de spoelen kleiner dan 1mF te krijgen, delen we de impedanties (=impedantieschaling) door $K = 10\,000$, wat leidt tot:

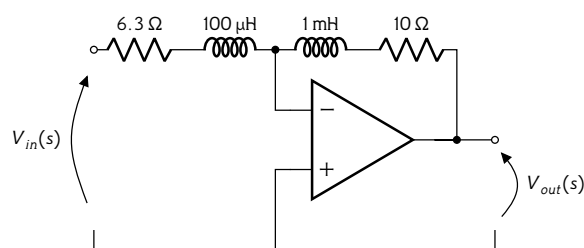
$$L'_1 = \frac{L_1}{10\,000} = 0.1\text{mH}$$

$$R'_1 = \frac{R_1}{10\,000} = 6.3\ \Omega$$

$$L'_2 = \frac{L_2}{10\,000} = 1\text{mH}$$

$$R'_2 = \frac{R_2}{10\,000} = 10\ \Omega$$

We krijgen op deze manier de volgende schakeling:



Parallelschakeling van impedanties We moeten nu de opgegeven filterkarakteristiek omvormen naar een parallelschakeling. De impedanties omzetten naar admittanties is hierbij de truc:

$$H(s) = -\frac{\frac{1}{Y_2}}{\frac{1}{Y_1}} = -\frac{Y_1}{Y_2}$$

We matchen dit alweer met de opgegeven filterkarakteristiek:

$$H(s) = -\frac{\overbrace{10s + 100000}^{Y_1}}{\underbrace{s + 63000}_{Y_2}}$$

wat leidt tot

$$Y_1 = \underbrace{10s}_{C_1=10\text{ F}} + \underbrace{100000}_{G_1=100\text{ kS}} \qquad Y_2 = \underbrace{s}_{C_2=1\text{ F}} + \underbrace{63000}_{G_2=63\text{ kS}}$$

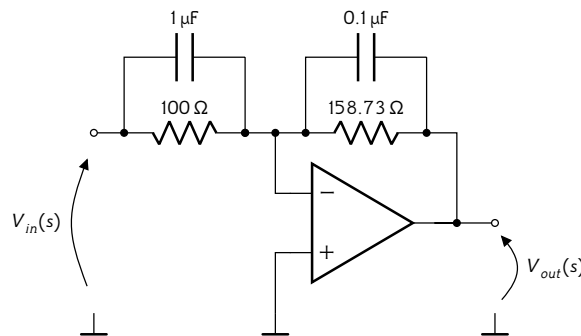
We kunnen beide realiseren als een parallelschakeling van de vermelde admittanties.

Om de condensatoren kleiner dan $1\ \mu\text{F}$ te krijgen, delen we de admittanties door een factor $K = 10 \times 10^6$, wat leidt tot:

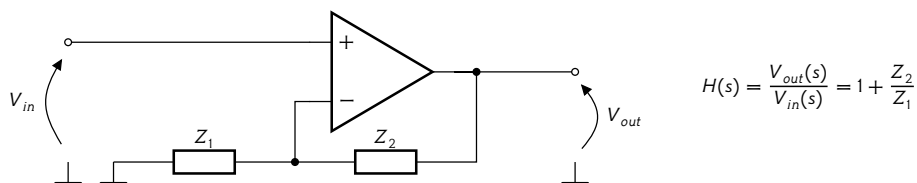
$$C'_1 = \frac{C_1}{10 \times 10^6} = 1\ \mu\text{F} \qquad G'_1 = \frac{G_1}{10 \times 10^6} = 10\ \text{mS}$$

$$C'_2 = \frac{C_2}{10 \times 10^6} = 0.1\ \mu\text{F} \qquad G'_2 = \frac{G_2}{10 \times 10^6} = 6.3\ \text{mS}$$

We krijgen op deze manier de volgende schakeling:



Oplossing 8.7.5-2: Hieronder de niet-inverterende versterker voorzien van complexe impedanties met bijhorende transferfunctie:



Serieschakeling van impedanties We werken de opgegeven transferfunctie om naar deze vorm:

$$H(s) = 50 \cdot \frac{s + 630000}{s + 10000} = 50 \left(1 + \frac{620000}{s + 10000} \right)$$

Waaruit we afleiden dat:

$$Z_2 = \underbrace{620000}_{R_2=620\text{ k}\Omega} \qquad Z_1 = \underbrace{s}_{L_1=1\text{ H}} + \underbrace{10000}_{R_1=10\text{ k}\Omega}$$

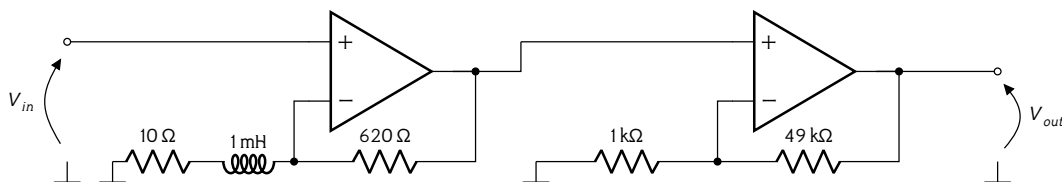
We delen de impedanties door $K = 1000$ en krijgen zo:

$$L'_1 = \frac{L_1}{1000} = 1 \text{ mH}$$

$$R'_1 = \frac{R_1}{1000} = 10 \text{ } \Omega$$

$$R'_2 = \frac{R_2}{1000} = 620 \text{ } \Omega$$

Dit levert (samen met een niet-inverterende versterker met een factor 50), de volgende schakeling op:



Parallelschakeling van impedanties We moeten nu de opgegeven filterkarakteristiek omvormen naar een parallelschakeling. De impedanties omzetten naar admittanties is hierbij de truc:

$$H(s) = 1 + \frac{Z_2}{Z_1} = 1 + \frac{Y_1}{Y_2}$$

We matchen dit alweer met de opgegeven filterkarakteristiek:

$$H(s) = 50 \left(1 + \frac{Y_1}{\underbrace{\frac{620\,000}{s + 10\,000}}_{Y_2}} \right)$$

wat leidt tot parallelschakelingen van admittanties:

$$Y_1 = \frac{620\,000}{G_1 = 620 \text{ kS}}$$

$$Y_2 = \underbrace{s}_{C_2 = 1 \text{ F}} + \underbrace{\frac{10\,000}{G_2 = 10 \text{ kS}}}$$

We kunnen de tweede realiseren als een parallelschakeling van de vermelde admittanties.

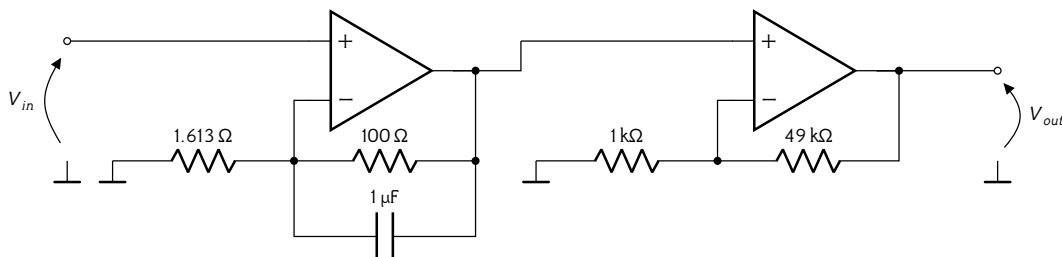
Om de condensator kleiner dan $1 \mu\text{F}$ te krijgen, delen we de admittanties door een factor $K = 1 \times 10^6$, wat leidt tot:

$$G'_1 = \frac{G_1}{1 \times 10^6} = 620 \text{ mS}$$

$$C'_2 = \frac{C_2}{1 \times 10^6} = 1 \mu\text{F}$$

$$G'_2 = \frac{G_2}{1 \times 10^6} = 10 \text{ mS}$$

Dit levert (samen met een niet-inverterende versterker met een factor 50), de volgende schakeling op:



Oscillatoren

Oplossing 10.2-1: Indien je met transformatoren rekest, loont het om systematisch hetzelfde referentiestelsel te gebruiken: ofwel werk je met RMS-waarden ofwel werk je met amplitudes. Om dit te illustreren doen we beide:

Met RMS-waarden We weten dat

$$V_{out} = \frac{N_2}{N_1} V_{in} = 24 \text{ V}_{\text{RMS}}$$

Bijgevolg loopt er door de secundaire een stroom gelijk aan

$$I_{out} = -\frac{24 \text{ V}_{\text{RMS}}}{200 \Omega} = -120 \text{ mV}_{\text{RMS}}$$

De stroom aan de primaire wordt hierdoor

$$I_{in} = -\frac{N_2}{N_1} \cdot I_{out} = 12 \text{ mV}_{\text{RMS}}$$

Met amplitudes We gebruiken dezelfde (!) symbolen, maar weten nu dat:

$$V_{in} = \sqrt{2} \cdot 240 \text{ V} = 339.41 \text{ V (amplitude!)}$$

Aan de secundaire levert dit een spanningsamplitude op gelijk aan

$$V_{out} = 33.941 \text{ V}$$

Hierdoor gaat door de secundaire een stroom vloeien gelijk aan

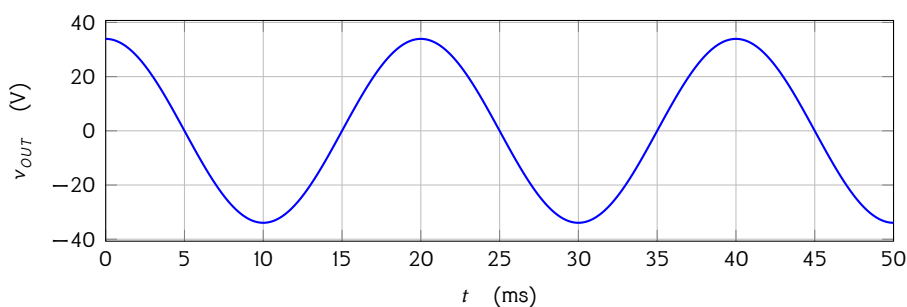
$$I_{out} = -V_{out}/R = -169.7 \text{ mA}$$

Deze stroom wordt naar de primaire getransformeerd als

$$I_{in} = -\frac{N_2}{N_1} I_{out} = 16.97 \text{ mA (amplitude!)}$$

Dit komt overeen met een RMS stroom die $\sqrt{2}$ keer kleiner is, nl. $12 \text{ mV}_{\text{RMS}}$.

De golfvorm aan de secundaire is een sinusgolf met amplitude 33.941 V en een periode van 20 ms .



Oplossing 10.2-2: De windingsverhouding en α , laten ons toe de spanningen aan de secundaire te bepalen. We werken systematisch in RMS grootheden.

$$V_{outA} = (1 - \alpha) \frac{N_2}{N_1} V_{in} = 0.4 \cdot \frac{1}{10} \cdot 230 \text{ V}_{\text{RMS}} = 9.2 \text{ V}_{\text{RMS}}$$

$$V_{outB} = \alpha \frac{N_2}{N_1} V_{in} = 0.6 \cdot \frac{1}{10} \cdot 230 \text{ V}_{\text{RMS}} = 13.8 \text{ V}_{\text{RMS}}$$

Dit leidt tot de volgende stromen:

$$I_{outA} = -\frac{V_{outA}}{R_A} = -115 \text{ mA}_{\text{RMS}}$$

$$I_{outB} = \frac{V_{outB}}{R_B} = 276 \text{ mA}_{\text{RMS}}$$

Wat in de primaire leidt tot een totaalstroom:

$$\begin{aligned} I_{in} &= -(1 - \alpha) \frac{N_2}{N_1} I_{outA} + \alpha \frac{N_2}{N_1} I_{outB} \\ &= -0.4 \cdot \frac{1}{10} \cdot (-115 \text{ mA}_{\text{RMS}}) + 0.6 \cdot \frac{1}{10} \cdot 276 \text{ mA}_{\text{RMS}} \\ &= 21.16 \text{ mA}_{\text{RMS}} \end{aligned}$$

Merk op dat de vermogenbalans klopt. De bron genereert:

$$P_{in} = I_{in} \cdot V_{in} = 21.16 \text{ mA}_{\text{RMS}} \cdot 230 \text{ V}_{\text{RMS}} = 4.867 \text{ W}$$

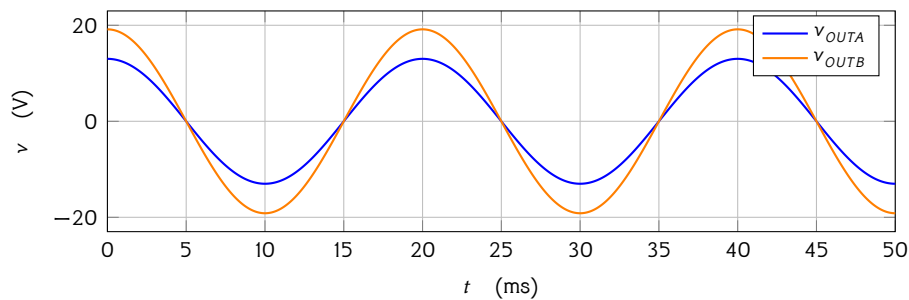
De weerstanden verbruiken:

$$P_{outA} = -I_{outA} V_{outA} = 115 \text{ mA}_{\text{RMS}} \cdot 9.2 \text{ V}_{\text{RMS}} = 1.058 \text{ W}$$

$$P_{outB} = I_{outB} V_{outB} = 276 \text{ mA}_{\text{RMS}} \cdot 13.8 \text{ V}_{\text{RMS}} = 3.809 \text{ W}$$

De som van de verbruikte vermogens is gelijk aan het bronvermogen.

De golfvormen van v_{OUTA} en v_{OUTB} aan de secundaire zijn sinusgolven met een periode van 20 ms en respectieve amplitudes gelijk aan 13.011 V en 19.156 V.



Oplossing 10.3.2-1: De cosinus kan geschreven worden als:

$$f(t) = V_{IN} \cos(\omega_0 t)$$

De exponentiële start bij $t = t_0$ en heeft dan als golfvorm:

$$g(t) = f(t_0) e^{-\frac{t-t_0}{RC}} = V_{IN} \cos(\omega_0 t_0) e^{-\frac{t-t_0}{RC}}$$

We kunnen de afgeleiden van beide functies berekenen:

$$f'(t) = -V_{IN} \omega_0 \sin(\omega_0 t)$$

$$g'(t) = -\frac{1}{RC} V_{IN} \cos(\omega_0 t_0) e^{-\frac{t-t_0}{RC}}$$

We stellen nu beide afgeleiden gelijk voor $t = t_0$:

$$\begin{aligned} f'(t_0) &= g'(t_0) \\ -V_{IN}\omega_0 \sin(\omega_0 t_0) &= -\frac{1}{RC}V_{IN} \cos(\omega_0 t_0) \\ \tan(\omega_0 t_0) &= \frac{1}{RC\omega_0} \\ t_0 &= \frac{1}{\omega_0} \operatorname{atan} \frac{1}{RC\omega_0} \end{aligned}$$

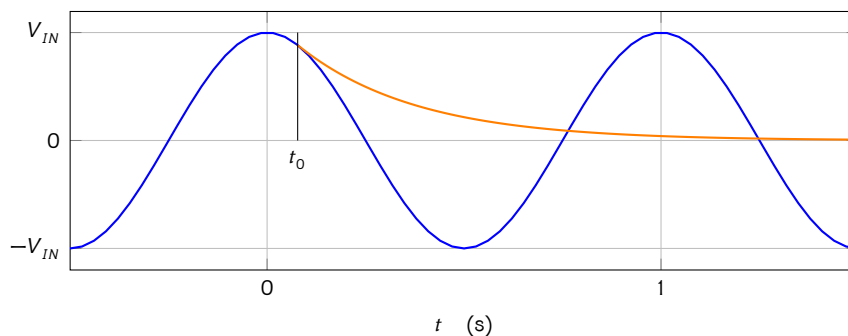
Oplossing 10.3.2-2: We berekenen eerst de hoekfrequentie

$$\omega_0 = 2\pi f = 2\pi \text{Hz}$$

Met deze hoekfrequentie kunnen we t_0 berekenen:

$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{1}{\omega_0} \operatorname{atan} \frac{1}{RC\omega_0} \\ &= \frac{1}{2\pi} \operatorname{atan} \frac{1}{0.3 \cdot 2\pi} = 77.620 \text{ ms} \end{aligned}$$

Hieronder de gevraagde tekening:



Oplossing 10.3.2-3: We weten dat:

$$\delta < \frac{5}{5\tau f + 4} \text{ (voor } 0.3 \leq \tau f \text{)}$$

Wetende dat $\tau = RC$, kunnen we eerst de voorwaarde controleren:

$$\begin{aligned} \tau f &= RCf = 1 \text{ k}\Omega \cdot 47 \text{ }\mu\text{F} \cdot 50 \text{ Hz} \\ &= 2.35 > 0.3 \end{aligned}$$

Bijgevolg kunnen we de benadering gebruiken:

$$\delta < \frac{5}{5 \cdot 2.35 + 4} = 31\%$$

wat een vrij aanzienlijke rimpel is!

Oplossing 10.3.2-4: We weten dat:

$$\delta < \begin{cases} \frac{5}{11\tau f + 5} & \text{(voor } 0.3 \leq \tau f \leq 3 \text{)} \\ \frac{5}{10\tau + 8} & \text{(voor } 3 \leq \tau f \text{)} \end{cases}$$

Wetende dat $\tau = RC$, kunnen we eerst de voorwaarde controleren:

$$\begin{aligned}\tau f &= RCf = 2.2 \text{ k}\Omega \cdot 6.8 \text{ }\mu\text{F} \cdot 50 \text{ Hz} \\ &= 0.748\end{aligned}$$

Bijgevolg kunnen we de bovenste formule gebruiken:

$$\delta < \frac{5}{11 \cdot 0.748 + 5} = 38\%$$

wat een vrij aanzienlijke rimpel is!

Oplossing 10.3.2-5: Aangezien de rimpel die we zoeken kleiner is dan 12.5%, gebruiken we als benaderende vergelijking:

$$\delta < \frac{5}{10 \tau f + 8}$$

We zoeken een condensator zodat $\delta < \delta_{\max} = 0.02$, wat we kunnen garanderen door te stellen:

$$\frac{5}{10 \tau f + 8} < \delta_{\max}$$

Wetende dat $\tau = RC$ kunnen we hieruit een ondergrens voor C oplossen:

$$\begin{aligned}\frac{5}{10 RCf + 8} &< \delta_{\max} \\ \frac{10 RCf + 8}{5} &> \frac{1}{\delta_{\max}} \\ 10 RCf &> \frac{5}{\delta_{\max}} - 8 \\ C &> \frac{1}{Rf} \left(\frac{1}{2\delta_{\max}} - 0.8 \right) \\ &> 43.214 \text{ }\mu\text{F}\end{aligned}$$

Oplossing 10.3.2-6: We rekenen eerst het vollast-stroomverbruik naar een equivalente weerstand. Indien we veronderstellen dat hierbij de rimpel verwaarloosbaar klein is, kunnen we stellen dat:

$$R = \frac{5 \text{ V}}{100 \text{ mA}} = 50 \text{ }\Omega$$

We willen een rimpel kleiner dan $\delta_{\max} = 1\%$ en hebben daartoe een gepaste bovenschatter:

$$\delta < \frac{5}{5 \tau f + 4}$$

Op basis hiervan kunnen we stellen:

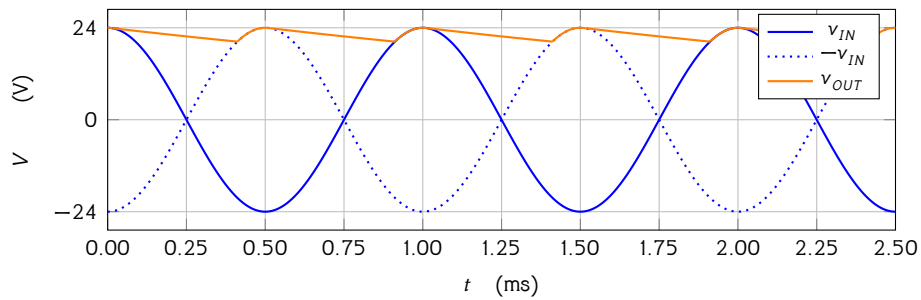
$$\frac{5}{5 \tau f + 4} < \delta_{\max}$$

Wetende dat $\tau = RC$ kunnen we een minimale waarde voor de condensator afleiden:

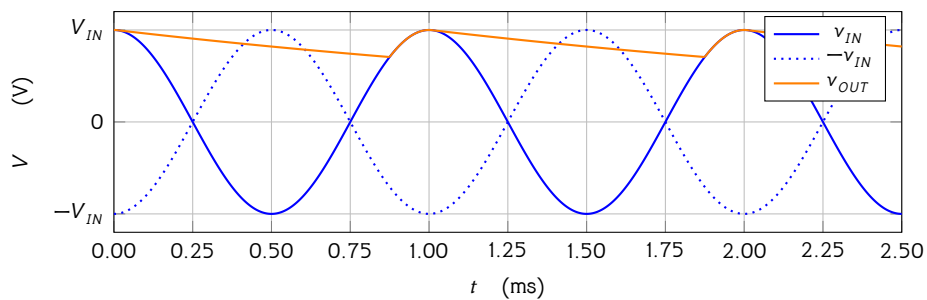
$$\begin{aligned}\frac{5}{5 RCf + 4} &< \delta_{\max} \\ C &> \frac{1}{Rf} \left(\frac{1}{\delta_{\max}} - 0.8 \right) \\ &> 19.84 \text{ mF}\end{aligned}$$

We zullen in volgend boekdeel zien dat dit een joekel van een condensator is. We investeren dan ook beter in een dubbelzijdige gelijkrichter die de benodigde condensator in omvang kan halveren.

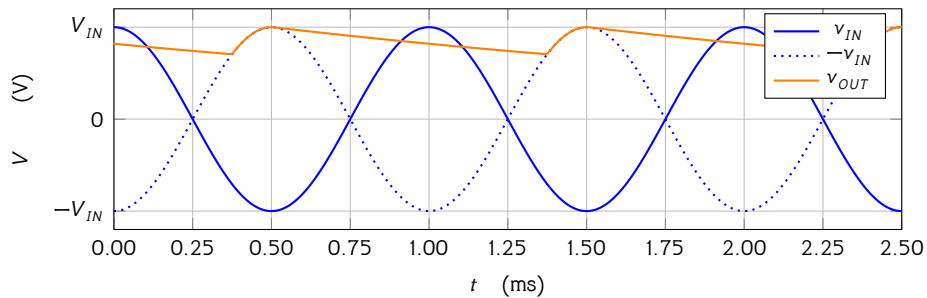
Oplossing 10.3.2-7: We schetsen de ingangsspanning, haar tegengestelde en de gelijkgerichte spanning:



Indien D_1 een open keten is, kan tijdens de negatieve alternatie van de ingangsspanning de condensator niet bijgeladen worden, waardoor de schakeling zich gedraagt als een enkelzijdige gelijkrichter:



Indien D_3 een open keten is, dan kan de positieve alternatie van de ingangsspanning de condensator niet bijladen, waardoor we opnieuw een enkelzijdige gelijkrichter krijgen:



Oplossing 10.4.2-1: We beantwoorden de vragen één per één:

1. De opamp staat in negatieve feedbackconfiguratie en zal daardoor een equipotential regelen tussen zijn ingangsklemmen. Bijgevolg:

$$V_Z = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_o$$

$$\Leftrightarrow V_o = \frac{R_1 + R_2}{R_1} V_Z = 11.1 \text{ V}$$

2. Gezien de uitgangsspanning die we hierboven berekend hebben, wordt

$$I_o = \frac{V_o}{R} = 11.1 \text{ mA}$$

waardoor

$$P_o = V_o I_o = 123.21 \text{ mW}$$

3. Er zijn drie verbruikers in de convertor:
1. de opamp
 2. de meetweerstand R_1 en R_2
 3. de combinatie van R_3 en de zenerdiode

De opamp moet een stroom leveren gelijk aan:

$$I_{OA} = I_O + \frac{V_o}{R_1 + R_2} = 11.4 \text{ mA}$$

De opamp moet die stroom leveren en daarbij een potentiaaldaling van $V_i - V_o$ realiseren. Dit komt overeen met een vermogenverbruik gelijk aan:

$$P_{OA} = I_{OA}(V_i - V_o) = 147.06 \text{ mW}$$

De stroom door de meetweerstand bedraagt:

$$I_{R_1, R_2} = \frac{V_o}{R_1 + R_2} = 0.3 \text{ mA}$$

wat overeenkomt met een vermogenverbruik van:

$$P_{R_1, R_2} = V_o I_{R_1, R_2} = 3.33 \text{ mW}$$

De stroom door de zenerdiode bedraagt

$$I_D = \frac{V_i - V_Z}{R_3} = 2.1 \text{ mA}$$

Deze stroom overbrugt een spanningsval van V_i naar 0V, bijgevolg:

$$P_{R_3, D} = V_i I_D = 50.4 \text{ mW}$$

Het totaal convertorvermogen bedraagt hierdoor de som van de drie vermogens, i.e.

$$P_{loss} = P_{OA} + P_{R_1, R_2} + P_{R_3, D} = 200.79 \text{ mW}$$

4. Het vermogen geleverd door de bron is:

$$P_i = V_i(I_{OA} + I_D) = 324 \text{ mW}$$

De vermogenbalans klopt inderdaad:

$$P_i = P_o + P_{loss}$$

$$324 \text{ mW} = 123.21 \text{ mW} + 200.79 \text{ mW}$$

5. Het rendement η en uitgangs-over verliesvermogen κ volgt uit de volgende berekeningen:

$$\eta = \frac{P_o}{P_i} \approx 38\% \qquad \kappa = \frac{P_o}{P_{loss}} = \frac{\eta}{1 - \eta} \approx 0.61$$

Vanuit duurzaamheidsstandpunt zijn dit beide hele slechte waarden.

Oplossing 10.4.2-2: We weten dat:

$$V_o = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) V_Z$$

$$\Leftrightarrow \frac{R_2}{R_1} = \frac{V_o}{V_Z} - 1$$

We onderzoeken nu de drie gevallen:

1. We vullen $V_o = 3.5 \text{ V}$ in in de bovenstaande formule:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{3.5 \text{ V}}{5 \text{ V}} - 1 = -0.35$$

Deze waarde levert duidelijk geen bruikbare weerstanden op. De weerstanden zouden immers een verschillend teken moeten hebben. Het is ook logisch dat de uitgangsspanning nooit lager kan worden dan de Zener-spanning.

2. We vullen $V_o = 7.5 \text{ V}$ in in de bovenstaande formule:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{7.5 \text{ V}}{5 \text{ V}} - 1 = 0.5$$

De volgende waarden zouden deze verhouding realiseren:

$$R_1 = 24 \text{ k}\Omega \qquad R_2 = 12 \text{ k}\Omega$$

3. De waarde van $V_o = 12 \text{ V}$ is groter dan V_i . De opamp gaat clippen op $V_o = V_i$. Deze waarde is dus niet haalbaar.

Oplossing 10.4.2-3: We weten dat

$$V_o = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) V_Z$$

De minimale waarde van $V_o = V_Z$ treedt op als: $R_2 = 0 \text{ k}\Omega$. De maximale waarden van V_o treedt op als $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$ en bedraagt $V_o = 6 \text{ V}$.

Maar, deze waarde is groter dan de voedingsspanning en bijgevolg niet haalbaar. De maximaal instelbare spanning wordt dus $V_o = V_i$ en treedt als op bij:

$$V_o = V_i = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) V_Z$$

$$\Leftrightarrow R_2 = R_1 \left(\frac{V_i}{V_Z} - 1\right) = 4.333 \text{ k}\Omega$$

Een grotere waarde voor R_2 instellen heeft geen effect meer.

Oplossing 10.4.3.9-1:

1. We weten voor de buck convertor dat:

$$V_o = DV_i$$

$$\Leftrightarrow D = \frac{V_o}{V_i} = \frac{24 \text{ V}}{5 \text{ V}} = 20.83\%$$

2. De stroomrimpel is aanzienlijk:

$$\Delta I_L = \frac{D(1-D)TV_i}{2L} = \frac{D(1-D)V_i}{2Lf} = 0.7197 \text{ A}$$

3. De spanningsrimpel is daarentegen heel aanvaardbaar:

$$\Delta V_C = \frac{D(1-D)T^3V_i}{16LC} = \frac{D(1-D)V_i}{16LCf^2} = 4.0892 \text{ mV}$$

Oplossing 10.4.3.9-2:

1. We weten voor de boost convertor dat:

$$V_o = \frac{1}{1-D} V_i$$

$$\Leftrightarrow D = 1 - \frac{V_i}{V_o} = 1 - \frac{0.7 \text{ V}}{1.5 \text{ V}} = 53.33\%$$

2. De stroomrimpel is aanzienlijk en bedraagt

$$\Delta I_L = \frac{DTV_i}{2L} = \frac{DV_i}{2Lf} = 678.8 \text{ mA}$$

3. De spanningsrimpel is daarentegen weer aanvaardbaar:

$$\Delta V_C = \frac{DTI_o}{2C} = \frac{DI_o}{2Cf} = 10 \text{ mV}$$

Oplossing 10.4.3.9-3:

1. We weten voor de buck-boost convertor dat:

$$V_o = -\frac{D}{1-D} V_i$$

$$\Leftrightarrow D = \frac{V_o}{V_o - V_i} = \frac{-12 \text{ V}}{-12 \text{ V} - 5 \text{ V}} = 70.59\%$$

2. De stroomrimpel is aanzienlijk en bedraagt

$$\Delta I_L = \frac{DTV_i}{2L} = \frac{DV_i}{2Lf} = 375.5 \text{ mA}$$

3. De spanningsrimpel is daarentegen weer aanvaardbaar:

$$\Delta V_C = \frac{DTI_o}{2C} = \frac{DI_o}{2Cf} = 80 \mu\text{V}$$

Oplossing 10.4.3.9-4: De spanningsomzetting vraagt

$$M = \frac{V_o}{V_i} = \frac{5 \text{ V}}{9 \text{ V}}$$

waardoor

$$D = M = \frac{5 \text{ V}}{9 \text{ V}} = 55.56\%$$

Vervolgens kunnen we de rimpels begrenzen.

$$\Delta I_L = \frac{D(1-D)V_i}{2Lf} \leq 100 \text{ mA}$$

$$\Delta V_C = \frac{\Delta I_L}{8Cf} \leq 50 \text{ mV}$$

Uit de eerste ongelijkheid halen we:

$$L \geq \frac{D(1-D)V_i}{2 \cdot 100 \text{ mA} f}$$

Deze vergelijking maakt nogmaals glashelder dat een hogere schakelfrequentie zal toelaten de spoel kleiner te maken. Als startpunt nemen we voor die frequentie $f = 100 \text{ kHz}$. Dit leidt tot:

$$L \geq \frac{0.5556(1-0.5556) \cdot 9 \text{ V}}{2 \cdot 100 \text{ mA} \cdot 100 \text{ kHz}} = 111 \mu\text{H}$$

Dat is nog aanvaardbaar. Twijfel je? Zoek eens bij een componentenleverancier op wat courante spoolwaarden zijn.

Vervolgens berekenen we de nodige condensator:

$$\begin{aligned} C &\geq \frac{\Delta I_L}{8 \cdot 50 \text{ mV} f} \\ &\geq \frac{100 \text{ mA}}{8 \cdot 50 \text{ mV} \cdot 100 \text{ kHz}} = 2.5 \mu\text{F} \end{aligned}$$

wat ook zeker een aanvaardbare waarde is. Er is geen nood om nog sneller te schakelen.

Oplossing 10.4.3.9-5: De spanningsomzetting vraagt

$$M = \frac{V_o}{V_i} = \frac{5 \text{ V}}{2.4 \text{ V}} = 2.0833$$

waardoor

$$D = \frac{M - 1}{M} = \frac{2.0833 - 1}{2.0833} = 52.00\%$$

Vervolgens kunnen we de rimpels begrenzen.

$$\begin{aligned} \Delta I_L &= \frac{DV_i}{2Lf} \leq 100 \text{ mA} \\ \Delta V_c &= \frac{DI_o}{2Cf} \leq 50 \text{ mV} \end{aligned}$$

Uit deze vergelijkingen blijkt duidelijk dat een hogere schakelfrequentie zal toelaten de spool en de condensator kleiner te maken. Als startpunt nemen we voor die frequentie $f = 100 \text{ kHz}$. Dit leidt tot:

$$\begin{aligned} L &\geq \frac{0.5200 \cdot 2.4 \text{ volt}}{2 \cdot 100 \text{ mA} \cdot 100 \text{ kHz}} = 6.5 \mu\text{H} \\ C &\geq \frac{0.5200 \cdot 2 \text{ A}}{2 \cdot 50 \text{ mV} \cdot 100 \text{ kHz}} = 104 \mu\text{F} \end{aligned}$$

wat al wel behoorlijk groot is. We kunnen overwegen om de schakelfrequentie te laten toenemen tot bv. 250 kHz, waardoor zowel de spool als de condensator 2.5 keer kleiner kunnen gemaakt worden.

Oplossing 10.4.3.9-6: De spanningsomzetting vraagt

$$M = \frac{V_o}{V_i} = \frac{-12 \text{ V}}{5 \text{ V}} = -2.4$$

waardoor

$$D = \frac{M}{M - 1} = \frac{2.4}{2.4 - 1} = 70.59\%$$

Vervolgens kunnen we de rimpels begrenzen.

$$\begin{aligned} \Delta I_L &= \frac{DV_i}{2Lf} \leq 100 \text{ mA} \\ \Delta V_c &= \frac{DI_o}{2Cf} \leq 50 \text{ mV} \end{aligned}$$

Uit deze vergelijkingen blijkt duidelijk dat een hogere schakelfrequentie zal toelaten de spool en de condensator kleiner te maken. Als startpunt nemen we voor die frequentie $f = 100 \text{ kHz}$. Dit leidt tot:

$$\begin{aligned} L &\geq \frac{0.7059 \cdot 5 \text{ volt}}{2 \cdot 100 \text{ mA} \cdot 100 \text{ kHz}} = 176.47 \mu\text{H} \\ C &\geq -\frac{0.7059 \cdot -1 \text{ A}}{2 \cdot 50 \text{ mV} \cdot 100 \text{ kHz}} = 70.59 \mu\text{F} \end{aligned}$$

wat al wel behoorlijk groot is. We kunnen overwegen om de schakelfrequentie te laten toenemen tot bv. 200 kHz, waardoor zowel de spool als de condensator 2 keer kleiner kunnen gemaakt worden.

