

**Academiejaar**

2024-2025

Faculteit Toegepaste Ingenieurswetenschappen

# **Analoge Elektronica 1**

Basisprincipes en netwerken – Tekstboek

Walter Daems

Bachelor of Science in de industriële wetenschappen: elektronica-ICT

1536FTIBAE 2-Basis analoge elektronica 1

5038FTISAE S1-Analoge elektronica



**Universiteit  
Antwerpen**

This document has been typeset using  $\LaTeX$  and the `uantwerpendocs` package.

Deze tekst is een speciale versie voor studenten met dyslexie. Hij werd gezet met het Sylexiad font. Geef alsjeblieft feedback op je ervaring met deze tekst per e-mail aan [walter.daems@uantwerpen.be](mailto:walter.daems@uantwerpen.be).

Deze tekst werd gemaakt met  $\text{Lua}\LaTeX$ . Berekeningen werden uitgevoerd m.b.v. Matlab/Octave en algemene programmeer- en scripttalen (C/C++/Perl/Python).

Afbeeldingen werden gemaakt met PGF, TikZ en asymptote.

Schakelingen werden getekend met CircuiTikZ.

Al dit materiaal werd voorbereid op een GNU/Linux workstation.

De rechten op de handelsmerken vermeld in deze uitgaven zijn eigendom van hun respectieve eigenaars.

Productie van deze tekst was mogelijk dankzij:



Dit werk is onderhevig aan het auteursrecht. Als je een gratis gebruiks- en distributielicentie wenst op dit werk (als student of als docent), stuur dan een e-mailbericht met je vraag aan de auteur ([walter.daems@uantwerpen.be](mailto:walter.daems@uantwerpen.be)).

AE-1-2024-1.2

CONFIDENTIAL AND PROPRIETARY.

© 2024 Universiteit Antwerpen, Alle rechten voorbehouden.

1	Inleiding	1
2	Fysische basiswetten	3
2.1	Gedistribueerde netwerken - Maxwell	3
2.2	Geconcentreerde netwerken - Kirchhoff	5
3	Grootheden en signalen	9
3.1	De basisgrootheden: stroom en spanning	10
3.1.1	Stroom	10
3.1.2	Spanning	11
3.2	Afgeleide grootheden: vermogen en energie	11
3.2.1	Vermogen	11
3.2.2	Energie	12
3.2.3	Gemiddeld vermogen	12
3.3	Signalen in het tijd- en frequentiedomein	13
3.3.1	DC-sigitaal	13
3.3.2	Sinus	13
3.3.3	Blokgolf	14
3.3.4	Driehoeksgolf	14
3.3.5	Ruis	17
3.4	Metten van spanningen en stromen	17
3.4.1	DC metingen	17
3.4.2	Tijdsmetingen	20
3.4.3	Frequentiemetingen	22
3.5	Simuleren van spanningen en stromen	22

4	Elementen	23
4.1	Elementen vs. componenten	23
4.2	Classificatie	24
4.3	Passieve elementen	24
4.3.1	De weerstand, condensator en spoel	24
4.3.2	De ideale diode	26
4.3.3	De ideale Zener-diode	28
4.4	Actieve elementen	29
4.4.1	Autonome bronnen	29
4.4.2	Afhankelijke bronnen	30
4.4.3	Ideale operationele versterker	31
4.5	Neutrale elementen	34
4.5.1	De ideale transformator	34
4.6	Overzicht en slotbeschouwing	38
5	Rekentechnieken voor lineaire netwerken	41
5.1	Rekenen met stromen en spanningen	41
5.1.1	In het tijddomein	41
5.1.2	DC	45
5.1.3	In het frequentiedomein	46
5.1.4	Spectra en Bode-diagrammen	54
5.1.5	Superpositie	58
5.2	Elementaire vereenvoudigingen voor schakelingen in serie / parallel / ster / driehoek	61
5.2.1	Serie / Parallel - vereenvoudiging	61
5.2.2	Ster-driehoeksequivalentie	63
5.3	Rekenen met stromen en potentialen	67
5.4	Rekenen met potentialen: stelling van Millman	69
5.5	Modified Nodal Analysis (MNA)	72
5.6	Slotbeschouwing	84

---

6	Standaardkenmerken en -modellen	87
6.1	Inleiding . . . . .	88
6.1.1	Poorten . . . . .	88
6.1.2	Auto- vs. trans-kenmerken . . . . .	88
6.1.3	Klem- vs. knooppuntskenmerken . . . . .	89
6.2	De situatie in rust . . . . .	89
6.3	Auto-kenmerken . . . . .	91
6.3.1	Definitie - berekening . . . . .	91
6.3.2	Betekenis . . . . .	92
6.4	Trans-kenmerken . . . . .	92
6.4.1	Definitie - berekening . . . . .	92
6.4.2	Betekenis . . . . .	93
6.5	Lineaire netwerkmodellen . . . . .	95
6.5.1	Eenpoort- of tweepoolmodellen . . . . .	96
6.5.2	Tweepoort- of vierpoolmodellen . . . . .	102
6.5.3	z-parameters . . . . .	104
6.5.4	y-parameters . . . . .	108
6.5.5	h-parameters . . . . .	109
6.5.6	g-parameters . . . . .	112
6.5.7	abcd-parameters . . . . .	116
6.5.8	a'b'c'd'-parameters . . . . .	117
7	Basisnetwerken, versterkers en comparatoren	121
7.1	Passieve netwerken . . . . .	122
7.1.1	Potentiometrische delers . . . . .	122
7.1.2	Sommator . . . . .	126
7.1.3	Gelijkrichters . . . . .	129
7.1.4	Spanningsvermenigvuldigers . . . . .	130
7.2	Actieve netwerken . . . . .	138

7.2.1	Versterkers . . . . .	138
7.2.2	Omzetters . . . . .	144
7.2.3	Somversterkers . . . . .	145
7.2.4	Verschilversterkers . . . . .	147
7.2.5	Comparatoren . . . . .	149
7.2.6	Integrator en differentiator . . . . .	153
7.3	Besluit . . . . .	156
8	Filters . . . . .	157
8.1	Inleiding . . . . .	158
8.2	Types filters . . . . .	158
8.3	Frequentie-afhankelijke impedanties . . . . .	161
8.4	Bode-diagrammen schetsen . . . . .	167
8.5	Filtercascades . . . . .	174
8.6	Passieve filters . . . . .	175
8.7	Actieve filters . . . . .	176
8.7.1	Basisprincipe . . . . .	176
8.7.2	Impedantieschaling . . . . .	178
8.7.3	Biquad filters . . . . .	178
8.7.4	Biquad filter met negatieve feedback . . . . .	180
8.7.5	Biquad filter met positieve feedback . . . . .	181
8.7.6	Ontwerpstrategie . . . . .	186
8.8	Besluit . . . . .	191
9	Oscillatoren . . . . .	193
9.1	Inleiding . . . . .	194
9.2	Relaxatie-oscillatoren . . . . .	194
9.3	Harmonische oscillatoren . . . . .	196
9.3.1	Basisprincipes . . . . .	197
9.3.2	Oscillatoren met een eenvoudig banddoorlaatfilter: de Wienbrugoscillator . . . . .	198

---

9.3.3	Oscillatoren met een LC-tank . . . . .	200
9.4	Besluit . . . . .	217
10	Convertoren . . . . .	219
10.1	Inleiding . . . . .	220
10.1.1	Doel . . . . .	220
10.1.2	Rendement . . . . .	221
10.2	Transformatoren . . . . .	222
10.3	Gelijkrichters . . . . .	224
10.3.1	Enkelzijdige gelijkrichter . . . . .	224
10.3.2	Dubbelzijdige gelijkrichter (Graetz brug) . . . . .	225
10.4	DC-DC convertoren . . . . .	228
10.4.1	Principe . . . . .	228
10.4.2	Lineaire (serie)convertoren . . . . .	229
10.4.3	Schakelende convertoren . . . . .	232
10.5	Besluit . . . . .	260
11	Besluit . . . . .	261
A	Van Maxwell naar Kirchhoff . . . . .	263
A.1	Van de wet van Faraday naar Kirchhoffs spanningsvergelijking . . . . .	263
A.2	Van de wet van Ampère naar Kirchhoffs stroomvergelijking . . . . .	264
B	De nabla operator in de wetten van Maxwell . . . . .	267
C	Grafen . . . . .	269
D	Frequentieverhoudingen en Decibels . . . . .	271
E	Oplossen van lineaire stelsels met parameters . . . . .	277



In de hedendaagse opleidingen elektronica-ICT heeft de klassieke elektronica zoals die aangeleerd werd in (oude) programma's elektriciteit-elektronica plaats moeten maken voor een stevige poot informatica en telecommunicatie. Dat is niet zonder reden: een groot deel van de huidige elektronica-technologie is programmeerbaar en vraagt dus een stevige beheersing van informatica-vaardigheden. Onze wereld is in de voorbije kwarteeuw ook één groot netwerk geworden. Het beheersen van die basistechnologie is dus ook essentieel voor een industrieel ingenieur elektronica-ICT.

Toch stellen we vast dat zowel voor analoge elektronica en (high-performance en low-power) digitale elektronica een grondige kennis van de hardware essentieel is om uit de voeten te kunnen. Meer nog: het is die kennis die ons differentieert van informatici en internet-of-things-specialisten.

In het licht van de beperkte tijd die het curriculum ter beschikking stelt voor elektronica, is efficiënt werken aan de orde. Daarom koos ik ervoor om eigen leermateriaal te ontwikkelen. Dit laat toe om een selectie van onderwerpen te maken die toelaat om in een zo kort mogelijke tijd een diep bad te nemen in de kennis en de vaardigheden van de elektronica. Eigen leermateriaal laat ook toe om snelle aanpassingen te doen in functie van nieuwe evoluties en ook aan inzichten in hoe de materie gemakkelijk kan overgebracht en bestudeerd worden. Feedback op deze bundel is te allen tijde welkom!

Deze tekst is een onderdeel van een tweeluik:

- Analoge Elektronica 1: basisprincipes en netwerken
- Analoge Elektronica 2: technologie en schakelingen

Elektronica is een van de wetenschappen die het elektromagnetisme bestudeert, maar dan vanuit een heel praktisch standpunt: hoe kunnen we het samenspel van elektrische en magnetische velden gebruiken om er werkende meet-, reken-, opslag-, en stuurschakelingen mee te maken? Die praktische inslag, waarbij omwille van de nood aan zuinige en toch hoogperformante schakelingen het vaak niet mogelijk is om de werking ervan volledig te abstraheren tot een wiskundig samenspel van formules, geeft elektronica vaak de kwalijke reputatie tot de zwarte kunsten te behoren. In meer wetenschappelijke termen: de nodige ervaring, het kennen van enkele typische kneepjes van het vak, is inderdaad niet te vermijden om met succes werkende schakelingen te maken.

Deze teksten steken dan ook niet onder stoelen of banken dat enige kennis (en vooral het investeren in het up-to-date houden ervan) nodig is om een goed elektronicus te worden. Maar op hetzelfde niveau kan een goed elektronicus zich niet beperken tot het leren van kookboekrecepten. De nodige methodiek is evenzeer nodig om voorbij de eenvoudige huis-tuin-en-keuken schakelingetjes te geraken.

Elke tekst maakt een keuze in de conventies en symbolen die gehanteerd worden. De wereld maakte helaas geen unieke keuze op dat vlak. Deze teksten gaan uit van de conventionele zin van stromen en spanning. Wat symbolen betreft, wordt een mengeling gemaakt van Europese stroom- en spanningsaanduidingen en Amerikaanse netwerksymbolen. Waarom deze vreemde keuze? Omdat ze naar mijn aanvoelen de meest ondubbelzinnige combinatie vormt.

Ook wat taalgebruik betreft, vaart dit tweeluik een ongewone koers. Engelse termen worden soms bewust niet vertaald in het Nederlands omdat ze enkel in het Engels gebruikt worden (bijvoorbeeld een capacitive dropper). Deze keuze leidt voor de taalpurist ongetwijfeld soms tot tenenkruisende constructies. Zo spreekt de tekst niet van een koolstoffilmweerstand, maar van een carbonfilmweerstand omdat dit meteen de juiste Engelstalige term in het beperkte geheugen van de lezer grift, namelijk carbon film resistors.

De teksten bevatten her en der ook vooruitverwijzingen (naar concepten die pas later en mogelijk pas in het volgende boekdeel aan bod komen). Dit is bewust zo gedaan opdat een tweede lezing van deze cursus, vele jaren later nog tot nieuwe connecties en inzichten kan leiden.

Ik hoop dat de lezer merkt dat deze teksten met zorg zijn samengesteld. Er is een behoorlijke hoeveelheid tijd in gekropen, niet enkel door mezelf, maar ook door mijn collega's Paul Levrie, Koen Lostrie en Federico Crucitti, die ik expliciet wil bedanken voor de nuttige feedback en de vele correcties die ze maakten. Ik verwacht van de lezer niet minder: een behoorlijke tijdsinvestering om zich dit materiaal (deels zelfstandig) eigen te maken en een dwangmatige neiging om de eigen ideeën (schakelingen, formules) met de grootste zorg uit te werken en te noteren.

Ik wens de lezer evenveel plezier bij het verwerken van deze tekst als ik had bij het opstellen ervan!

Walter Daems

Zomer 2024

Kyndelose, Vekso Sjaelland (DK)

## Overzicht van de gebruikte symbolen en afkortingen

---

### Symbolen

Symbool	Betekenis
Grootheden	
$v$	spanning
$i$	stroom
$p$	vermogen
$E$	energie
$R$	weerstand
$Z$	impedantie
$Y$	admittantie
$X$	reactantie
$L$	inductantie
$C$	capaciteit
$\eta$	rendement
$Q$	kwaliteitsfactor
$\zeta$	dempingsfactor
$\omega_n$	natuurlijke frequentie
$\tau$	tijdconstante
$\vec{E}$	elektrisch veld
$\vec{B}$	magnetisch veld
Eenheden	
A	Ampère (stroomsterkte)
V	Volt (spanning)
W	Watt (vermogen)
J	Joule (energie)
$\Omega$	Ohm (weerstand)

verdergezet op de volgende bladzijde

---

---

vervolg van de vorige bladzijde

---

Symbool	Betekenis
S	Siemens (geleidbaarheid)
F	Farad (capaciteit)
H	Henry (inductantie)
dB	pseudo-eenheid die aangeeft dat het gaat om een logaritmische verhouding (van vermogensgrootheden)
dec	een decade, wat een factor 10 betekent
oct	een octaaf, wat een factor 2 betekent

---

Operaties

---

$[x]$	dimensie-operator ("de eenheid van $x$ ")
$\vec{\nabla}V$	de gradient van het scalaire veld $V$
$\vec{\nabla} \times \vec{F}$	de rotatie van het vectorveld $\vec{F}$
$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$	de divergentie van het vectorveld $\vec{F}$

---

Ongelijkheden

---

$a < b$	$a$ strikt kleiner dan $b$
$a \leq b$	$a$ kleiner dan of gelijk aan $b$
$a > b$	$a$ strikt groter dan $b$
$a \geq b$	$a$ groter dan of gelijk aan $b$
$a \ll b$	$a$ veel kleiner dan $b$
$b \gg a$	$a$ veel groter dan $b$

---

## Afkortingen

Omdat vele afkortingen uit het Engels komen, vermelden we telkens eerst de verklaring in het Engels en in de rechterkolom de verklaring in het Nederlands.

Afkorting	Betekenis (E)	Betekenis (N)
AC	alternating current	wisselstroom
ADC	analog to digital converter	analoog-digitaal-converter
ASIC	application specific integrated circuit	toepassings specifieke geïntegreerde schakeling
AVO	ampère, volt, ohm	ampère, volt, ohm

---

verdergezet op de volgende bladzijde

---

---

 vervolg van de vorige bladzijde
 

---

Afkorting	Betekenis (E)	Betekenis (N)
BE	branch equation	takvergelijking (bv. de wet van Ohm)
CCCS	current-controlled current source	stroomgestuurde stroombron
CCVS	current-controlled voltage source	stroomgestuurde spanningsbron
DAC	digital to analog converter	digitaal-analoog-converter
DC	direct current	gelijkstroom
DSP	digital signal processing	digitale signaalverwerking
IC	integrated circuit	geïntegreerde schakeling
KCL	Kirchhoff's current law	Kirchhoffs stroomwet
KVL	Kirchhoff's voltage law	Kirchhoffs spanningswet
LED	light-emmitting diode	lichtgevende diode
LSA	linear slope approximation	lineaire hellingsbenadering
LSB	least significant bit	minst beduidende bit
MM	stelling van Millman	Millman's theorem
MSB	most significant bit	meest beduidende bit
PCB	printed circuit board	gedrukte schakeling
opamp	operational amplifier	operationele versterker
RMS	root mean square	wortel uit het gemiddelde van het kwadraat
SRA	small ripple approximation	kleine rimpel-benadering
VCCS	voltage-controlled current source	spanningsgestuurde stroombron
VCVS	voltage-controlled voltage source	spanningsgestuurde spanningsbron

---



## Inleiding

### Een fundamentele wetenschap...

Analoge elektronica mag gerust gezien worden als één van de belangrijke domeinen van de klassieke fysica. Deze wetenschap is enerzijds fundamenteel (gestoeld op de wetten van het elektromagnetisme) en anderzijds heel toegepast: de stand van onze huidige wetenschappelijke kennis is bijna volledig te danken aan het vermogen dat we over de jaren heen hebben opgebouwd om nauwkeurige meet- en regelapparatuur te bouwen die ons toelaat om fysische experimenten onder extreem gecontroleerde omstandigheden uit te voeren.

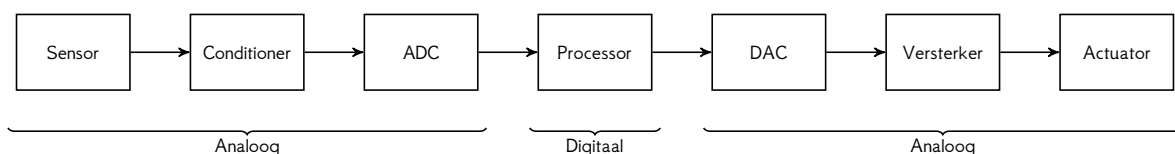
### ...die onze wereld hertekend heeft...

Denk (analoge) elektronica weg uit onze wereld en we keren terug naar de tijd van de industriële revolutie. Weliswaar niet de middeleeuwen, maar toch een tijd met weinig meer dan steenkool, staal, een stoommachine, een telescoop en wat weefgetouwen. Hoewel deze korte omschrijving 'op flessen getrokken is', volstaat het om je een wereld in te beelden zonder elektronica: geen computers, geen telecommunicatie, geen simulatie van de klimaatopwarming, geen artificiële intelligentie. Zou je nog terug willen?

### ...en die ten dode is opgeschreven?

De enthousiaste lezer die ook met passie digitale elektronica studeert, zal ongetwijfeld opmerken dat onze wereld de laatste jaren steeds digitaal wordt. Het lijkt alsof analoge elektronica zal verdwijnen. Niets is minder waar. Hoewel het aandeel van de digitale elektronica inderdaad sterk dominant is, zal het aandeel van de analoge elektronica nooit verwaarloosbaar klein worden. Het fundamentele argument voor deze stelling is dat onze wereld analoog is en dat we voor elke meting die we willen uitvoeren op onze wereld, continue grootheden (afstanden, krachten, drukken, temperaturen, ...) moeten meten m.b.v. fysische sensoren die de te meten grootheid omzetten in een spanning of een stroom. Als we aan de andere kant ook invloed willen uitoefenen op onze wereld, dan vraagt dat het aansturen van fysische actuatoren die spanningen en/of stromen omzetten in een fysisch gevolg (een wijziging in afstand, kracht, druk, temperatuur, ...).

Dit leidt tot het onderstaande fundamentele schema:



De sensor zet een fysische grootheid om in een elektrische die meetbaar gemaakt wordt door de conditioner om dan omgezet te worden door de analog-to-digital converter naar een digitaal signaal, dat door de processor kan verwerkt worden. De processor levert vervolgens een digitaal signaal af aan de digital-to-analog converter die het signaal opnieuw analoog maakt, waarna het met de nodige versterking een actuator kan activeren.

Merk op dat alles behalve de processor analoge elektronica is! De belangrijkste conclusie tot nog toe is dus: neen, analoge elektronica is niet ten dode opgeschreven. Ze is fundamenteel ingebakken in het DNA van onze wereld.

#### Nomen est omen?

De evidentie van het bovenstaande schema, doet ons haast vergeten dat we niet strikt gedefinieerd hebben wat analoog en wat digitaal is. We laten een rigoureuze definitie voor het vak digitale signaalverwerking dat later op je pad ligt. Op dit ogenblik volstaat het om te beseffen dat een digitaal signaal een wiskundige abstractie is: je beschrijft het signaal met getallen in functie van de (vaak discrete) tijd, terwijl een analoog signaal de fysische grootheid zelf is in functie van de tijd. Het begrip digitale elektronica komt van het Latijnse *digitus*, wat refereert aan 'tellen op je vingers', terwijl analoog verwijst naar het Griekse *ανα'λογοζ* wat 'evenredig' betekent. Inderdaad, we kunnen elektr(on)ische schakelingen gebruiken om een netwerk te maken dat zich evenredig/gelijkaardig gedraagt aan een wiskundige differentiaalvergelijking. Inderdaad, je kan het oplossen van een wiskundige vergelijking simuleren door ze na te bouwen met analoge elektronische componenten.

#### Triviaal?

De basiswetten van de elektriciteit en de elektronica, zoals we ze later zullen leren kennen (de wetten van Kirchhoff, Ohm, Gauss en Faraday) lijken eenvoudig en triviaal: met eenvoudige meettoestellen kunnen we ze verifiëren in het labo. We mogen echter niet vergeten dat op het moment dat deze wetenschappers hun wetmatigheden formuleerden, de nodige generatoren en meettoestellen niet voorhanden waren: de constructie van deze toestellen is net gebaseerd op de inzichten die voortvloeien uit deze wetten.

#### Complex of moeilijk?

Waar digitale elektronica doorgaans als complex (in de zin van moeilijk door de omvang) wordt omschreven, is analoge elektronica gewoon moeilijk (in de zin van inherent moeilijk). Bij digitale elektronica hebben we de moeilijkheid gereduceerd door spanning en stromen te abstraheren in nullen en enen. Hierdoor kunnen we heel ingewikkelde systemen bouwen, waarbij de uitdaging ligt in het beheersen van de complexiteit.

Bij analoge elektronica blijven we vast hangen aan de fysische grootheden, waardoor deze systemen noodgedwongen beperkter in omvang zullen blijven. De uitdaging bestaat er in om met een minimale hoeveelheid componenten een optimale werking te bekomen in termen van efficiëntie en nauwkeurigheid.

## Overzicht

2.1	Gedistribueerde netwerken - Maxwell	3
2.2	Geconcentreerde netwerken - Kirchhoff	5

In dit hoofdstuk ontdekken we hoe de hele elektriciteit/elektronica gebaseerd is op de wetten van Maxwell, maar dat we onder bepaalde omstandigheden toch een iets gemakkelijkere set vergelijkingen kunnen gebruiken: de wetten van Kirchhoff. Het zal dit kader zijn dat we gebruiken om elektronische netwerken en schakelingen te bouwen.

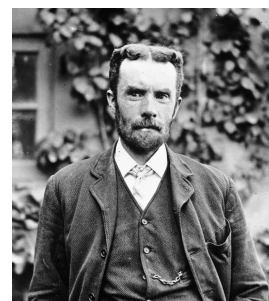
### 2.1 Gedistribueerde netwerken - Maxwell

We kennen Maxwells vergelijkingen uit de studie van het elektromagnetisme. James Clerk Maxwell (zie Figuur 8.2c) maakte in 1873 in ca. 20 vergelijkingen een eerste synthese van wat tot dan toe aparte wetenschappelijke inzichten waren van ondermeer Gauß, Faraday en Ampère.

Het was Oliver Heaviside (zie Figuur 8.2d) die na Maxwells dood in 1884 twaalf van de twintig originele vergelijkingen verving door vier compacte vergelijkingen die kernachtig de wetmatigheden van het elektromagnetisme beschrijven.



(a) James Clerk Maxwell  
(\*1831–†1879)



(b) Oliver Heaviside  
(\*1850– †1925)

Figuur 2.1: Twee grondleggers van de elektromagnetische golftheorie

### Differentiaalvorm

Inderdaad, de volgende microscopische differentiaalvorm vormt een krachtig kwartet:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{Wet van Gau\ss voor E-velden})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{Wet van Gau\ss voor B-velden})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{Wet van Faraday})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{J} \quad (\text{Wet van Amp\ere})$$

waarbij de elektrische ( $\vec{E}$ ) en magnetische ( $\vec{B}$ ) vectorvelden in interactie staan met de ruimtelading  $\rho$  en de stroomdichtheidsvector  $\vec{J}$  en waarbij  $\vec{\nabla} \cdot$  en  $\vec{\nabla} \times$  respectievelijk de divergentie en de rotatie-operator weergeven). De constanten  $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$  en  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$  staan in nauwe relatie met de lichtsnelheidsconstante, nl.  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ .

De eerste wet van Gau\ss stelt dat een elektrische lading aanleiding geeft tot een elektrisch veld. De tweede wet van Gau\ss stelt dat er geen magnetische ladingen bestaan.

De wet van Faraday stelt dat een wijziging in het magnetische veld een rotatie in het elektrische veld oplevert.

Op dezelfde manier toont de wet van Amp\ere dat een zich wijzigend elektrisch veld of een beweging van ladingen een rotatie in het magnetische veld oplevert.

Het samenspel van deze wetten zorgt ervoor dat elektromagnetische verschijnselen kunnen beschreven worden met behulp van golven die zich in vacu\um voortplanten aan de lichtsnelheid, en in een middenstof aan een mogelijk lagere snelheid. Licht is een welbekend voorbeeld van zo'n elektromagnetische golf, maar ook microgolven en radiogolven.

### Integraalvorm

In je basiscursus elektriciteit, zag je deze wetten in integraalvorm. Ze kunnen eenvoudig afgeleid worden uit de hogervermelde differentiaalvorm: indien we de twee eerste wetten integreren op een gesloten volume  $\Omega$  met gesloten buitenoppervlak  $\alpha$  waarin geen magnetisch of di\elektrisch materiaal zit, dan krijgen we:

$$\oint_{\alpha} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (\text{Wet van Gau\ss voor E-velden})$$

$$\oint_{\alpha} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (\text{Wet van Gau\ss voor B-velden})$$

waarbij  $Q$  de totale hoeveelheid lading is die in het volume aanwezig is, en  $d\vec{A}$  de naar buiten gerichte normaalvector is op een elementair oppervlak  $dA$  in het buitenoppervlak  $\alpha$  van het volume  $\Omega$ .

Indien we de twee laatste wetten integreren over een gesloten contour  $\beta$ , de rand van een open oppervlak  $\Sigma$ , dan krijgen we:

$$\oint_{\beta} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi_B}{dt} \quad (\text{Wet van Faraday})$$

$$\oint_{\beta} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} + \mu_0 I \quad (\text{Wet van Amp\ere})$$

waarbij  $I$  de stroom is door het oppervlak en  $\phi_B$  en  $\phi_E$  de respectieve magnetische en elektrische flux is doorheen het oppervlak.

De notatie  $\oint_{\alpha} \vec{f} \cdot d\vec{l}$  betekent dat we een Riemann som uitreken waarbij we de contour  $\alpha$  opdelen in infinitesimale kleine stukjes  $d\vec{l}$  waarbij we deze stukjes voorzien van een vector-karakter (die in de omloopzin laten wijzen,

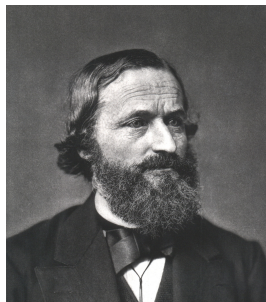
evenwijdig aan de raaklijn aan de contour voor het  $dl$ ). De integraal berekent op die manier de Riemann som van het scalaire product  $\vec{f}$  en  $d\vec{l}$ .

Indien we elektromagnetische verschijnselen beschrijven m.b.v. deze vergelijkingen, dan werken we in gedistribueerde modus (distributed electronics), waarbij we veronderstellen dat ladingen, stromen en velden overal kunnen voorkomen. Deze wetmatigheden vormen de basiswetten voor de elektromagnetische golfpropagatie.

Indien we echter veronderstellen dat ladingen enkel in geleiders kunnen vloeien (en er zich niet kunnen ophopen) en dat fluxen die in de integraalvorm van de wetten van Faraday en Ampère voorkomen verwaarloosbaar klein zijn, dan kunnen we de theorie gevoelig vereenvoudigen tot de theorie van de geconcentreerde netwerken (lumped electronics).

## 2.2 Geconcentreerde netwerken - Kirchhoff

Nog voor Maxwell aan zijn studie van het elektromagnetisme begon, formuleerde Gustav Robert Kirchhoff (zie Figuur 2.2) al zijn netwerk wetten. Kirchhoff legde daarmee de basis voor de hele praktische elektriciteitsleer zoals ingenieurs en technici die tot op heden gebruiken.



Figuur 2.2: Gustav Robert Kirchhoff  
(\*1824— †1887)

### Voorwaarden

De wetten van Kirchhoff zijn een bijzonder geval van de wetten van Maxwell. Ze gelden onder bijzondere voorwaarden. Deze voorwaarden zijn:

1. De verandering in de tijd van de magnetische flux doorheen de oppervlaktes gevormd door de lussen van het netwerk is verwaarloosbaar.<sup>1</sup>  
Samengevat:  $\frac{\partial \phi_B}{\partial t} \approx 0$
2. De verandering in de tijd van de hoeveelheid lading in de geleiders van het netwerk is verwaarloosbaar.  
Samengevat:  $\frac{\partial Q}{\partial t} \approx 0$

De bovenstaande voorwaarden zijn vervuld voor de meeste praktische schakelingen die we bouwen. Enkel bij schakelingen die aan extreem hoge frequenties werken, of schakelingen die heel groot zijn, komen we in de problemen met deze vereenvoudiging van de werkelijkheid. En zelfs dan is er een theorie die verderbouwt op de wetten van Kirchhoff, zodat we geen Maxwellvergelijkingen moeten oplossen: de theorie van de transmissielijnen. Je leert deze kennen in één van je cursussen telecommunicatie.

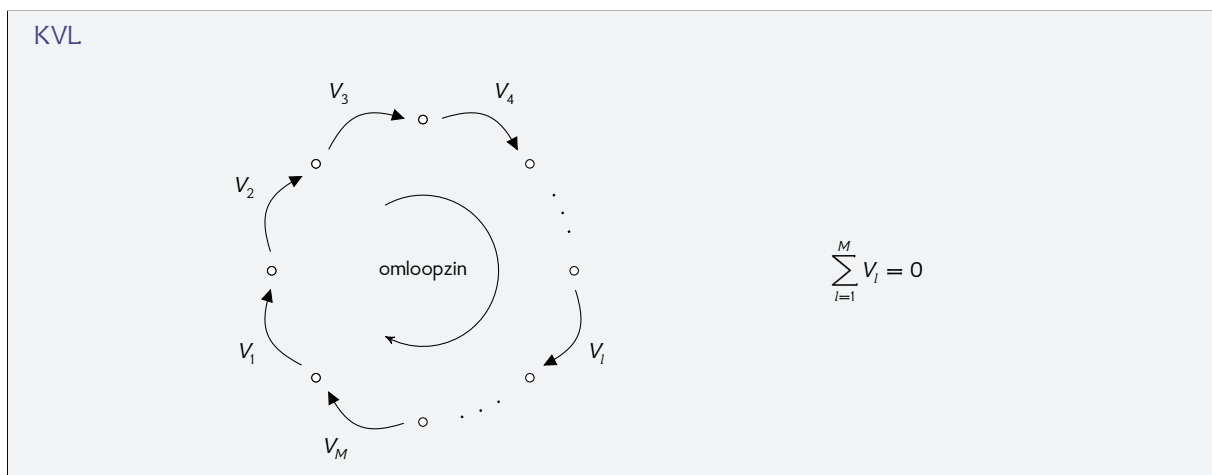
Kirchhoffs wetten vertrekken van een elektrisch netwerk dat uit knopen bestaat, met elkaar verbonden door

<sup>1</sup>Deze veronderstelling maakt het elektrische veld rotatievrij. We noemen een dergelijk veld ook wel een conservatief veld.

elementen. Wil je in detail weten hoe je Kirchhoffs wetten kan afleiden uit Maxwells wetten? Lees dan Bijlage A.

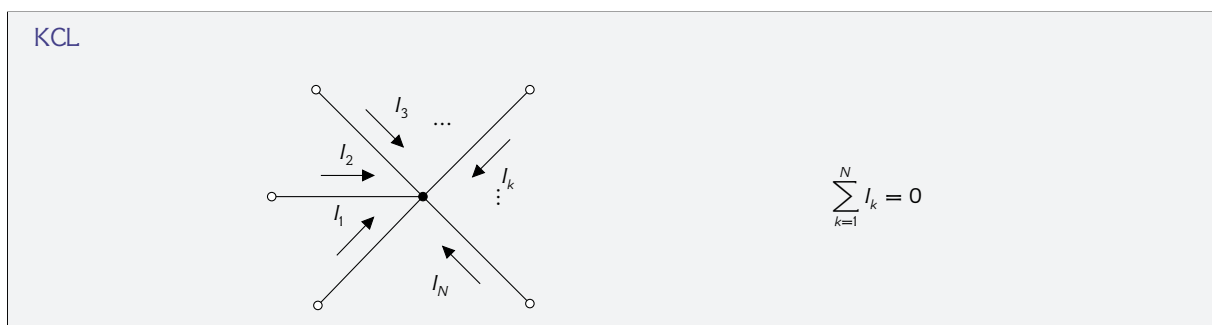
### Spanningswet (KVL)

De spanningswet (die we vaak afkorten als KVL, Kirchhoff's Voltage Law) eist dat de som van de spanningen in een gesloten lus in het netwerk nul is. De knopen worden hieronder aangeduid als open cirkeltjes. We kiezen een omloopzin in de lus. Spanningspijlen in de richting van de lus rekenen we positief; spanningspijlen tegengesteld aan de richting van de lus rekenen we negatief.



### Stroomwet (KCL)

De stroomwet (die we vaak afkorten als KCL, Kirchhoff's Current Law) eist dat de som van de stromen in een knoop gelijk is aan nul. Anders gesteld: er kan geen opbouw van ladingen zijn in een knoop (of in een geleider). In de tekening hieronder komen meerdere geleiders toe in een knoop (zwart cirkeltje). We maken op voorhand een keuze: ofwel rekenen we toekomstige stromen als positief; ofwel rekenen we uitgaande stromen als positief, maar meng de twee niet!



## De 'stille' derde voorwaarde

Er is nog een derde voorwaarde die voldaan moet zijn om vlot met Kirchhoff's wetten aan de slag te kunnen, en dat is dat de stroom die in een tweepool langs de ene kant er instroomt, er ogenblikkelijk aan de andere kant ongewijzigd weer uitstroomt, m.a.w.  $I_a = I_b$  op elk ogenblik.



Deze voorwaarde correspondeert met de volgende golfvoorwaarde:

- De golflengte van de signalen in het netwerk is groot in vergelijking met de afmetingen van het netwerk.

$$\text{Samengevat: } \lambda_{\min} \gg l_{\text{netwerk}}$$

Indien we veronderstellen dat de golven zich in ons netwerk voortplanten aan een snelheid  $v$  en wetende dat  $v = f\lambda$ , laat deze voorwaarde ons toe om te berekenen met welke frequenties we veilig kunnen werken. Inderdaad:

$$\lambda_{\min} \gg l_{\text{netwerk}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{v}{f_{\max}} \gg l_{\text{netwerk}} \quad \Leftrightarrow \quad f_{\max} \ll \frac{v}{l_{\text{netwerk}}}$$

We noemen deze ongelijkheid of elke herordening ervan de lumped circuit condition.

De effectieve propagatiesnelheid van golven in vacuüm bedraagt de lichtsnelheid  $c$  (met  $c \approx 3 \times 10^8$  m/s). In een middenstof worden de golven wat afgeremd en kan je de effectieve propagatiesnelheid berekenen als

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

waarbij  $\epsilon_r$  de relatieve permittiviteit is, gegeven door

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$$

met  $\epsilon_0$  de permittiviteit van vacuüm en  $\epsilon$  de permittiviteit van de middenstof.

Voor enkele courante materialen vind je hieronder de relatieve permittiviteit<sup>2</sup>:

Middenstof	$\epsilon_r$	Middenstof	$\epsilon_r$
Vacuüm	1	Neopreen	6.7
Lucht	1.0006	Polyethyleen	2.25
FR4	3.3...4.8	Polypropyleen	2.3
Silicium	11.68	Polystyreen	2.5
Siliciumdioxide	3.9	Papier	2.3
Siliciumnitride	7.5	Pyrex	4.7
Beton	4.5	Teflon	2.1

Tabel 2.1: Relatieve permittiviteit voor enkele materialen

Voor een analoge schakeling in Eurokaartformaat (16 cm × 10 cm) gemaakt uit FR4 waarbij we veronderstellen dat een signaal van de ene hoek van de PCB (volledig langs de zijkant) naar de overstaande hoek van de PCB

<sup>2</sup>De permittiviteit is ook functie van de frequentie. De waarden die hier gegeven worden zijn gemiddelden.

moet propageren wil dit zeggen dat  $f_{\max} \ll 795 \text{ MHz}$ . Wil dit zeggen dat we geen PCBs kunnen ontwerpen die met een dergelijke snelheid werken? Toch wel, maar we gaan wel met de propagatiesnelheden rekening moeten houden. Of, je moet er minstens voor zorgen dat je schakelingen een zo compact mogelijke layout op de PCB krijgen, zodat ze niet moeten 'reizen' van de ene kant van het bord naar de andere kant van het bord.

---

### Oefeningen

**Oefening 2.2-1:** Bepaal de lumped circuit condition in termen van maximale frequentie voor een PCB gemaakt in FR4 waarbij de maximale signaalafstand 5 cm bedraagt.

**Oefening 2.2-2:** Bepaal de lumped circuit condition in termen van maximale signaalpadlengte voor een PCB gemaakt in FR4 waarbij je signalen tot 1 GHz wil gebruiken.

**Oefening 2.2-3:** Kijk na of de lumped circuit condition nog voldaan is voor signaalpadlengtes van 20 cm en frequenties tot 800 MHz indien je FR4 gebruikt als PCB materiaal.

## Grootheden en signalen

---

### Overzicht

3.1	De basisgrootheden: stroom en spanning . . . . .	10
3.1.1	Stroom . . . . .	10
3.1.2	Spanning . . . . .	11
3.2	Afgeleide grootheden: vermogen en energie . . . . .	11
3.2.1	Vermogen . . . . .	11
3.2.2	Energie . . . . .	12
3.2.3	Gemiddeld vermogen . . . . .	12
3.3	Signalen in het tijd- en frequentiedomein . . . . .	13
3.3.1	DC-signaal . . . . .	13
3.3.2	Sinus . . . . .	13
3.3.3	Blokgolf . . . . .	14
3.3.4	Driehoeksgolf . . . . .	14
3.3.5	Ruis . . . . .	17
3.4	Metten van spanningen en stromen . . . . .	17
3.4.1	DC metingen . . . . .	17
3.4.2	Tijdsmetingen . . . . .	20
3.4.3	Frequentiemetingen . . . . .	22
3.5	Simuleren van spanningen en stromen . . . . .	22

Dit hoofdstuk definieert de centrale grootheden van de elektronica, nl. stroom en spanning en de daarbij horende afgeleide grootheden, vermogen en energie. Het introduceert ook het begrip signaal, nl. een grootheid i.f.v. de tijd of de frequentie. We bekijken ook enkele standaardsignalen met de bijhorende terminologie. Tot slot onderzoeken we hoe we de basisgrootheden kunnen meten.

Je vindt in dit hoofdstuk geen oefenmateriaal. Er zal immers voldoende gelegenheid zijn om deze concepten in te oefenen in de volgende hoofdstukken.

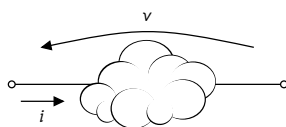
### 3.1 De basisgrootheden: stroom en spanning

De basisgrootheden die we hanteren in de klassieke elektronica, zijn stroom en spanning. Leken halen specifieke aspecten van deze twee begrippen wel eens door elkaar. Als ingenieur elektronica moet het volgende tabelletje foutloze, parate kennis zijn:

Grootheid	Aard	Variabele	Eenheid	Symbool
stroom	door-grootheid	$i$	Ampère	A
spanning	over-grootheid	$v$	Volt	V

Merk op dat dit geen scalaire grootheden zijn, maar dat ze een vectorieel aspect hebben. We duiden ze net als vectoren aan met een pijl. Ze hebben dus een richting en een zin. De richting mag je niet interpreteren als een richting in drie dimensies (zoals voor een 3-D vector), maar als een topologische richting van één netwerk-knoop naar een andere (voor spanning) of parallel aan een draad (voor stroom).

Een meer grafische voorstelling toont deze grootheden in relatie tot een denkbeeldige tweepool (elektrisch element met twee klemmen). De tweepool kan zelfs een heel netwerk met twee klemmen zijn. Daarom stellen we hem voor als een wolkje, waarvan de inhoud onduidelijk is. Stroompijlen zijn rechte pijlen, spanningspijlen gekromd.



Merk op dat we de stroompijl naast de draad tekenen (om elke verwarring met andere netwerksymbolen zoals die van een diode te vermijden), maar dat de stroom wel degelijk door de draad vloeit!

#### 3.1.1 Stroom

Stroom definiëren we als de totale hoeveelheid ladingen die per tijdseenheid passeert doorheen een oppervlak. Dit oppervlak kan een denkbeeldige draaddoorsnede zijn of een denkbeeldige snede doorheen een elektrisch element. Hoewel we weten dat de vrije ladingen in een geleider (negatief geladen) elektronen zijn, tekenen we de pijl van de stroom tegen de stroomrichting van de ladingen in. Het is alsof we veronderstellen dat er positieve ladingen doorheen de geleider vloeien. We noemen dit de conventionele stroomzin.

Je kan je elektrische stroom voorstellen als een rivier van positieve ladingen. De pijl wijst in de richting van de stroming.

De eenheid van stroom is de Ampère, met symbool A, genoemd naar André-Marie Ampère (zie Figuur 3.1a).

We noteren:

$$[i] = A$$

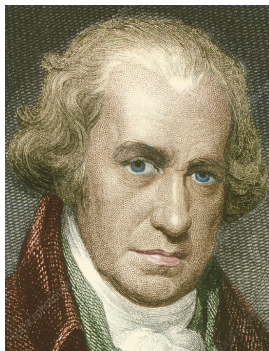
Merk op dat grootheden cursief gedrukt worden en eenheden rechttop. Dit laat ons toe om letters dubbel te gebruiken, zowel voor grootheden als voor eenheden. In handgeschreven tekst, maken we dat onderscheid niet. Daar moet de context uitsluitel geven.



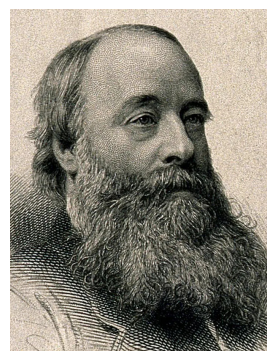
(a) André-Marie Ampère  
(\*1775–†1836)



(b) Alessandro Giuseppe Volta  
(\*1745–†1827)



(c) James Watt  
(\*1736–†1819)



(d) James Prescott Joule  
(\*1818–†1889)

### 3.1.2 Spanning

De spanning is de negatieve (lijn)integraal<sup>1</sup> van het elektrische veld tussen twee (meet)punten  $A$  en  $B$ . Moesten we het pad dat we volgen voor deze integraal omkeren, dan wisselt de spanningswaarde van teken. Het is dus een grootheid die gedefinieerd is tussen twee punten waarbij de volgorde van de punten wel degelijk belang heeft. We duiden de spanning aan met een pijl die wijst tegen de globale richting en zin van het elektrische veld in. We noemen dit opnieuw de conventionele spanningszin.

Je kan je elektrische spanning voorstellen als een hoogteverschil. De pijl wijst bergopwaarts.

De eenheid van spanning is de Volt, met symbool  $V$ , genoemd naar Alessandro Volta (zie Figuur 3.1b). We noteren:

$$[v] = V$$

Ook hier drukken we grootheden cursief en eenheden rechtop.

## 3.2 Afgeleide grootheden: vermogen en energie

### 3.2.1 Vermogen

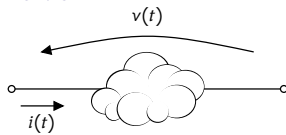
Indien je een stroom door en spanning over een (elektrische) tweepool beschouwt op een specifiek moment  $t$ , dan kan je het vermogen berekenen dat het element verbruikt of genereert.

<sup>1</sup>Het begrip lijnintegraal leer je later in je lessen wiskunde.

De definitie hangt af van de relatieve oriëntatie van de stroom en de spanningspijl. We onderscheiden twee mogelijkheden:

1. tegengesteld georiënteerd noemen we verbruikersconventie
2. gelijk georiënteerd noemen we bronconventie

#### Verbruikersconventie



Het vermogen dat door het element wordt verbruikt op tijdstip  $t$  is dan gegeven door:

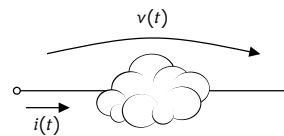
$$p(t) = v(t) \cdot i(t)$$

Indien dit vermogen negatief is, wil dit zeggen dat het element vermogen produceert.

De eenheid van vermogen is de Watt, met symbool W, genoemd naar James Watt (zie Figuur 3.1c). We noteren:

$$[p] = \text{W}$$

#### Bronconventie



Het vermogen dat door het element wordt gegenereerd op tijdstip  $t$  is dan gegeven door:

$$p(t) = v(t) \cdot i(t)$$

Indien dit vermogen negatief is, wil dit zeggen dat het element vermogen verbruikt.

### 3.2.2 Energie

De energie  $E$  die een element verbruikt of genereert in een tijdsinterval  $[t_a, t_b]$ , kan berekend worden door het vermogen te integreren naar de tijd.

$$E = \int_{t_a}^{t_b} p(t) dt$$

Indien  $p(t)$  berekend werd in verbruikersconventie, dan geeft  $E$  het totaal verbruikte vermogen weer. Indien bronconventie gebruikt werd, dan geeft  $E$  het totaal gegenereerde vermogen weer.

De eenheid van energie is de Joule, met symbool J, genoemd naar de Engelse fysicus James Joule (zie Figuur 3.1d).

Het feit dat energie kan berekend worden als de tijdsintegraal van een vermogen maakt duidelijk dat ook de courante eenheden wattuur of kilowattuur met als symbolen Wh en kWh correcte energetische grootheden zijn, waarbij:

$$1 \text{ Wh} = 3.6 \text{ kJ}$$

$$1 \text{ kWh} = 3.6 \text{ MJ}$$

### 3.2.3 Gemiddeld vermogen

Indien we de energie uitmiddelen over de tijd, krijgen we het gemiddelde vermogen:

$$P = \frac{1}{t_b - t_a} \int_{t_a}^{t_b} p(t) dt$$

We kunnen dezelfde opmerkingen maken m.b.t. de stroom/spanning-conventies als voor de grootheid energie.

Merk op dat we vaak symbolen in kleine letters gebruiken voor tijdsafhankelijke grootheden en hoofdletters voor grootheden die gelden voor een hele tijdsperiode.

We spreken van momentane<sup>2</sup> en integrale grootheden. Samengevat:

Momentane grootheden	Integrale grootheden
$v(t), i(t), p(t)$	$E, P$

### 3.3 Signalen in het tijd- en frequentiedomein

De grootheden die we tot nu toe zagen, zijn niet noodzakelijke constant in de tijd. We gaven dit tot hiertoe aan door expliciet hun tijdsafhankelijkheid te noteren, bv.  $v(t)$ . Indien een grootheid functie is van de tijd, spreken we van een signaal of een golf.<sup>3</sup>

Het gedrag van deze signalen in functie van de tijd kan heel grillig zijn. Toch gebruiken we vaak regelmatige signalen. Ze fungeren meestal als testsignaal. Daarom beschrijven we ze kort.

#### 3.3.1 DC-signaal

Als eerste voorbeeld beschouwen we een signaal dat niet verandert in de tijd: het is constant. We noemen dit een zuiver DC-signaal. We zeggen wel eens dat dit signaal een frequentie gelijk aan nul heeft. Vermits we over frequentie spreken (wat we typisch doen bij signalen die op en neer gaan, beter bekend als golven), suggereren we hiermee dat het signaal op en neer gaat, maar dan 0 keer per seconde, m.a.w. nooit.

We geven de tijdsafhankelijkheid van de DC-signalen aan door ze voor te stellen met een hoofdletter, bv. een constante spanning  $V$  of stroom  $I$ . Indien ze een subscript hebben om ze verder te specificeren, dan gebruiken we meestal ook een hoofdletter voor de subscript, bv. de ingangsspanning  $V_{IN}$ , of de uitgangsstroom  $I_{OUT}$ .

We zouden een constante spanning van 5 V kunnen noteren als:

$$V = 5 \text{ V}$$

#### 3.3.2 Sinus

Als tweede voorbeeld beschouwen we een signaal dat op en neer gaat als een wiskundige sinusfunctie:

$$v(t) = A \cdot \sin(\underbrace{2\pi f t}_{\omega} + \phi_0)$$

We noemen  $A$  dan de amplitude van de sinus, en  $f$  de frequentie van de sinus,  $\omega = 2\pi f$  is de hoekfrequentie van de sinus. Je vindt een grafische weergave van een dergelijke golf in Figuur 3.2a.

Merk op dat deze drie waarden  $A$ ,  $f$ , en  $\phi_0$  het signaal helemaal vastleggen. Kan je op de grafiek deze waarden aflezen? Ze vormen eigenlijk een beschrijving van het signaal in het frequentiedomein.

<sup>2</sup>Onder invloed van het Engels spreken we ook wel eens over instantane grootheden.

<sup>3</sup>Je zal in je verdere opleiding enkele vakken krijgen die zich volledig concentreren op signalen/golven, bv. een wiskundevak dat helemaal gewijd is aan signaaltransformaties, en een typisch ingenieursvak dat helemaal gewijd is aan systemen en hoe deze systemen signalen verwerken, nl. systeemtheorie.

Vaak wordt een sinusgolf boven op een DC-signaal gezet. Het DC-signaal fungeert dan als offset.

$$v(t) = V + A \cdot \sin(\underbrace{2\pi f t}_{\omega} + \phi_0)$$

Je vindt een grafische weergave van deze golf in Figuur 3.2b.

Een tijdsafhankelijk signaal met offset, noteren we meestal met een kleine letter en een hoofdletter als subscript, bv. de uitgangsspanning  $v_{OUT}$  of de ingangsstroom  $i_{IN}$ .

### 3.3.3 Blokgolf

Als tweede voorbeeld beschouwen we een signaal dat op en neer springt tussen twee vaste spanningen: de blokgolf.

We hebben geen compacte wiskundige schrijfwijze voor dit signaal, maar de grafiek mag alvast duidelijk zijn: merk op dat de verticale stippellijnen eigenlijk niet tot de grafiek behoren. Ze geven de sprongen in het signaal aan. Deze blokgolf wordt gekenmerkt door de volgende parameters (die je kan aflezen op de grafiek, zie Figuur 3.3):

Parameter	Betekenis	Waarde
$L$	laag niveau	$-0.75 \text{ V}$
$H$	hoog niveau	$1.25 \text{ V}$
$T_L$	tijdsduur laag	$2 \text{ s}$
$T_H$	tijdsduur hoog	$1 \text{ s}$
$T$	periode	$3 \text{ s}$
$D$	duty cycle	$1/3$

De duty cycle is gedefinieerd als de relatieve tijd dat het signaal hoog is gedurende een periode:

$$D = \frac{T_H}{T}$$

We spreken ook over deze blokgolf als een golf met frequentie  $f = 1/T = 1/3 \text{ Hz}$ .

Later (in je cursus over signaaltransformaties) zal je zien dat je deze golf kan ontbinden als een Fourierreeks, d.w.z. als een som van een DC-term en oneindig veel sinussen die als frequentie gehele veelvouden hebben van de basisfrequentie  $f$ .

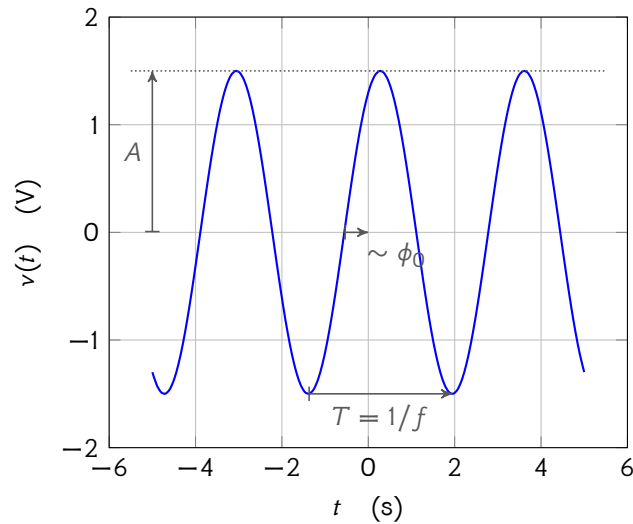
### 3.3.4 Driehoeksgolf

Als derde voorbeeld beschouwen we een signaal dat lineair op en neer gaat, een driehoeksgolf.

Ook hier hebben we geen compacte wiskundige schrijfwijze voor dit signaal, maar de grafiek is opnieuw heel logisch (zie Figuur 3.4).

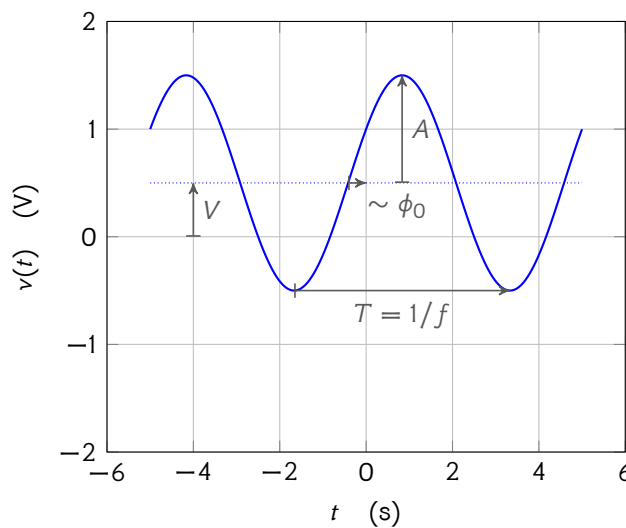
Deze driehoeksgolf wordt gekenmerkt door de volgende parameters (die je kan aflezen op de grafiek):

Sinusgolf met  $A = 1.5 \text{ V}$ ,  $f = 0.3 \text{ Hz}$  en  $\phi_0 = \pi/3 \text{ rad}$



(a) Zuivere sinusgolf

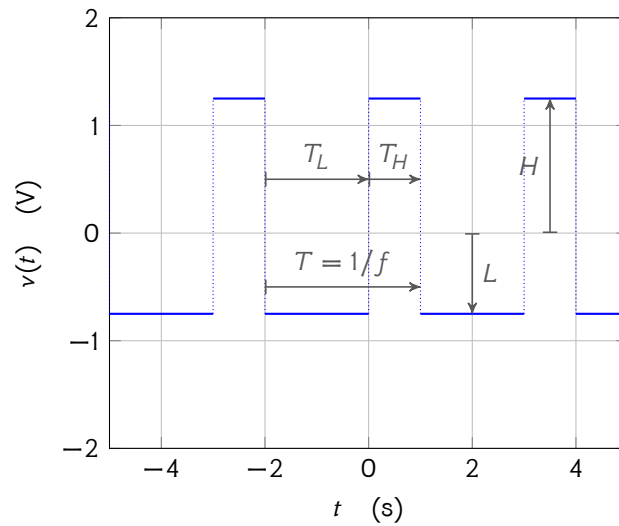
Sinusgolf met  $V = 0.5 \text{ V}$ ,  $A = 1 \text{ V}$ ,  $f = 0.2 \text{ Hz}$  en  $\phi_0 = \pi/6 \text{ rad}$



(b) Sinusgolf met DC offset

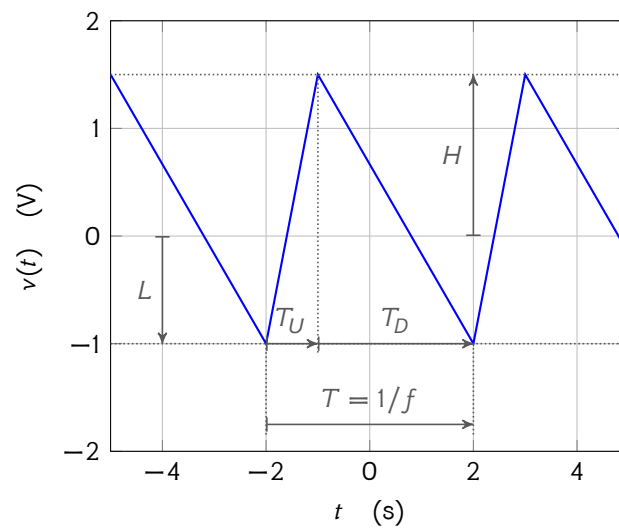
Figuur 3.2: Sinusgolven (het golfje voor  $\phi_0$  duidt aan dat het aangeduide lijnstuk evenredig is met  $\phi_0$ )

Blokgolf met  $L = -0.75 \text{ V}$ ,  $H = 1.25 \text{ V}$ ,  $T = 3 \text{ s}$  en  $D = 1/3$



Figuur 3.3: Blokgolf

Driehoeksgolf met  $L = -1 \text{ V}$ ,  $H = 1.5 \text{ V}$ ,  $T = 4 \text{ s}$  en  $S = 1/4$



Figuur 3.4: Driehoeksgolf

Parameter	Betekenis	Waarde
$L$	laag niveau	-1 V
$H$	hoog niveau	1.5 V
$T_U$	tijdsduur stijging	1 s
$T_D$	tijdsduur daling	3 s
$T$	periode	4 s
$S$	symmetrie	1/4

De symmetrie is gedefinieerd als de relatieve tijd dat het signaal stijgt gedurende een periode:

$$S = \frac{T_U}{T}$$

We spreken ook over deze driehoeksgolf als een golf met frequentie  $f = 1/T = 1/4$  Hz.

Later (in je cursus over signaaltransformaties) zal je zien dat je deze golf opnieuw kan ontbinden als een Fourierreeks, net zoals voor de blok golf. Meer: je kan elke periodieke golf schrijven als een Fourierreeks. Maar daarvoor ga je nog even geduld moeten oefenen.

### 3.3.5 Ruis

Waar voorgaande signalen allemaal deterministisch waren, wat zoveel wil zeggen als 'volledig gekend', kan het ook gebeuren dat we met signalen willen werken waar we enkel statistische gegevens van hebben, bv. hun gemiddelde waarde en hun variantie. Zulke signalen noemen we in het elektronische jargon ruis.

De studie van ruis, wat we de studie van stochastische processen noemen, is een vakgebied op zich. We komen hier in een volgend deel van deze reeks op terug.

## 3.4 Meten van spanningen en stromen

### 3.4.1 DC metingen

DC metingen voeren we doorgaans uit met een multimeter<sup>4</sup>. Hoewel analoge versies van deze toestellen niet moeten onderdoen wat betreft nauwkeurigheid en betrouwbaarheid, stellen we toch vast dat de digitale tegenhanger dominant is in een modern labo.

<sup>4</sup>Heel lang geleden waren deze meters ook gekend als AVO meters (Ampère- Volt-Ohm-meter). Meer recent kunnen deze meters nog andere grootheden meten (capaciteit, frequentie, continuïteit, kniespanningen, e.a.), daarom spreken we terecht van multimeters.



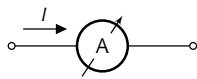
(a) Analoge AVO meter



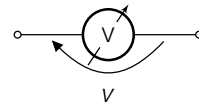
(b) Digitale multimeter

Figuur 3.5: Meettoestellen voor de elektrische basisgrootheden

Afhankelijk van de grootheid die we meten met de multimeter, stellen we hem voor als een cirkel met twee klemmen met daarin de eenheid van de grootheid die we willen. Merk op dat als we een grootheid noteren die afgelezen werd op de multimeter, het belangrijk is om te weten hoe de meter (wat polariteit betreft) werd aangesloten.



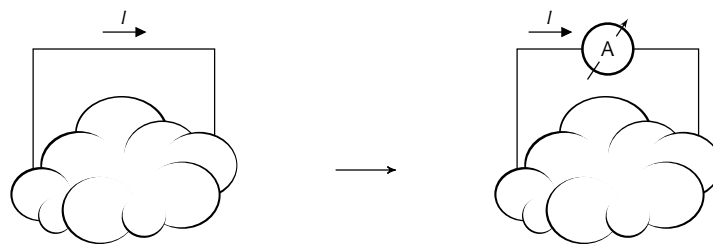
(a) een stroommeter



(b) een spanningsmeter

In de volksmond spreken we wel eens van een ampèremeter en een voltmeter.

**Stroom** Stromen meten we in serie in een netwerk. D.w.z. dat we het netwerk moeten openknippen en onze multimeter ertussen schakelen.



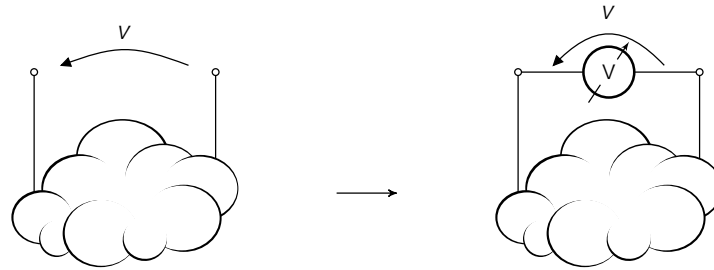
Ook een stroommeter heeft een oriëntatie. Doorgaans heeft het toestel een rode klem en een zwarte klem. De gemeten stroom vloeit van de rode klem door het toestel naar de zwarte klem. Is de gemeten waarde negatief, dan vloeide de stroom in de omgekeerde richting.

**Opmerkingen** Let op!

Lage inwendige weerstand — Wees je ervan bewust dat je meter in de stand om stromen te meten een heel lage inwendige weerstand heeft. Dat wil zeggen dat hij zich quasi als een kortsluiting gedraagt. Sluit je de meter aan op een twee meetpunten met een grote spanning (bijvoorbeeld, rechtstreeks op een batterij), dan zal er een grote stroom gaan vloeien! Bereid je maar voor op een fikse steekvlam!

De stroommeetstand is dus een gevaarlijke stand voor de meter. Laat hem nooit in die stand staan. Maar niet nul — Wees je ervan bewust dat je meter een inwendige weerstand heeft die niet nul is. Bijgevolg beïnvloedt de meter het netwerk. Zolang de inwendige weerstand van de meter klein is in vergelijking met de impedantie die hij tussen zijn klemmen ziet, is deze invloed verwaarloosbaar.

**Spanning** Spanningen meten we parallel aan een netwerk. D.w.z. dat we onze meetpennen op twee verschillende punten in het netwerk plaatsen, zodat we de spanning (of het potentiaalverschil) tussen die twee punten kunnen meten.



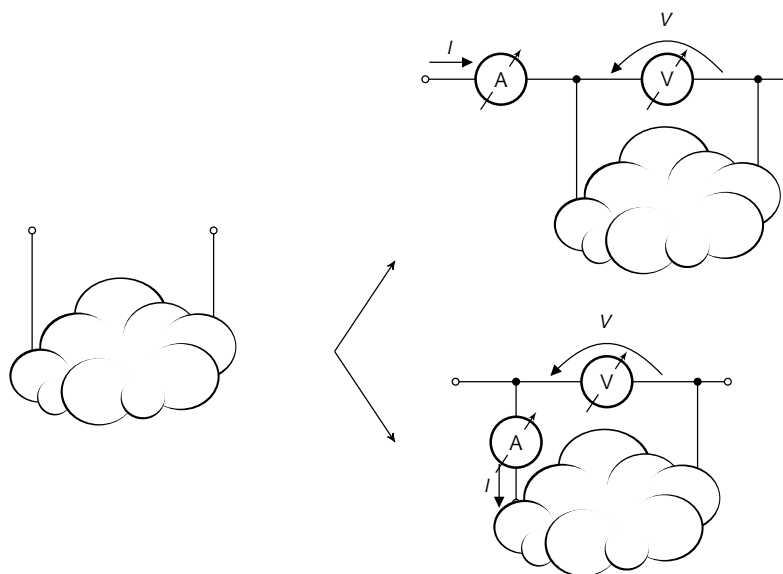
Ook een spanningsmeter heeft een oriëntatie. Doorgaans heeft het toestel een rode klem en een zwarte klem. De rode klem is de positieve, de zwarte de negatieve. De pijl wijst dus van zwarte naar rode klem. Is de gemeten waarde negatief, dan staat de spanningspijl van de rode naar de zwarte klem.

**Opmerkingen** Let op!

Hoge inwendige weerstand — Wees je ervan bewust dat je meter in de stand om spanningen te meten quasi geen stroom zal doorlaten. Als je hem dus in serie in een tak zet waar een grote stroom door geduwd wordt (bv. in serie met een vrijlooptiode), dan kan je er zeker van zijn dat er een grote spanning over de klemmen komt te staan die je meter onherroepelijk kapot maakt.

Maar niet oneindig — Wees je ervan bewust dat je meter in spanningsmodus geen oneindige weerstand heeft tussen de twee meetklemmen. Als je dus de spanning meet tussen twee uitgangsklemmen met een hoge impedantie, dan kan het zijn dat je maar een fractie van de spanning meet die er onbelast op de klemmen zou staan.

**Vermogen** Vermogen meten we met een combinatie van een spannings- en een stroommeter. Bij een tweepool kunnen we het verbruikte vermogen op twee manieren berekenen:



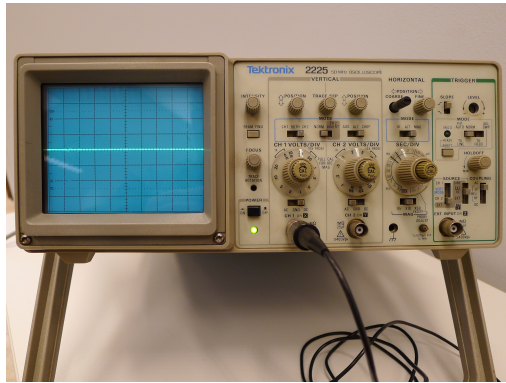
De bovenste is meer geschikt voor tweepolen met een kleine impedantie, de onderste meer voor tweepolen met een grote impedantie.

Indien de stroom en de spanning constant zijn (DC), dan is het vermogen het product van beide.

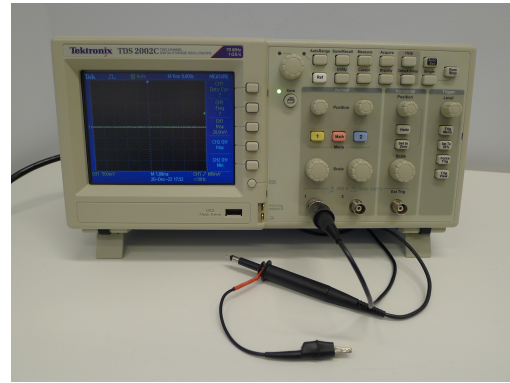
$$P = I \cdot V$$

### 3.4.2 Tijdsmetingen

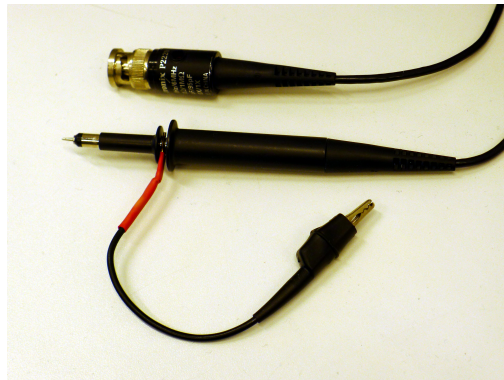
Tijdsmetingen voeren we uit met een oscilloscoop. Het volstaat voorlopig om te weten dat dit toestel in staat is een  $x, y$ -grafiek te tekenen met de tijd als  $x$ -waarde en een gemeten spanning als  $y$ -waarde. Hoewel analoge versies van deze toestellen niet moeten onderdoen wat betreft nauwkeurigheid en betrouwbaarheid, stellen we toch vast dat ook hier de digitale tegenhanger dominant is in een modern labo.



(a) Analoge oscilloscoop



(b) Digitale oscilloscoop



(c) Een meetpen of probe

Figuur 3.7: Basismettoestel voor tijdsmetingen: de oscilloscoop

#### Opmerkingen Let op!

Spanningsmeting met hoge impedantie — Een oscilloscoop is gericht op spanningsmetingen en heeft daarvoor een hoge ingangsimpedantie. Wil je een stroom meten, dan ga je een kleine geijkte meetweerstand moeten gebruiken, zodat je de stroom kan meten als de spanning over de weerstand gedeeld door zijn gekende waarde.

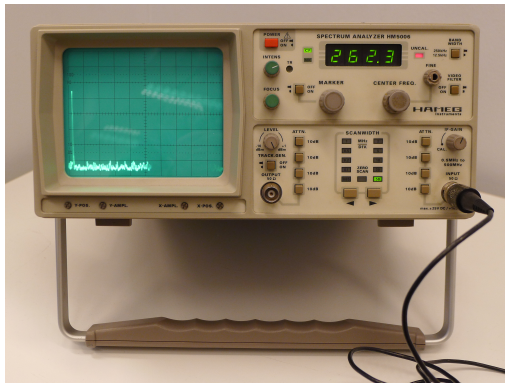
Maar niet oneindig — Wees je ervan bewust dat je oscilloscoop geen oneindige ingangsweerstand heeft. Bijgevolg beïnvloedt de meter het netwerk. Dat wordt belangrijk van zodra de knooppuntsimpedantie van het te meten netwerk vergelijkbaar wordt met de ingangsimpedantie van de oscilloscoop.

En niet differentieel — Een meetpen (ook wel probe genoemd) van een oscilloscoop heeft naast de meettip een referentiepotentiaalklem (de massaklem). Die heeft als doel de referentiepotentiaal van de schakeling die via een scheidingstransfo of batterij gevoed wordt op hetzelfde potentiaalniveau te brengen als dat van de oscilloscoop. De klem is niet bedoeld om differentieel te meten. Meer zelfs: als je een schakeling wil meten die niet vlottend gevoed is, dan mag je ze niet aansluiten! De klem is immers verbonden met de aardingsklem van je oscilloscoop. Ze aansluiten op een spanning die verschilt van de aardingspotentiaal zal in het beste geval de verliesstroomschakelaar doen afschakelen. In het slechtste geval geeft je oscilloscoop de geest en staat er een gevaarlijke spanning op de behuizing van je toestel! Wil je differentieel meten, dan moet je twee meetkanalen gebruiken.

Tijdens de practica ga je dit toestel in detail leren kennen.

### 3.4.3 Frequentiemetingen

Frequentiemetingen voeren we uit met een spectrum analyzer. Het volstaat voorlopig om te weten dat dit toestel in staat is een  $x, y$ -grafiek te tekenen met de frequentie als  $x$ -waarde en per frequentie de gemeten magnitude als  $y$ -waarde. Hoewel analoge versies van deze toestellen niet moeten onderdoen wat betreft nauwkeurigheid en betrouwbaarheid, stellen we toch vast dat ook hier de digitale tegenhanger dominant is in een modern labo.



(a) Analoge spectrumanalyzer



(b) Digitale spectrumanalyzer

Figuur 3.8: Basismettoestel voor frequentiemetingen: de spectrumanalyzer

**Opmerkingen** Let op!

**Spanningsmeting met vaste impedantie** — Een spectrumanalyzer is ofwel gericht op spanningsmetingen met een hoge impedantie of met een gekende lage impedantie (courant  $50\ \Omega$ ) om reflecties te vermijden (zie hoofdstuk over impedantiematching). Stel de ingangsimpedantie van het toestel correct in voor je begint te meten!

**Ook met oscilloscoop** — Moderne digitale oscilloscopen kunnen ook het tijddomein omzetten naar het frequentiedomein door een discrete Fouriertransformatie uit te rekenen. Op die manier kan je je oscilloscoop ook als spectrumanalyzer gebruiken.

Tijdens je lessen telecommunicatie ga je de spectrumanalyzer meer in detail leren kennen.

## 3.5 Simuleren van spanningen en stromen

Je kan ook spanningen en stromen simuleren door een netwerkbeschrijving door een computerprogramma te laten analyseren en het rekenwerk voor jou uit te voeren. We gaan hier later dieper op in.

## Overzicht

4.1	Elementen vs. componenten . . . . .	23
4.2	Classificatie . . . . .	24
4.3	Passieve elementen . . . . .	24
4.3.1	De weerstand, condensator en spoel . . . . .	24
4.3.2	De ideale diode . . . . .	26
4.3.3	De ideale Zener-diode . . . . .	28
4.4	Actieve elementen . . . . .	29
4.4.1	Autonome bronnen . . . . .	29
4.4.2	Afhankelijke bronnen . . . . .	30
4.4.3	Ideale operationele versterker . . . . .	31
4.5	Neutrale elementen . . . . .	34
4.5.1	De ideale transformator . . . . .	34
4.6	Overzicht en slotbeschouwing . . . . .	38

In dit hoofdstuk leren we de bouwstenen kennen waarmee we netwerken bouwen. De bouwstenen hebben elk een aantal aansluitpunten (klemmen). Door deze punten met (perfecte) geleiders te verbinden, maken we een netwerk.

We kunnen een netwerk bekijken als een graaf (zie Bijlage C), waarbij de geleiders de knopen zijn en de elementen/componenten de takken. Om die reden noemen we de wiskundige vergelijkingen die de werking van de elementen/componenten beschrijven ook wel takvergelijkingen.

In dit hoofdstuk ga je ook de concepten m.b.t. de basisgrootheden kunnen inoefenen.

### 4.1 Elementen vs. componenten

Het onderscheid tussen elementen en componenten is eenvoudig:

Een element is een ideale bouwsteen, beschreven door een ideaal wiskundig model.

Een component is een reële bouwsteen, zoals je die zou kopen bij een componentenleverancier.

Vaak gedragen componenten zich gelijkaardig aan het element waarbij ze horen, maar hun gedrag is niet ideaal (we hebben meer complexe modellen nodig om hun gedrag te beschrijven) en ze zijn onderhevig aan beperkingen (maximum ratings).

Hoewel het geen strikt netwerkelement is, kunnen we de parallel trekken met het duo van een ideale geleider (het element) en een elektrisch geleidende draad (de component).

De ideale geleider heeft een oneindige geleidbaarheid en kan een willekeurige stroom voeren. Een draad heeft een beperkte geleidbaarheid en heeft een maximumwaarde voor de stroom die de draad kan verdragen, anders smelt hij door.

In dit hoofdstuk concentreren we ons op (ideale) elementen. De (reële) componenten komen in deel 2 van deze reeks aan bod.

## 4.2 Classificatie

We kunnen elementen en componenten indelen volgens een aantal criteria:

**Het aantal aansluitklemmen** Een element heeft minimaal twee aansluitklemmen. Indien het element  $n$  klemmen heeft, spreken we van een  $n$ -pool.

**Passief / actief / reactief / neutraal** Een passief element voegt geen vermogen toe aan het netwerk. Een zuiver passief element verbruikt vermogen. Een actief element brengt voegt wel vermogen toe aan het netwerk. Een reactief element slaat energie op en geeft die achteraf weer vrij. Een neutraal element verbruikt of genereert geen vermogen, het slaat ook geen energie op om die achteraf terug vrij te geven: het is perfect neutraal. In de volgende paragrafen komen we hierop terug.

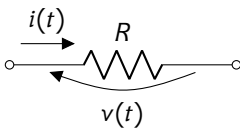
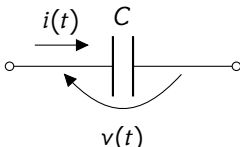
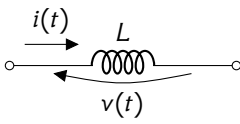
**Lineair / niet-lineair** Een element is lineair indien het een lineair verband creëert tussen stroom en spanning. Indien dat niet het geval is, dan spreken we van een niet-lineair element.

## 4.3 Passieve elementen

Zoals reeds gezegd: passieve elementen zijn elementen die geen energie aan het netwerk toevoegen.

### 4.3.1 De weerstand, condensator en spoel

De weerstand, de condensator en de spoel zijn allemaal tweepolen. Hun netwerksymbool, de bijhorende takvergelijking, grootheid en eenheden worden samengevat in de onderstaande tabel:

Element	Netwerksymbool	Takvergelijking	Grootheid	Eenheid
Weerstand		$v(t) = Ri(t)$	$R$	$\Omega$
Condensator		$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$	$C$	$F$
Spoel		$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$	$L$	$H$

De weerstand is een zuivere verbruiker en in die zin zuiver passief. De spoel en de condensator zijn reactieve elementen, wat wil zeggen dat ze energie tijdelijk opslaan en weer vrijgeven.

De takvergelijkingen noemen we de (veralgemeende) wet van Ohm. Merk op dat de takvergelijking uitgaat van een verbruikersconventie wat betreft stroom en spanningspijl!

#### Opmerkingen

- Het weerstandseffect (het feit dat de stroom door een geleider evenredig is met de aangelegde spanning) werd eerst beschreven door Georg Ohm (zie Figuur 4.1a) die omwille van gebrekkige meetapparatuur, jarenlang niet geloofd werd!
- De twee andere eenheden werden als eerbetoon genoemd naar Michael Faraday (zie Figuur 4.1b) en Joseph Henry (zie Figuur 4.1c).
- De symbolen  $R$  en  $C$  werden duidelijk gekozen i.f.v. de naam van de component. Het symbool  $L$  gebruiken we als eerbetoon aan Heinrich Lenz (zie Figuur 4.1d).
- De eenheden van grootheden  $R$ ,  $C$  en  $L$  kunnen gemakkelijk geschreven worden in termen van de basiseenheden, door de grootheid uit de takvergelijking op te lossen en dan de eenheid te berekenen van beide leden.<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{v(t)}{i(t)} & \Rightarrow & & [R] &= \frac{[v(t)]}{[i(t)]} = \frac{V}{A} \\
 C &= \frac{i(t)}{\frac{dv(t)}{dt}} & \Rightarrow & & [C] &= \frac{[i(t)]}{\left[\frac{dv(t)}{dt}\right]} = \frac{A}{V/s} = A s/V \\
 L &= \frac{v(t)}{\frac{di(t)}{dt}} & \Rightarrow & & [L] &= \frac{[v(t)]}{\left[\frac{di(t)}{dt}\right]} = \frac{V}{A/s} = V s/A
 \end{aligned}$$

Enkele producten van deze grootheden, leveren de eenheid seconde op. We noemen ze tijdconstanten en ze zullen een cruciale rol spelen in het tijdsgedrag van netwerken. We duiden tijdconstanten dikwijls aan met de Griekse letter  $\tau$ .

$$\tau_{RC} = RC \qquad \tau_{RL} = \frac{L}{R} \qquad \tau_{LC} = \sqrt{LC}$$

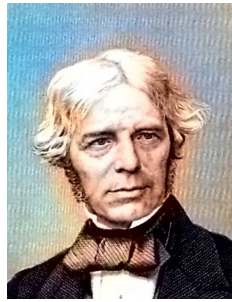
Ze hebben alle de eenheid seconde:

$$[RC] = \left[ \frac{L}{R} \right] = [\sqrt{LC}] = s$$

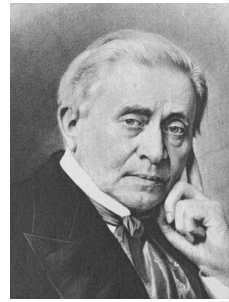
<sup>1</sup>Merk op dat afleiden naar de tijd wat eenheden betreft overeenkomt met delen door de tijd.



(a) Georg Simon Ohm  
(\*1789–†1854)



(b) Michael Faraday  
(\*1826–†1971)



(c) Joseph Henry  
(\*1797–†1878)



(d) Heinrich Friedrich Lenz  
(\*1804–†1865)

Figuur 4.1: Grondleggers van de passieve elementen

## Oefeningen

**Oefening 4.3.1-1:** Beschouw een weerstand van  $100\ \Omega$ , waaraan we een sinusvormige spanning aanleggen met amplitude 2 V, een frequentie van 3 kHz met een fasevertraging van  $20^\circ$ .

1. Teken deze weerstand en voorzie hem van de nodige stroom- en spanningspijlen uitgaande van de 'verbruikersconventie'.
2. Stel een formule op voor het momentane vermogen dat de weerstand verbruikt.
3. Bereken het gemiddelde vermogen dat de weerstand verbruikt.
4. Hoeveel energie verbruikt de weerstand gemiddeld over een tijdspanne van 5 s?

**Oefening 4.3.1-2:** Beschouw een condensator van  $1\ \mu\text{F}$ , waaraan we een sinusvormige spanning aanleggen met amplitude 1 V, een frequentie van 1 MHz met een fasevoorijsing van  $50^\circ$ .

1. Teken deze condensator en voorzie hem van de nodige stroom- en spanningspijlen uitgaande van de 'verbruikersconventie'.
2. Stel een formule op voor het momentane vermogen dat de condensator verbruikt.
3. Verifieer dat het gemiddelde vermogen dat de condensator verbruikt effectief nul is.

**Oefening 4.3.1-3:** Beschouw een spoel van  $1\ \text{nH}$ , waaraan we een sinusvormige spanning aanleggen met amplitude 2 V, een frequentie van 500 kHz met een fasenaijling van  $20^\circ$ .

1. Teken deze spoel en voorzie ze van de nodige stroom- en spanningspijlen uitgaande van de 'verbruikersconventie'.
2. Stel een formule op voor het momentane vermogen dat de spoel verbruikt.
3. Verifieer dat het gemiddelde vermogen dat de spoel verbruikt effectief nul is.

**Oefening 4.3.1-4:** Als je weet dat

$$\Omega = \text{V/A}$$

$$\text{F} = \text{C/V}$$

$$\text{H} = \text{Wb/A}$$

verifieer dan dat de tijdconstanten  $\tau_{RC}$ ,  $\tau_{RL}$  en  $\tau_{LC}$  wel degelijk de eenheid tijd hebben.

## 4.3.2 De ideale diode

De ideale diode is een tweepool. Ze legt een niet-lineair verband tussen de stroom en de spanning. We noemen de klemmen anode ( $A$ ) en kathode ( $K$ ). De diode (eerst gepatenteerd door John Fleming, zie Figuur 4.2a) laat stroom door van anode naar kathode maar blokkeert stroom in de omgekeerde zin.

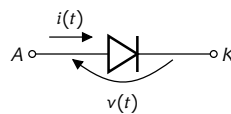


(a) John Ambrose Fleming  
(\*1849–†1945)



(b) Clarence Melvin Zener  
(\*1905–†1993)

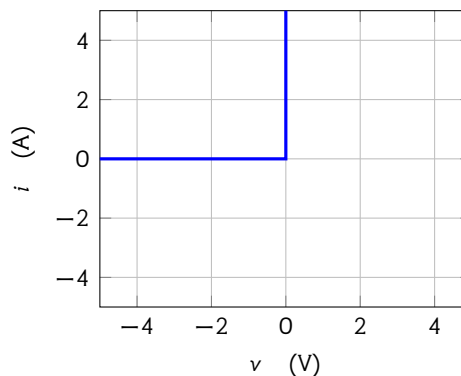
Figuur 4.2: Grondleggers van de diodetechnologie



De stroom-spanningsrelatie die de ideale diode oplegt, kan wiskundig geschreven worden als:

$$\begin{cases} v(t) \leq 0 \\ i(t) \geq 0 \end{cases}$$

Deze cryptische beschrijving wordt veel duidelijker in de grafische voorstelling van Figuur 4.3. De verticale tak geeft het gedrag van een perfecte geleider weer: ongeacht de stroom blijft de spanning erover gelijk aan nul. De horizontale tak geeft het gedrag van een perfecte isolator weer: ongeacht de spanning blijft de stroom erdoor gelijk aan nul.



Figuur 4.3: Stroom-spanningskarakteristiek van een ideale diode: de diode is een perfecte isolator voor negatieve spanningen; als de spanning nul is, is het een perfecte geleider.

Van zodra we de spanning positief proberen te maken, wordt de stroom zo groot als nodig om die spanning op nul te houden (indien nodig zelfs oneindig). We zeggen dat in deze toestand de diode voorwaarts gepolariseerd is.

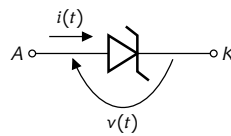
Van zodra we de spanning negatief proberen te maken, geleidt de diode geen stroom meer. We zeggen dat in deze toestand de diode invers gepolariseerd is.

Merk op dat de ideale diode geen vermogen verbruikt, aangezien ofwel de spanning over de diode nul is, ofwel de stroom erdoor nul is. Aangezien de ideale diode ook geen vermogen opslaat en later weer vrijgeeft zou

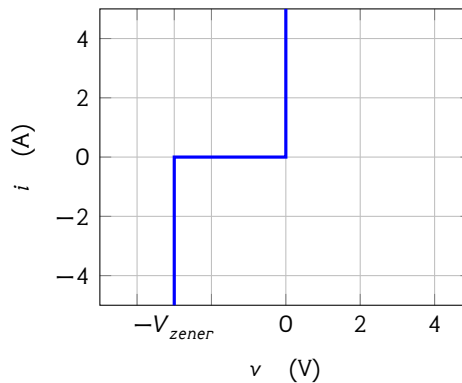
je kunnen argumenteren dat een diode een neutraal element is. Maar een bijzondere variant van de diode, de Zener-diode, verbruikt wel degelijk vermogen, waardoor we in het algemeen de diodes niet indelen bij de neutrale elementen.

### 4.3.3 De ideale Zener-diode

Een Zenerdiode is een variant op de standaarddiode. Waar de gewone diode spert als ze invers gepolariseerd is, gaat de zenerdiode enkel sperren tot een bepaalde inverse spanning bereikt is. Boven dat niveau gaat ze terug stroom geleiden. We noemen dat 'doorbraak'. De spanning waarbij dat gebeurt noemen we de doorbraak- of Zenerspanning. Het Zenereffect (het feit dat isolatoren stroom gaan geleiden indien een bepaalde spanning overschreden wordt) werd ontdekt door Clarence Zener (zie Figuur 4.2b).



De stroom-spanningsgrafiek ziet er bijgevolg uit als volgt:



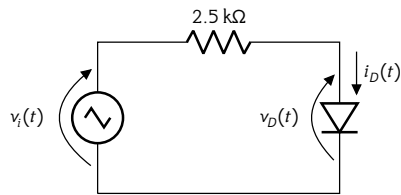
Figuur 4.4: Stroom-spanningskarakteristiek van een ideale Zenerdiode: de diode is een perfecte isolator voor negatieve aangelegde spanningen zolang een bepaalde Zenerspanning niet overschreden wordt en een perfecte geleider in de andere gevallen.

Elke Zenerdiode heeft zijn eigen specifieke doorbraakspanning. Die Zenerspanning is een essentiële parameter van deze diode. We vermelden deze spanning steeds wanneer we spreken over een Zenerdiode, bv. een Zenerdiode van 5.6 V. De zenerdiode wordt frequent gebruikt als spanningsreferentie.

---

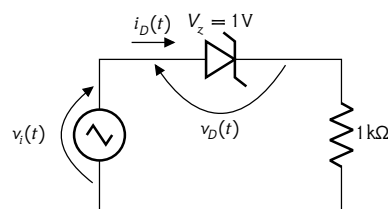
### Oefeningen

**Oefening 4.3.3-1:** Beschouw het onderstaande netwerk met een ideale diode. De signaalbron  $v_i(t)$  produceert een driehoeksgolf met frequentie 1 kHz en symmetrie 0.25 tussen  $-0.25$  V met  $0.75$  V en  $v_i(0) = 0$  V en  $v_i'(0) > 0$ .



1. Teken de golfvorm van de spanning  $v_D(t)$  over de diode.
2. Teken de golfvorm van de stroom  $i_D(t)$  door de diode.
3. Bereken het gemiddelde vermogen dat de bron moet leveren aan het netwerk.

**Oefening 4.3.3-2:** Beschouw het onderstaande netwerk met een Zenerdiode met zenerspanning 1V. De signaalbron  $v_i(t)$  produceert een driehoeksgolf met frequentie 1MHz met symmetrie 0.4 tussen  $-1.75\text{ V}$  met  $0.5\text{ V}$  en  $v_i(0) = 0.5\text{ V}$  en  $\lim_{t \rightarrow 0^+} v_i'(t) < 0$ .



1. Teken de golfvorm van de spanning  $v_D(t)$  over de diode.
2. Teken de golfvorm van de stroom  $i_D(t)$  door de diode.
3. Bereken het gemiddelde vermogen dat de bron moet leveren aan het netwerk.

## 4.4 Actieve elementen

Actieve elementen zijn elementen die energie toevoegen aan het netwerk.

### 4.4.1 Autonome bronnen

De spannings- en stroombron zijn tweepolen. We noemen ze autonoom indien hun spanning en stroom niet afhankelijk zijn van een andere variabele in het netwerk. Hun netwerksymbool, de bijhorende takvergelijking, grootheid en eenheden worden samengevat in de onderstaande tabel:

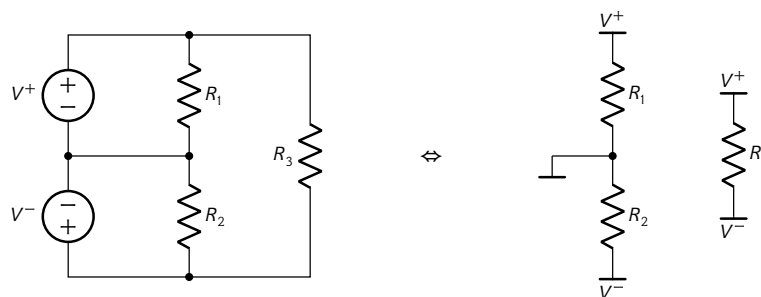
Element	Netwerksymbool	Takvergelijking	Grootheid	Eenheid
Spanningsbron		$v(t) = V$	$V$	$V$
Stroombron		$i(t) = I$	$I$	$A$

Merk op dat we (doorgaans) voor deze elementen bronconventie gebruiken. De bronnen zoals ze hierboven in de tabel staan, suggereren een DC bron te zijn (constant in de tijd) omwille van de hoofdletter van de grootheid die erbij staat. Indien we een variabele bron gebruiken, vervangen we deze hoofdletter doorgaans door een kleine letter en noteren we de tijdsafhankelijkheid, bv.  $v_{IN}(t)$  voor een bron die eeningangssignaal in het netwerk brengt.

Een spanningsbron (in zijn ideale vorm) heeft een inwendige weerstand die nul is. De bron probeert dus op geen enkele manier de stroom die erdoor vloeit aan banden te leggen. Anders gesteld: de stroom die vloeit, beïnvloedt de spanning niet. Concreet wil dit ook zeggen dat een ideale spanningsbron met spanning  $V = 0V$  eigenlijk een perfecte geleider is.

Een stroombron (in zijn ideale vorm) heeft een inwendige weerstand die oneindig is. De bron probeert dus op geen enkele manier de spanning die erdoor vloeit aan banden te leggen. Anders gesteld: de spanning die erover staat, beïnvloedt de stroom niet. Concreet wil dit ook zeggen dat een ideale stroombron met stroom  $I = 0A$  eigenlijk een perfecte isolator is.

Het zal later blijken dat we in elektronicanetwerken op vele plaatsen een voedingsspanning nodig hebben. Om te vermijden dat deze bronnen in de schema's teveel aandacht zouden trekken, gebruiken we vaak aparte symbolen voor de positieve en negatieve klemmen van de voedingsbron. Een dubbele voedingsspanning  $V^+$  en  $V^-$  wordt dan op de volgende manier weergegeven. Links staat de traditionele manier om de bronnen te tekenen, rechts de meer gebruikelijke:



Beide tekenwijzen zijn equivalent. Voor signaalbronnen gebruiken we doorgaans het conventionele symbool (met de cirkel), voor voedingsspanningsbronnen doorgaans de compacte voorstelling. Voor stroombronnen hebben we geen gelijkaardige voorstelling.

#### 4.4.2 Afhankelijke bronnen

Bronnen hangen soms af van andere stromen of spanning in het netwerk. In dat geval zijn ze niet autonoom en noemen we ze afhankelijke bronnen. Het zijn als het ware versterkers van een andere grootheid in het netwerk. Omdat ze naast de twee klemmen van de bron ook twee meetklemmen hebben, zijn het eigenlijk vierpolen.

Hun netwerksymbool, de bijhorende takvergelijking, grootheid en eenheden worden samengevat in de onderstaande tabel:

Element	Netwerksymbool	Takvergelijking	Grootheid	Eenheid
VCVS		$v(t) = A_v v_c(t)$	$A_v$	—
CCVS		$v(t) = Z i_c(t)$	$Z$	V/A
VCCS		$i(t) = Y v_c(t)$	$Y$	A/V
CCCS		$i(t) = A_i i_c(t)$	$A_i$	—

De elementnamen zijn afkortingen voor de courante Engelstalige benamingen: voltage-controlled voltage source, voltage-controlled current source, current-controlled voltage source en current-controlled current source.

Ook hier geldt dat de inwendige weerstand van de afhankelijke spanningsbronnen nul is, en die van de afhankelijke stroombronnen oneindig.

#### 4.4.3 Ideale operationele versterker

De operationele versterker (of opamp als afkorting van operational amplifier) kunnen we modelleren aan de hand van enkele elementen die we tot nu toe zagen.

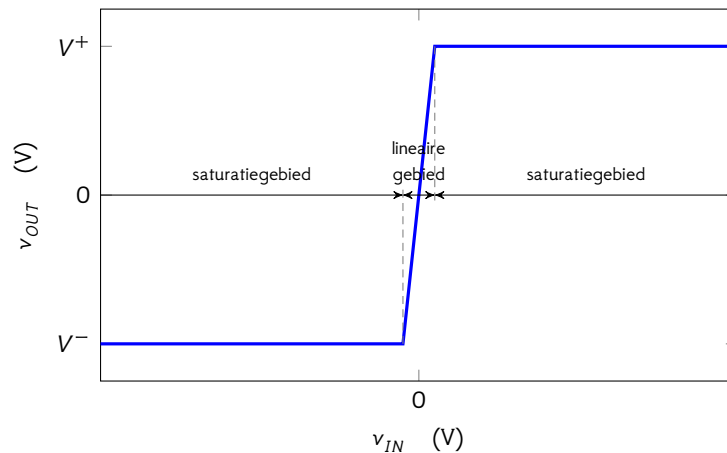
Op zich zou je de afhankelijke bronnen uit de vorige paragraaf al kunnen beschouwen als ideale operationele versterkers, maar dan zijn ze volledig lineair. Indien we echter enkele niet-lineaire aspecten aan het opampmodel toevoegen, dan kunnen we al heel wat bruikbare schakelingen beschrijven, zonder in te hoeven gaan op de fijne details van de operationele versterker als component. Vandaar dat we een kleine extra verfijning aanbrengen aan het netwerkelement 'ideale opamp'.

We kunnen voor elk van de afhankelijke bronnen een bijhorend opampmodel definiëren:

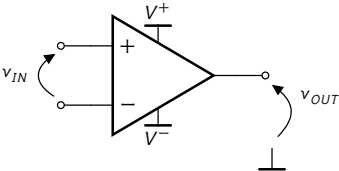
- VCVS: Operationele versterker
- CCVS: Operationele transimpedantieversterker<sup>2</sup>
- VCCS: Operationele transconductantieversterker
- CCCS: Operationele stroomversterker

We beperken ons hier voor de eenvoud tot het model dat hoort bij de spanningsafhankelijke spanningsbron (VCVS). Meer nog: we gaan veronderstellen dat de opamp maar één uitgangsklem heeft, het is een opamp met single-ended output.

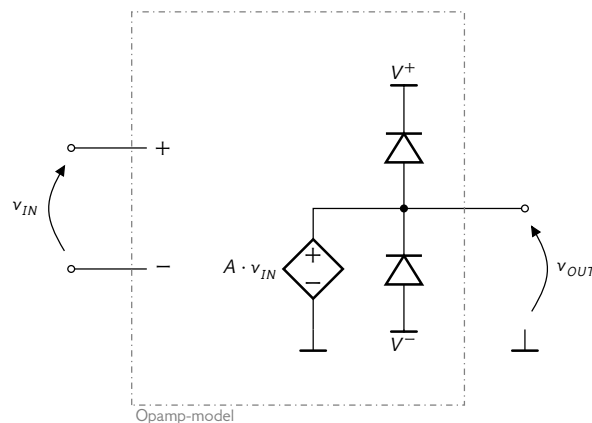
<sup>2</sup>De begrippen transimpedantie en transconductantie worden in een volgend hoofdstuk toegelicht.



Figuur 4.5: Spanningsversterker van een ideale opamp; indien de uitgangsspanning tegen de voedingsspanning ( $V^+$  of  $V^-$ ) aanzit dan zeggen we dat de opamp gesatureerd is, in het andere geval zeggen we dat de opamp in zijn lineaire gebied werkt. De helling van de grafiek geeft dan de spanningsversterking weer.

Element	Netwerksymbool	Takvergelijking	Grootheid	Eenheid
Opamp		$v_{OUT} = \min \left\{ \begin{array}{l} V^+ \\ \max \left\{ \begin{array}{l} A \cdot v_{IN} \\ V^- \end{array} \right\} \end{array} \right.$	$A$	—

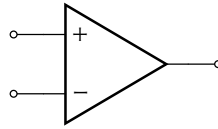
De takvergelijking is niet meteen elegant, maar de betekenis ervan zal duidelijker worden aan de hand van het volgende eenvoudige, equivalente netwerkmodel:



De opamp is dus een ordinare spanningsafhankelijke spanningsbron waarbij de uitgangsspanning door de twee diodes wordt beperkt tot het bereik tussen de voedingrails, d.w.z. van  $V^-$  tot  $V^+$ . Indien de diodes deze spanning beperken, beschrijven we dit fenomeen als 'het clippen van de uitgang door voedingsspanning'.<sup>3</sup> Het verband tussen de ingangs- en de uitgangsspanning kan eenvoudig voorgesteld worden m.b.v. de grafiek van Figuur 4.5.

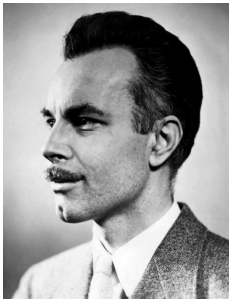
Vaak tekenen we ook de voedingsaansluitingen niet (en veronderstellen we impliciet dat de opamp gevoed is met gekende voedingsspanningen). Het symbool wordt dan vereenvoudigd tot:

<sup>3</sup>De betekenis van 'to clip' in het Engels is 'vastmaken' en duidt in dit geval op het feit dat de uitgangsspanning vastgehouden wordt op het niveau van de positieve of negatieve voedingsspanning.



Merk overigens op dat het eenvoudige opampmodel, dat we hierboven voorstelden, het vermogenverbruik van de opamp niet correct weergeeft. Alle stroom die de opamp produceert moet immers vanuit de positieve voedingsklem toegevoerd worden, en de stroom die de opamp opneemt moet immers naar de negatieve voedingsklem worden afgevoerd. Het model is dus goed om het gedrag van de opamp te bestuderen, maar niet zijn vermogenverbruik.

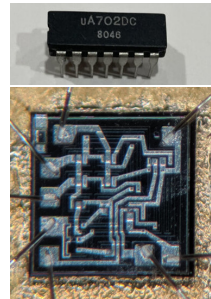
De opamp werd als bouwblok sterk gepromoot door George A. Philbrick (zie Figuur 4.6a) die met zijn bedrijf GAP/Researches en hun vacuümbuis-opamp K2-W (zie Figuur 4.6b) een verbeterde versie van de eerste opamp van Loebe Julie op de markt brachten. Ze zetten daarmee de toon voor de moderne analoge elektronica. Enkele jaren later maakte Bob Widlar (zie Figuur 4.6d) de eerste halfgeleideropamp bij Fairchild Semiconductor, de  $\mu A702$  (zie Figuur 4.6c). De opamp is niet meer weg te denken uit een modern analogoos ontwerp.



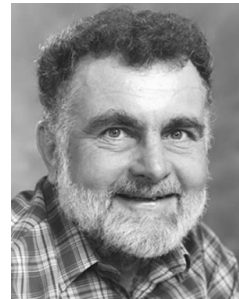
(a) George A. Philbrick  
(\*1913–†1974)



(b) De eerste succesvolle  
vacuümbuis-opamp



(c) De eerste halfgeleideropamp



(d) Robert Widlar  
(\*1937–†1991)

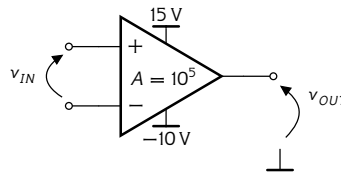
Figuur 4.6: De eerste opamp(ontwerper)s

---

## Oefeningen

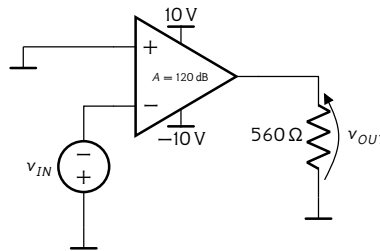
**Oefening 4.4.3-1:** Bereken deingangsspanning waarbij onderstaande opamp overgaat

- van zijn lineaire gebied naar het positieve saturatiegebied,
- van zijn lineaire gebied naar het negatieve saturatiegebied.



**Oefening 4.4.3-2:** Bereken het gemiddelde vermogenverbruik in de belastingsweerstand gegeven

$$v_{IN}(t) = 15 \times 10^{-6} \sin(2\pi \cdot 50 \text{ Hz} \cdot t)$$

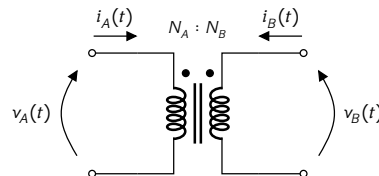


## 4.5 Neutrale elementen

### 4.5.1 De ideale transformator

**Werking** De ideale transformator is een vierpool. Als component bestaat hij uit twee spoelen waarvan de magnetische velden gekoppeld zijn, vaak met behulp van een ferromagnetisch materiaal (dat de magnetische velden goed samenhoudt). Als element doet hij dat perfect: hij is ideaal.

Het netwerksymbool van de ideale transformator ziet er als volgt uit:



De dubbele lijn in het midden stelt de ferromagnetische kern voor. De stippen geven weer of de spanning geïnverteerd wordt (stip van de primaire boven en van de secundaire onder, of vice versa) of niet (stippen samen boven of onder).

De ideale transformator heeft enkel zin indien je er een wisselspanning of -stroom aanlegt, waarvan de DC component nul is! Elke DC component zal immers de wikkeling zien als een kortsluiting.

Typisch gebruiken we een transformator om sinusvormige wisselspanningen te transformeren.

Het gedrag van de ideale transformator wordt gekenmerkt door de wikkerverhouding. Waarbij we veronderstellen dat de primaire spoel  $N_A$  wikkelingen heeft en de secundaire spoel  $N_B$  wikkelingen.

Omdat de transformator normaal gebruikt wordt met sinusvormige spanningen en stromen, schrijven we:

$$\begin{aligned} v_A(t) &= V_a \sin \omega t & i_A(t) &= I_a \sin \omega t \\ v_B(t) &= V_b \sin \omega t & i_B(t) &= I_b \sin \omega t \end{aligned}$$

De transformator zet dan de amplitude van de spanningen en stromen aan de ingangsklemmen om in een spanning en stroom aan de uitgangsklemmen volgens:

$$\begin{aligned} V_b &= \frac{N_B}{N_A} V_a \\ I_b &= -\frac{N_A}{N_B} I_a \end{aligned}$$

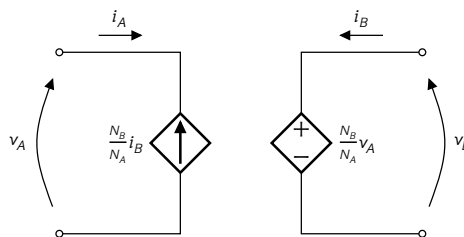
Deze relatie zorgt ervoor dat het vermogen  $P_a$  dat door de primaire verbruikt wordt, aan de secundaire terug gegenereerd wordt als  $P_b$ :<sup>4</sup>

$$P_b = -\frac{V_b I_b}{2} = -\frac{\frac{N_B}{N_A} V_a \left(-\frac{N_A}{N_B} I_a\right)}{2} = \frac{V_a I_a}{2} = P_a$$

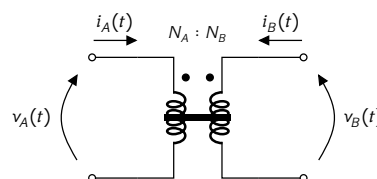
**Netwerkmmodel** Een transformator wordt beschreven door de volgende vergelijkingen:

$$V_b = \frac{N_B}{N_A} V_a \quad I_a = -\frac{N_B}{N_A} I_b$$

en kan bijgevolg gemodelleerd worden met het volgende netwerk dat door dezelfde vergelijkingen beschreven wordt:



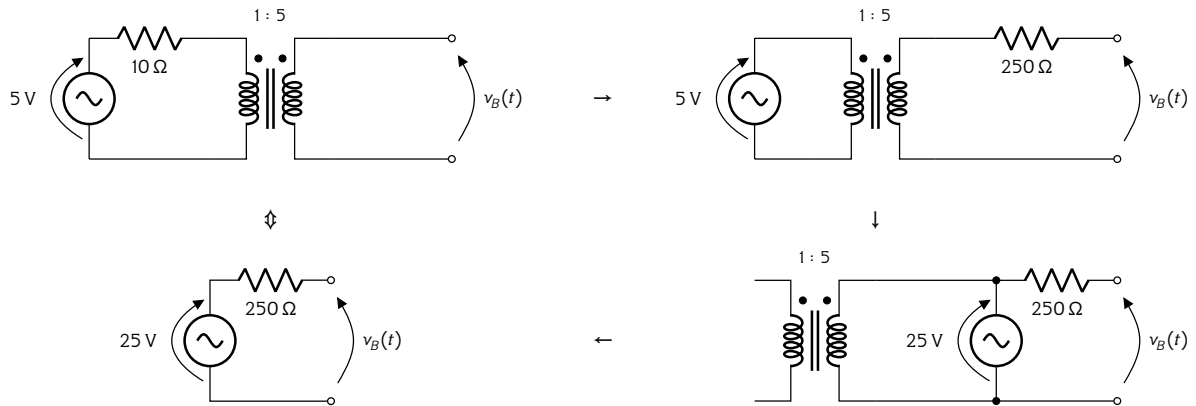
Merk op dat dit netwerkmodel ook een transformatie uitvoert voor DC-spanningen en -stromen, wat in de praktijk niet lukt met een transformator. Wanneer we later DC-DC convertoren zullen behandelen, zal het echter wel nuttig blijken om hetzelfde equivalente schema te gebruiken om de convertoren te modelleren. In dat geval zullen we zelfs een stap verder gaan en de convertor met een transformator-symbool voorstellen! Om echter duidelijk te maken dat het om een DC-DC transformator gaat gebruiken we een symbool met een horizontale lijn door.



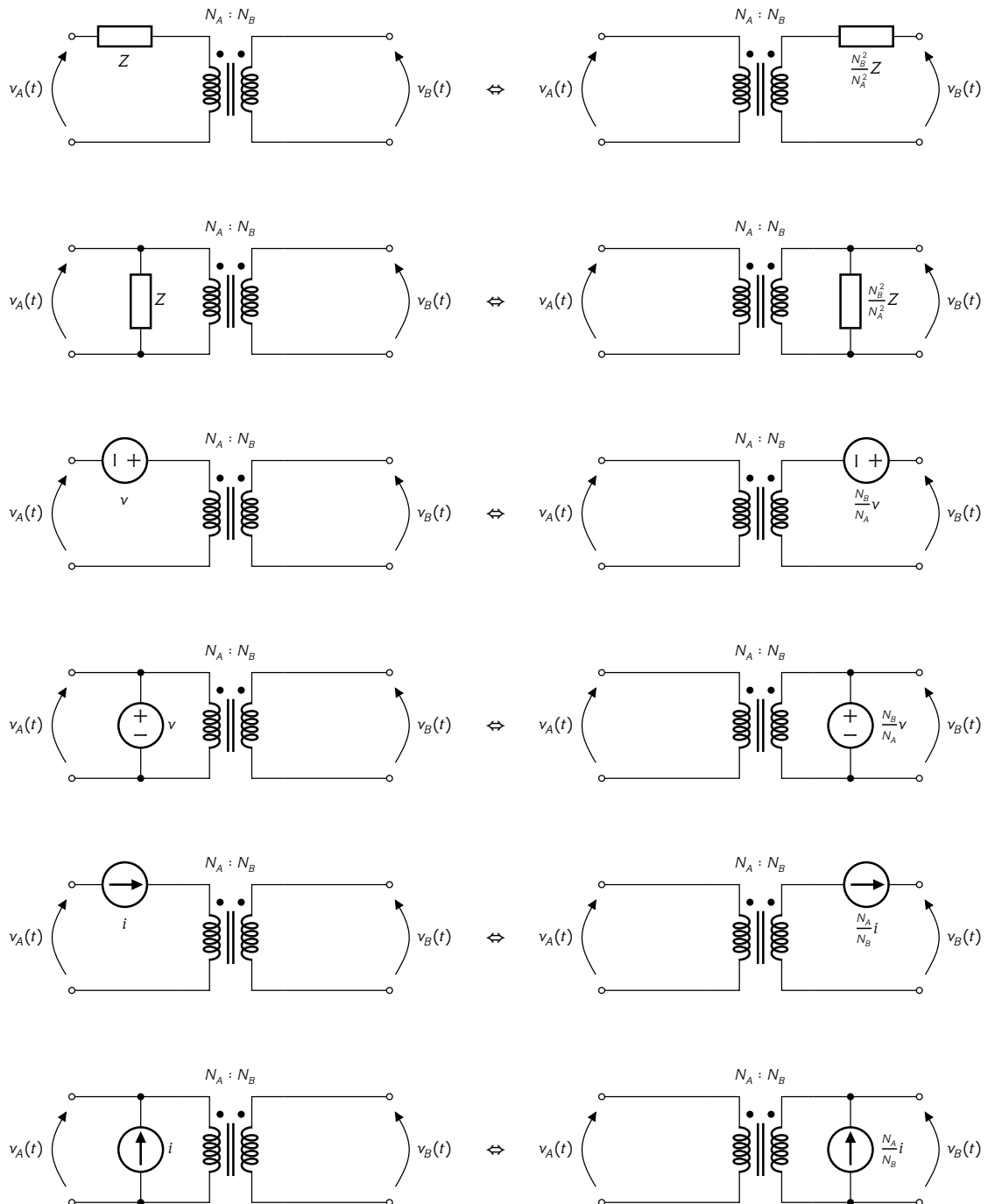
<sup>4</sup>Als de spanningen en stromen over een tweepool sinusvormig zijn met gelijke frequentie en 'in-fase', en amplitudes  $V$  en  $I$  hebben, dan kan in verbruikersconventie het verbruikte vermogen berekend worden als  $\frac{VA}{2}$ .

**Transformatie-netwerkregels** Je kan bronnen en (lineaire) elementen van de ene kant naar de andere kant verplaatsen (waarbij je uiteindelijk de transformator kan weglaten), door de transformatieverhouding in rekening te brengen. Je vindt de regels voor de verplaatsing van A-zijde naar B-zijde in Figuur 4.7. De omgekeerde regels zijn natuurlijk dezelfde maar met de omgekeerde transformatieverhouding.

Een voorbeeld illustreert het principe. Beschouw onderstaande ketting in wijzerzin, startende linksboven.



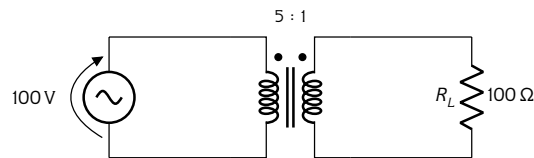
Waarbij we in de laatste stap de 'loshangende' transformator hebben weggelaten.



Figuur 4.7: Verplaatsing van (lineaire) netwerkelementen van de A- naar de B-zijde van een transformator met windingsverhouding  $N_A : N_B$

## Oefeningen

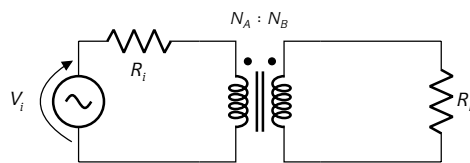
**Oefening 4.5.1-1:** Beschouw onderstaande transformator aangesloten op een spanningsbron en belast met een weerstand. Merk op dat de spanning die bij de bron vermeld wordt, de amplitude van de sinus van de bron is, en geen effectieve waarde (anders zouden we  $100 V_{\text{RMS}}$  schrijven)!



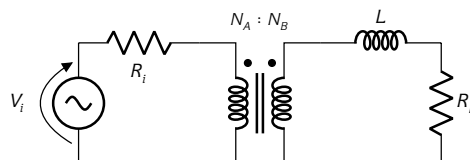
Bereken (1) de spanning die over de weerstand  $R_L$  komt te staan, en (2) de stroom die de bron moet leveren. Controleer of het vermogen dat de bron levert hetzelfde is als het vermogen dat de weerstand verbruikt, m.a.w. dat er geen vermogenverlies optreedt in de (ideale) transformator.

**Oefening 4.5.1-2:** Beschouw onderstaande transformator aangesloten op een spanningsbron met inwendige weerstand  $R_i$  en belast met een weerstand  $R_L$ . Bereken een uitdrukking voor:

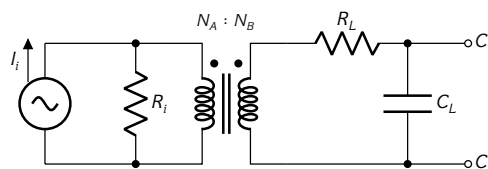
- de spanning die over de weerstand  $R_L$  komt te staan
- Het vermogen dat de bron moet leveren



**Oefening 4.5.1-3:** (Deze oefening kan je pas oplossen nadat je Hoofdstuk 5 hebt gelezen en gestudeerd.) Beschouw onderstaand netwerk met een transformator erin. Bepaal het effectieve vermogen dat gedissipeerd wordt in  $R_L$ .



**Oefening 4.5.1-4:** (Deze oefening kan je pas oplossen nadat je Hoofdstuk 6 hebt gelezen en gestudeerd.) Beschouw onderstaand netwerk met een transformator erin. Bepaal het Thévenin-equivalent dat je ziet tussen klemmen  $C_1$  en  $C_2$ .



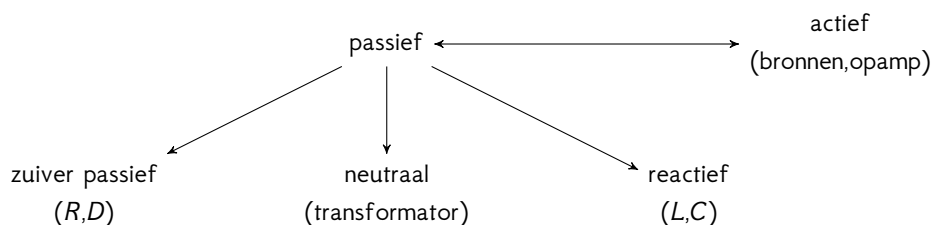
## 4.6 Overzicht en slotbeschouwing

**Overzicht** Hieronder een kort overzicht van de elementen die we tot nu toe zagen:

Element	Aantal polen	Passief	Neutraal	Reactief	Actief	Lineair
Weerstand	2	•				•
Spoel	2			•		•
Condensator	2			•		•
Diode	2	•				
Spanningsbron	2				•	-
Stroombron	2				•	-
VCVS	4				•	•
VCCS	4				•	•
CCVS	4				•	•
CCCS	4				•	•
Operationele versterker	4				•	o
Transformator	4		•			o

De transformator is lineair behalve voor de DC-component. De opamp is lineair zolang de uitgangsspanning binnen de voedingsrails blijft. Vermits onafhankelijke bronnen slechts een voorwaarde opleggen voor de spanning erover of de stroom erdoor, leggen ze geen verband tussen stroom en spanning, waardoor ze niet als lineair of niet-lineair kunnen gecatalogeerd worden.

Nu we alle ideale elementen gezien hebben, kunnen we de begrippen actief, passief, reactief en neutraal beter begrijpen wat hun onderlinge relatie betreft. Een dubbele pijl duidt op een tegenstelling, een enkele pijl op een indeling in verschillende klassen. In het onderstaande diagram werden ook voorbeelden opgenomen.



**Slotbeschouwing** De drang is nu ongetwijfeld groot om netwerkjes te maken met deze ideale elementen en ze dan ook met echte componenten te gaan nabouwen. Je gaat ondertussen immers ook al in het labo aan de slag met wat je tot nu toe geleerd hebt.

Je zal gauw merken dat de realiteit niet zo rooskleurig is als de ideale wereld van de elementen. Elementen kunnen niet kapot, componenten wel.

Componenten kunnen immers sneuvelen door tal van problemen:

- warmte: elementen die energie moeten dissiperen (zoals de weerstand) warmen hierdoor op. Hierdoor zal het maximale vermogen door een weerstand (als component) beperkt moeten blijven.
- temperatuur: een hoge temperatuur blijkt nefast voor vele componenten, die erdoor sneller verouderen en hun goede werking blijken te verliezen (bijvoorbeeld elektrolytische condensatoren).

- spanning/veldsterkte: indien we tussen twee punten een zekere spanning genereren, dan ontstaat hierdoor een elektrisch veld. Indien dit elektrisch veld te groot wordt voor een isolator (bijvoorbeeld de lucht, of het diëlektricum van een condensator), dan kan doorslag ontstaan. De vlamboog of stroom die op die manier ontstaat, kan de component ernstig beschadigen (bijvoorbeeld schakelaars of condensatoren).
- parasitaire elementen: tot overmaat van ramp blijkt geen enkele component overeen te komen met één enkel element. Een condensator zal een parasitaire lekweerstand hebben, een spoel heeft een zekere weerstand. Hierdoor treden al de voornoemde problemen op bij elke component!

Maar geen zorgen, we zijn creatief genoeg om oplossingen te bedenken voor al die problemen!

## Rekentechnieken voor lineaire netwerken

---

### Overzicht

5.1	Rekenen met stromen en spanningen . . . . .	41
5.1.1	In het tijddomein . . . . .	41
5.1.2	DC . . . . .	45
5.1.3	In het frequentiedomein . . . . .	46
5.1.4	Spectra en Bode-diagrammen . . . . .	54
5.1.5	Superpositie . . . . .	58
5.2	Elementaire vereenvoudigingen voor schakelingen in serie / parallel / ster / driehoek . . . . .	61
5.2.1	Serie / Parallel - vereenvoudiging . . . . .	61
5.2.2	Ster-driehoeksequivalentie . . . . .	63
5.3	Rekenen met stromen en potentialen . . . . .	67
5.4	Rekenen met potentialen: stelling van Millman . . . . .	69
5.5	Modified Nodal Analysis (MNA) . . . . .	72
5.6	Slotbeschouwing . . . . .	84

In dit hoofdstuk leren we berekenen hoe de stromen en spanningen zich gedragen in eenvoudige netwerkjes met (ideale) elementen.

We doen dit in verschillende domeinen: het tijddomein, het DC-domein en het frequentiedomein. We leren ook hoe we het rekenwerk kunnen vereenvoudigen, door gebruik te maken van superpositie en te werken met potentialen i.p.v. met spanningen. De stelling van Millman is daarbij de kers op de taart.

Tot slot laten we ook zien hoe je elektronische netwerken efficiënt kan uitrekenen m.b.v. de modified nodal analysis, een techniek die als standaard geldt, zowel bij het numeriek berekenen/simuleren van netwerken m.b.v. netwerksimulators, als bij het symbolisch analyseren van deze netwerken.

### 5.1 Rekenen met stromen en spanningen

#### 5.1.1 In het tijddomein

We kunnen de stromen en de spanningen in een netwerk berekenen door de basiswetten die elektrische netwerken beschrijven, te combineren met de wetten die de gebruikte elementen beschrijven.

Deze basiswetten zijn:

Kirchhoffs stroomvergelijking : de som van alle stromen in een knoop moet nul zijn.

Kirchhoffs spanningsvergelijking : de som van alle spanningen in een lus moet nul zijn.

De dominantie van de Engelse taal in ons vakgebied zorgt ervoor dat we de eerste afkorten als KCL (Kirchhoff's Current Law) en de tweede als KVL (Kirchhoffs Voltage Law). We noemen het geheel van de wetten van Kirchhoff ook wel eens de topologische wetten, omdat ze de conceptuele opbouw van het netwerk beschrijven (de topologie).

De wetten die de elementen/componenten beschrijven noemen we de takvergelijkingen omdat de elementen/-componenten kunnen beschouwd worden als takken van een graaf, waarbij de geleiders als knopen worden gezien. Deze korten we vaak af als BE (branch equations).

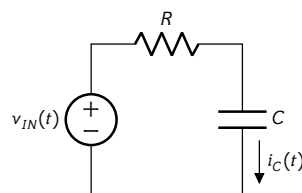
Samen vormen de KCL-, de KVL- en de BE-vergelijkingen een stelsel dat we moeten oplossen om alle stromen en spanningen van het netwerk te berekenen als functie van de tijd.

We kunnen deze manier van werken samenvatten in het volgende stappenplan:

Rekenregels voor lineaire netwerken in het tijddomein:

1. Duid alle onbekende stromen en spanningen aan.
2. Kies een referentieknoop  $n_0$  en benoem de andere knopen  $n_i$ .
3. Duid alle onafhankelijke lussen  $l_j$  aan en geef ze een omloopzin.
4. Schrijf nu alle onafhankelijke KCL-, KVL- en BE-vergelijkingen.
5. Los dit stelsel van vergelijkingen op naar de gewenste in- en uitgangsveranderlijke (bv. door eliminatie).

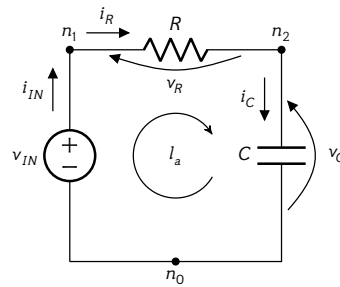
**Voorbeeld 1** Beschouw onderstaand netwerk. Laten we de stroom door de condensator  $i_C(t)$  berekenen als functie van  $v_{IN}(t)$ .



Om onnodig schrijfwerk te vermijden, laten we de tijdsafhankelijkheid van de signalen weg. Dat draagt ook bij tot de overzichtelijkheid van het schema en de vergelijkingen die we zometeen zullen noteren.

We voeren het stappenplan uit:

1. Duid alle onbekende stromen en spanningen aan, d.w.z. de stromen en spanningen door de weerstand en de condensator en de stroom door de spanningsbron.
2. Kies een referentieknoop  $n_0$  en benoem de andere knopen  $n_i$ .
3. Duid alle onafhankelijke lussen  $l_j$  aan en geef ze een omloopzin.



4. Schrijf nu alle KCL-, KVL- en BE-vergelijkingen.<sup>1</sup>

$$\left\{ \begin{array}{ll} i_{IN} - i_R = 0 & (\text{KCL-}n_1) \\ i_R - i_C = 0 & (\text{KCL-}n_2) \\ v_{IN} - v_R - v_C = 0 & (\text{KVL-}i_a) \\ v_R = Ri_R & (\text{BE-}R) \\ i_C = C \frac{dv_C}{dt} & (\text{BE-}C) \end{array} \right.$$

5. Los dit stelsel van vergelijkingen op, m.a.w. elimineer alle veranderlijken behalve  $i_C(t)$  en  $v_{IN}(t)$ . Dit is een lineair stelsel van vijf vergelijkingen met vijf onbekenden (we veronderstellen  $v_{IN}$  al gekend) dat we kunnen oplossen, bv. m.b.v. eliminatie. Uit (KCL- $n_1$ ) en (KCL- $n_2$ ) weten we:  $i_{IN} = i_R = i_C$  wat ons toelaat om  $i_{IN}$  en  $i_R$  te elimineren:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{IN} - v_R - v_C = 0 \\ v_R = Ri_C \\ i_C = C \frac{dv_C}{dt} \end{array} \right.$$

Door de eerste en de tweede vergelijking te combineren, kunnen we  $v_R$  elimineren:

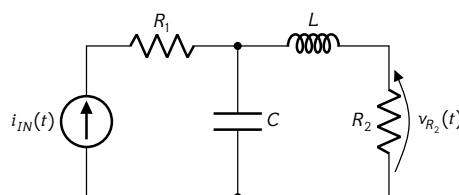
$$v_{IN} - Ri_C - v_C = 0$$

Door de laatste vergelijking uit het vorige stelsel te combineren met deze kunnen we  $v_C$  elimineren:

$$\begin{aligned} i_C &= C \frac{dv_{IN}}{dt} - RC \frac{di_C}{dt} \\ \Leftrightarrow RC \frac{di_C}{dt} + i_C &= C \frac{dv_{IN}}{dt} \end{aligned}$$

Dit is een lineaire eerste orde differentiaalvergelijking waaruit we  $i_C$  kunnen bepalen. Merk op dat de eenheden van deze vergelijking consistent zijn. Dit is alvast een eerste controle op dit tussenresultaat. Maak er een gewoonte van om je rekenwerk te controleren op eenheden! Je kan je uitleven met het oplossen van deze differentiaalvergelijking in oefening 5.1.3-1.

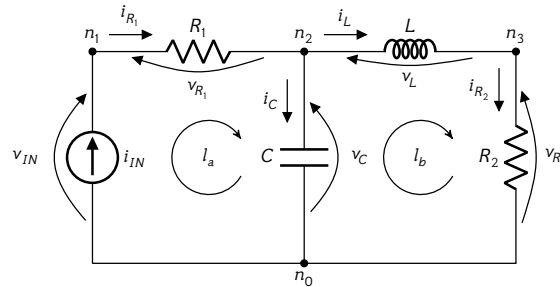
**Voorbeeld 2** Beschouw onderstaand netwerk. Laten we de spanning  $v_{R_2}(t)$  berekenen als functie van  $i_{IN}(t)$ .



<sup>1</sup>Merk op dat we eigenlijk ook de takvergelijking voor de spanningsbron expliciet hadden kunnen schrijven. We hebben deze vergelijking ineens geëlimineerd.

We voeren opnieuw het stappenplan uit. Om onnodig schrijfwerk te vermijden, laten we ook nu de tijdsafhankelijkheid weg uit de notatie.

1. Duid alle onbekende stromen en spanningen aan, d.w.z. de stromen en spanningen door de weerstanden, de condensator, de spoel en de stroom door de spanningsbron.
2. Kies een referentieknoop  $n_0$  en benoem de andere knopen  $n_i$ .
3. Duid alle onafhankelijke lussen  $l_j$  aan en geef ze een omloopzin.



4. Schrijf nu alle KCL-, KVL- en BE-vergelijkingen.

$$\left\{ \begin{array}{ll} i_{IN} - i_{R_1} = 0 & \text{(KCL-}n_1\text{)} \\ i_{R_1} - i_C - i_L = 0 & \text{(KCL-}n_2\text{)} \\ i_L - i_{R_2} = 0 & \text{(KCL-}n_3\text{)} \\ v_{IN} - v_{R_1} - v_C = 0 & \text{(KVL-}l_a\text{)} \\ v_C - v_L - v_{R_2} = 0 & \text{(KVL-}l_b\text{)} \\ v_{R_1} = R_1 i_{R_1} & \text{(BE-}R_1\text{)} \\ i_C = C \frac{dv_C}{dt} & \text{(BE-}C\text{)} \\ v_L = L \frac{di_L}{dt} & \text{(BE-}L\text{)} \\ v_{R_2} = R_2 i_{R_2} & \text{(BE-}R_2\text{)} \end{array} \right.$$

5. Los dit stelsel van vergelijkingen op, m.a.w. elimineer alle veranderlijken behalve  $v_{R_2}(t)$  en  $i_{IN}(t)$ . Dit is een lineair stelsel van negen vergelijkingen met negen onbekenden (we veronderstellen weer  $i_{IN}$  gekend) dat we kunnen oplossen, bv. m.b.v. eliminatie. M.b.v. (KCL- $n_1$ ), (KCL- $n_2$ ) en (KCL- $n_3$ ) kunnen we  $i_{R_1}$ ,  $i_C$  en  $i_L$  elimineren en (BE- $R_1$ ) en BE- $R_2$  maken  $v_{R_1}$  en  $i_{R_2}$  overbodig:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{IN} - R_1 i_{IN} - v_C = 0 \\ v_C - v_L - v_{R_2} = 0 \\ R_2 i_{IN} - v_{R_2} = R_2 C \frac{dv_C}{dt} \\ v_L = \frac{L}{R_2} \frac{dv_{R_2}}{dt} \end{array} \right.$$

De eerste Vergelijking van dit stelsel laat toe  $v_{IN}$  te bepalen, maar die waarde is niet gevraagd. We concentreren ons op de andere vergelijkingen. Eliminatie van  $v_L$  uit de tweede m.b.v. de laatste levert:

$$v_C = \frac{L}{R_2} \frac{dv_{R_2}}{dt} + v_{R_2}$$

Als we deze vergelijking invullen in de derde vergelijking van het stelsel, dan krijgen we:

$$R_2 i_{IN} - v_{R_2} = LC \frac{d^2 v_{R_2}}{dt^2} + R_2 C \frac{dv_{R_2}}{dt}$$

Als we wat meer orde in de laatste vergelijking brengen, krijgen we:

$$LC \frac{d^2 v_{R_2}}{dt^2} + R_2 C \frac{dv_{R_2}}{dt} + v_{R_2} = R_2 i_{IN}$$

Dit is een lineaire tweede orde differentiaalvergelijking waaruit we  $v_{R_2}$  kunnen bepalen.

Merk opnieuw op dat de eenheden van deze vergelijking (en ook alle tussenliggende vergelijkingen) consistent zijn. De controle van de correctheid van de eenheden is een gemakkelijke manier om de juistheid van de vergelijking te controleren. Je kan je alweer uitleven met het oplossen van deze differentiaalvergelijking in oefening 5.1.3-2.

**Tussenbeschouwing** Het neerschrijven van de KCL-, KVL- en BE-vergelijkingen wordt in de literatuur vaak tableau analysis<sup>2</sup> genoemd. Het mag duidelijk zijn dat het rekenen met lineaire netwerken in het tijddomein snel uitmondt in een boel rekenwerk, zelfs al zijn de netwerken nog vrij eenvoudig.

### 5.1.2 DC

Indien we veronderstellen dat de bronnen in het netwerk constant zijn in de tijd, dan vereenvoudigt het rekenwerk gevoelig. Als het netwerk lineair is, dan moeten immers ook alle spanningen en stromen in het netwerk constant zijn in de tijd, en bijgevolg zijn hun afgeleiden naar de tijd gelijk aan nul. In dat scenario wordt

- een spoel een kortsluiting, want

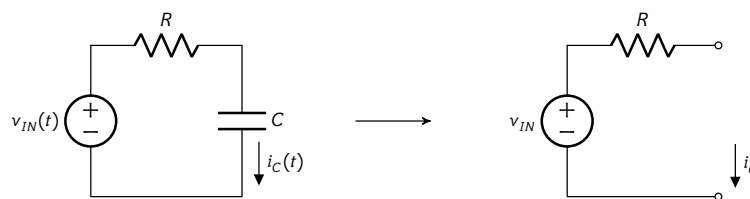
$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} = 0$$

- een condensator een open keten, want

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} = 0$$

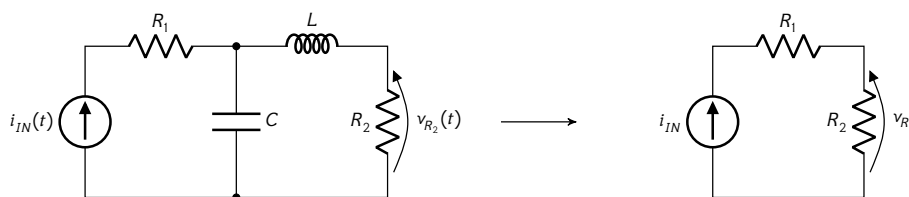
Onze twee voorbeelden worden hierdoor wel heel eenvoudig.

**Voorbeeld 1** In DC reduceert het eerste voorbeeldnetwerk zich tot



Bijgevolg wordt  $i_C = 0$ .

**Voorbeeld 2** In DC reduceert het onderstaand netwerk zich tot



<sup>2</sup>Tableau wil in het Engels zeggen: schilderij, scene. Je moet er inderdaad een canvas voor volkladden, eer het probleem adequaat beschreven is.

Bijgevolg:  $v_{R_2} = R_2 i_{IN}$ .

### 5.1.3 In het frequentiedomein

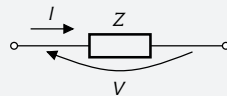
Indien we de bronnen in een lineair netwerk beperken tot zuiver sinusvormige bronnen, dan kan men bewijzen dat alle spanningen en stromen sinusvormig zullen zijn.

Een eenvoudige beschrijving van de netwerken in het frequentiedomein wordt dan mogelijk. In de cursussen wiskunde en systeemtheorie zal je het frequentiedomein leren kennen als het resultaat van de Fouriertransformatie. We gaan hier momenteel niet dieper op in: in deze cursus beperken we ons tot het mechanisch beschrijven van de rekenprincipes.

Die luiden als volgt:

#### Rekenregels voor lineaire netwerken in het frequentiedomein:

1. Vervang de zuiver sinusvormige bron in het netwerk door een DC bron met als waarde de amplitude van de sinusvormige bron ( $A$ ). Heb je meerdere bronnen, pas dan superpositie toe (zie sectie 5.1.5 op pagina 58).
2. Veronderstel dat elke stroom en spanning in het netwerk wordt voorgesteld door een complex getal.
3. Vervang alle weerstanden, condensatoren en spoelen door een complexe impedantie. Voor deze impedantie gebruiken we typisch de letter  $Z$  en gebruiken we een speciaal netwerksymbool:



met als waarden:

Element	Complexe Impedantie	Verkorte notatie
Weerstand	$Z = R$	$R$
Condensator	$Z = \frac{1}{j\omega C}$	$\frac{1}{sC}$
Spoel	$Z = j\omega L$	$sL$

Om gemakkelijk te rekenen, korten we  $j\omega$  af als  $s$  en vervangen we pas helemaal op het einde  $s \rightarrow j\omega$  en gelijkaardig  $s^2 \rightarrow -\omega^2$ ,  $s^3 \rightarrow -j\omega^3$ , enz.

4. Los het netwerk op m.b.v. KVL en KCL, waarbij je hardnekkig met de variabele  $s$  blijft rekenen. De gezochte grootte wordt op die manier (na vervanging  $s \rightarrow j\omega$ ) een complexe uitdrukking  $X$ , waarvan de modulus (of magnitude)  $|X|$  overeenkomt met de amplitude van de overeenkomstige sinus en de fase  $\arg X$  overeenkomt met fasevoorijsling.

Schematisch:

$$A \cdot \sin \omega t \quad \rightarrow \quad |X| \cdot \sin(\omega t + \arg X)$$

5. Voor een component in verbruikersconfiguratie (waarbij  $I$  en  $V$  de complexe getallen zijn die de magnitude en fase van de stroom en de spanning weergeven) kunnen we het complexe vermogen berekenen als:

$$S = \frac{1}{2} VI^*$$

waarbij  $I^*$  de complex toegevoegde is van  $I$ .

Indien de component als impedantie te beschrijven is, dan kunnen ook de onderstaande vergelijkingen gebruikt worden:

$$S = \frac{1}{2} \frac{VV^*}{Z^*} = \frac{1}{2} ZII^*$$

Op basis van het complexe vermogen kunnen we ook een aantal afgeleide vermogens berekenen:

Type	Uitdrukking
Schijnbaar vermogen	$P_s =  S $
Actief vermogen	$P_a = \Re(S)$
Reactief vermogen	$P_r = \Im(S)$

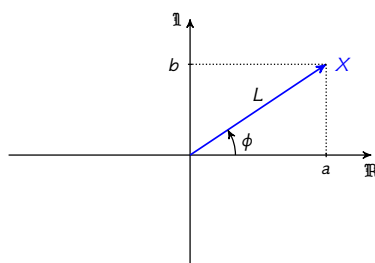
Merk op dat deze naamgeving licht verwarrend is, wanneer je ze vergelijkt met de classificatie van de elementen. Als voorbeeld: een weerstand is een passief element, maar verbruikt actief vermogen! We vatten de verwarring samen in de volgende overzichtelijke tabel:

Element	Classificatie	Vermogentype
Weerstand	Passief	Actief
Spoel en condensator	Passief & Reactief	Reactief
Bron	Actief	Actief en Reactief

Bij elementen betekende 'passief' geen vermogen toevoegen aan het netwerk en 'actief' wel vermogen toevoegen aan het netwerk. Bij vermogenstypes will 'actief' zeggen: vermogen toevoegen of weghalen uit het netwerk en 'reactief' tijdelijk energie opslaan en weer vrijgeven.

Voor we met enkele voorbeelden van start gaan, loont het de moeite om kort het rekenen met complexe getallen even op te frissen.

Een complex getal  $X$  is een gebonden vector in het complexe vlak met lengte  $L$ , die we kunnen noteren in cartesische coördinaten als  $X = a + jb$  of in poolcoördinaten als  $X = L\angle\phi$ . Dit wordt weergegeven in Figuur 5.1. De omzettingformules vind je ernaast.<sup>3</sup>



(a) Grafische voorstelling in het complexe vlak

Van cartesisch naar polair:

$$\begin{cases} L = |X| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \phi = \arg X = \arctan \frac{b}{a} \end{cases}$$

Van polair naar cartesisch:

$$\begin{cases} a = L \cdot \cos \phi \\ b = L \cdot \sin \phi \end{cases}$$

(b) Omzettingformules

Figuur 5.1: Complexe getallen als vectoren met hun beschrijving in cartesische en poolcoördinaten

<sup>3</sup>Merk op dat de formule met de boogtangens enkel geldt voor kwadranten I en II. Ken je de formules voor de andere kwadranten?

Optellen van complexe getallen doe je het gemakkelijkst in cartesische vorm, vermenigvuldigen in polaire vorm:

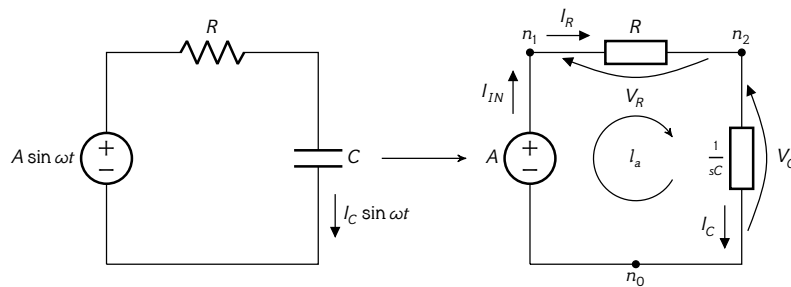
$$\left. \begin{aligned} p_1 &= a + jb = |p_1| \angle \phi_1 \\ p_2 &= c + jd = |p_2| \angle \phi_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} p_1 + p_2 = (a + c) + j(b + d) \\ p_1 \cdot p_2 = (|p_1| \cdot |p_2|) \angle (\phi_1 + \phi_2) \end{cases}$$

Het complex toegevoegde getal van een complex getal berekenen gaat even eenvoudig in cartesische als in polaire vorm:

$$p = a + jb = |p| \angle \phi \quad \Rightarrow \quad p^* = a - jb = |p| \angle (-\phi)$$

We illustreren dit opnieuw aan de hand van de gekende voorbeelden:

**Voorbeeld 1** We voeren stappen 1 t.e.m. 3 van het stappenplan uit:



Stap 4 blijkt dan heel eenvoudig te zijn:

$$\begin{aligned} I_C &= \frac{A}{R + \frac{1}{sC}} \\ &= \frac{sC}{1 + sRC} A \\ &\downarrow s = j\omega \\ &= \underbrace{\frac{j\omega C}{1 + j\omega RC}}_{\equiv Y} A \end{aligned}$$

Deze laatste vergelijking geeft aan dat spanningsamplitude  $A$  via een factor  $Y$  wordt omgezet in een stroomamplitude  $I_C$ .

In het vakjargon zeggen we dat  $Y$  de transferfunctie is van  $A$  naar  $I_C$ .

De betekenis van deze transferfunctie  $Y$  wordt maar duidelijk indien we ze schrijven in polaire vorm:

$$Y = \frac{j\omega C}{1 + j\omega RC} = |Y| \angle \arg Y$$

met:<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} |Y| &= \left| \frac{j\omega C}{1 + j\omega RC} \right| = \frac{\omega C}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \\ \arg Y &= 90^\circ - \arctan \frac{\omega RC}{1} \end{aligned}$$

<sup>4</sup>Merk op dat we hier als ingenieurs licht op de tenen van de wiskundigen trappen, door te veronderstellen dat het resultaat van een arctan een waarde in graden oplevert, i.p.v. in radialen. Wat voor de wiskundigen nog meer tenenkrullend is, is dat we als ingenieurs zelfs beide conventies door elkaar gebruiken. Je gaat dus uit de context moeten afleiden wat correct is. In dit geval staat de term ervoor in graden, dus veronderstellen we ook graden.

waarbij we handig gebruik gemaakt hebben van de volgende rekenregels voor een complexe uitdrukking  $Q$  die een breuk is met als teller een product van factoren  $t_i$  en als noemer een product van factor  $n_j$ :

$$Q = \frac{\prod_i t_i}{\prod_j n_j} \Rightarrow \begin{cases} |Q| = \frac{\prod_i |t_i|}{\prod_j |n_j|} \\ \arg Q = \sum_i \arg t_i - \sum_j \arg n_j \end{cases}$$

Stel nu als voorbeeld:

$$R = 1 \text{ k}\Omega$$

$$C = 1 \text{ }\mu\text{F}$$

$$\omega = 2\pi 100 \text{ Hz} = 200\pi \text{ rad/s}$$

Dan kunnen we gemakkelijk berekenen dat:

$$|Y| = \frac{200\pi \text{ rad/s} \cdot 1 \text{ }\mu\text{F}}{\sqrt{1 + (200\pi \text{ rad/s} \cdot 1 \text{ k}\Omega \cdot 1 \text{ }\mu\text{F})^2}} = 5.3202 \times 10^{-4} \text{ S}$$

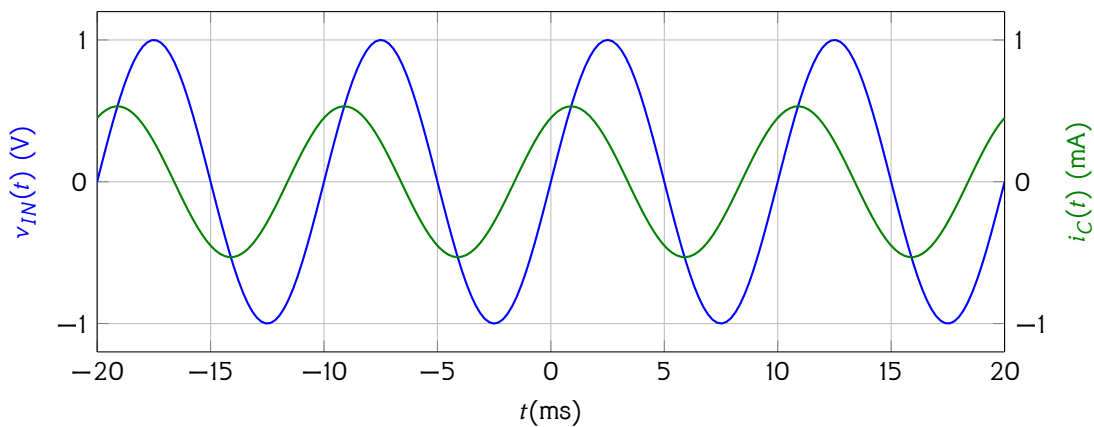
$$\arg Y = 90^\circ - \arctan(200\pi \text{ rad/s} \cdot 1 \text{ k}\Omega \cdot 1 \text{ }\mu\text{F}) = 90^\circ - 32.142^\circ = 57.858^\circ$$

Samengevat:

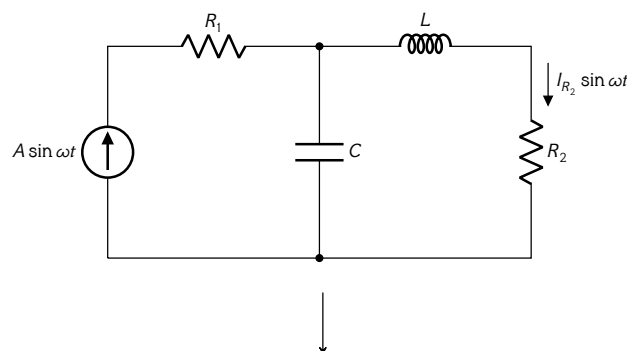
$$v_{IN}(t) = A \sin \omega t \quad \rightarrow \quad i_C(t) = |A \cdot Y| \cdot \sin(\omega t + \arg Y)$$

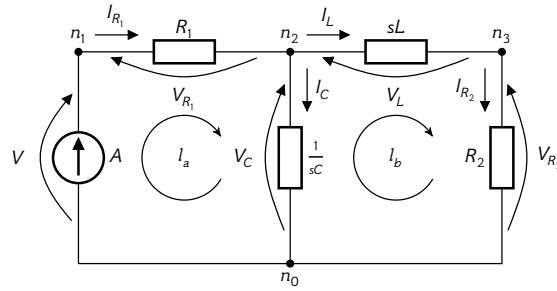
Voor een sinusvormigingangssignaal met amplitude 1V krijgen we dus een sinusvormige condensatorstroom met dezelfde frequentie, een amplitude van 532.02  $\mu\text{A}$  en een fasevoorijsling gelijk aan  $57.858^\circ$ .

Grafisch:



**Voorbeeld 2** We voeren stappen 1 t.e.m. 3 van het stappenplan uit:





Om stap 4 uit te voeren, stellen we weer Kirchhoffs vergelijkingen op in combinatie met de takvergelijkingen:

$$\left\{ \begin{array}{ll} A - I_{R_1} = 0 & (\text{KCL-}n_1) \\ I_{R_1} - I_C - I_L = 0 & (\text{KCL-}n_2) \\ I_L - I_{R_2} = 0 & (\text{KCL-}n_3) \\ V - V_{R_1} - V_C = 0 & (\text{KVL-}l_a) \\ V_C - V_L - V_{R_2} = 0 & (\text{KVL-}l_b) \\ V_{R_1} = R_1 I_{R_1} & (\text{BE-}R_1) \\ I_C = sC V_C & (\text{BE-}C) \\ V_L = sL I_L & (\text{BE-}L) \\ V_{R_2} = R_2 I_{R_2} & (\text{BE-}R_2) \end{array} \right.$$

We bepalen hiermee  $v_{R_2}$  in functie van  $A$ . Dat doen we door  $I_{R_1}$ ,  $I_C$  en  $I_L$  te elimineren met vergelijkingen (KCL- $n_1$ ), (KCL- $n_2$ ) en (KCL- $n_3$ ). Vergelijkingen (BE- $R_1$ ) en (BE- $R_2$ ) maken de veranderlijken  $V_{R_1}$  en  $I_{R_2}$  overbodig:

$$\left\{ \begin{array}{ll} V - R_1 A - V_C = 0 & (\text{KVL-}l_a) \\ V_C - V_L - V_{R_2} = 0 & (\text{KVL-}l_b) \\ R_2 A - V_{R_2} = sR_2 C V_C & (\text{BE-}C) \\ V_L = s \frac{L}{R_2} V_{R_2} & (\text{BE-}L) \end{array} \right.$$

Dit leidt ons tot:

$$V_C = \frac{L}{R_2} s V_{R_2} + V_{R_2}$$

Deze vergelijking invullen in (BE-C) leidt tot:

$$\begin{aligned} & s^2 L C V_{R_2} + s R_2 C V_{R_2} + V_{R_2} = R_2 A \\ \Leftrightarrow & (s^2 L C + s R_2 C + 1) V_{R_2} = R_2 A \\ \Leftrightarrow & V_{R_2} = \frac{R_2}{s^2 L C + s R_2 C + 1} \cdot A \\ \downarrow s = j\omega & \\ \Leftrightarrow & = \frac{R_2}{\underbrace{1 - \omega^2 L C + j\omega R_2 C}_{\equiv Z}} \cdot A \end{aligned}$$

We zien dat de amplitude van de stroombron aan de ingang getransfereerd wordt naar de amplitude van uitgang  $V_{R_2}$  door de transferfunctie  $Z$ . Opnieuw krijgt deze uitdrukking betekenis indien we ze in polaire vorm schrijven:

$$V_{R_2} = Z \cdot A$$

met

$$|Z| = \frac{R_2}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega R_2 C)^2}}$$

$$\arg Z = -\arctan \frac{\omega R_2 C}{1 - \omega^2 LC}$$

Stel nu als voorbeeld:

$$R_2 = 1 \text{ k}\Omega$$

$$L = 1 \text{ mH}$$

$$C = 2 \text{ }\mu\text{F}$$

$$\omega = 2\pi 1000 \text{ Hz} = 2000\pi \text{ rad/s}$$

Dan kunnen we gemakkelijk berekenen dat:

$$|Z| = \frac{1 \text{ k}\Omega}{\sqrt{(1 - (2000\pi \text{ rad/s})^2 \cdot 1 \text{ mH} \cdot 2 \text{ }\mu\text{F})^2 + (2000\pi \text{ rad/s} \cdot 1 \text{ k}\Omega \cdot 2 \text{ }\mu\text{F})^2}} = 79.365 \Omega$$

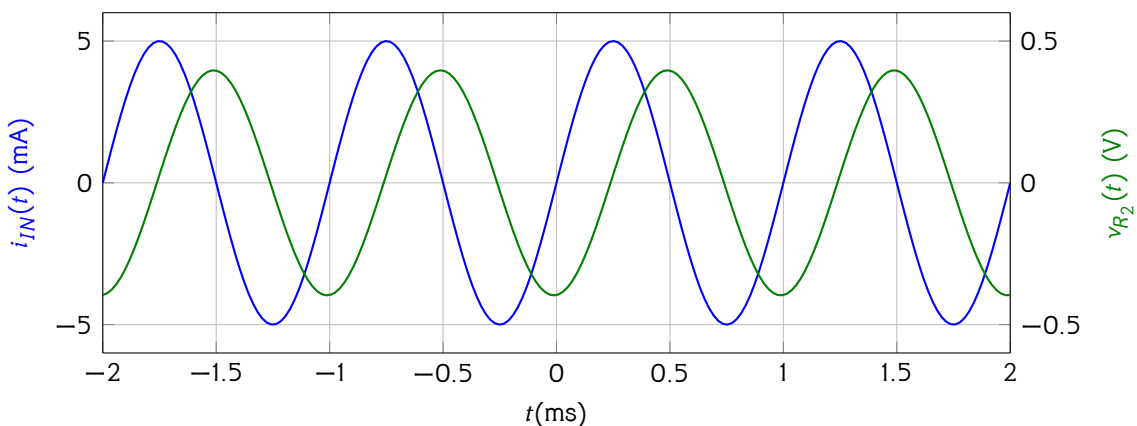
$$\arg Z = -85.808^\circ$$

Samengevat:

$$i_{IN}(t) = A \sin \omega t \quad \rightarrow \quad v_{R_2}(t) = |A \cdot Z| \cdot \sin(\omega t + \arg Z)$$

Voor een sinusvormigingangssignaal met amplitude 5 mA krijgen we dus een sinusvormige spanning over  $R_2$  met dezelfde frequentie, een amplitude van 396.82 mV en een fasenafwijking gelijk aan  $85.808^\circ$ .

Grafisch:



### Opmerkingen

- Sinusvormige signalen zijn courant vanuit verschillende zienswijzen/domeinen:
  - in de elektrotechniek (de netspanning is sinusvormig)
  - bij het beschouwen van signalen als een som van sinussen
- Merk op dat we in de manier van werken die hier wordt voorgesteld een sinusvormige bron voorstellen m.b.v. van haar amplitude. Dit gaat in tegen de courante conventie om in de elektrotechniek te werken met de effectieve waarde (of RMS-waarde).  
De effectieve waarde is voor een periodiek signaal  $v(t)$  gedefinieerd als:

$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v^2(t) dt}$$

waarbij  $T$  de periode van het signaal is.

We werken als elektronici bewust niet met effectieve waarden omdat we meer baat hebben bij de tweede zienswijze waarbij we een signaal beschouwen als een combinatie van sinusvormige signalen. In je lessen wiskunde en systeemtheorie leer je er later alles over!

- Moesten we gekozen hebben voor het eerste kamp (werken met effectieve waarden), dan blijft de hele theorie dezelfde, op de bepaling van het complexe vermogen na. In dat geval wordt:

$$S = VI^*$$

- Op het moment dat je geconfronteerd wordt met literatuur die sinusvormige bronnen gebruikt, kijk je dus best eerst even na welke van de twee zienswijzen als uitgangspunt werd genomen.
- Het omrekenen tussen amplitudes en effectieve waarden kan voor sinusgolven eenvoudig door gebruik te maken van  $F$ , de vormfactor, die het verband legt tussen de RMS-waarde  $V_{RMS}$  en de amplitude  $A$ :

$$V_{RMS} = FA$$

Voor een sinusgolf bedraagt deze vormfactor  $F = 1/\sqrt{2}$ , voor een waardensymmetrische driehoeksgolf  $F = 1/\sqrt{3}$ , voor een waardensymmetrische blokgolf  $F = 1$ .

- Als we willen benadrukken dat het om een RMS-spanning of -stroom gaat, vermelden we courant een extra subscript 'RMS' na de eenheid. Als voorbeeld: een LED-lamp van 4.5 W die op de netspanning  $V$  wordt aangesloten, zal een stroom  $I$  verbruiken, met:

$$V = 230 V_{RMS}$$

$$I = 19.6 \text{ mA}_{RMS}$$

## Oefeningen

**Oefening 5.1.3-1:** Los de differentiaalvergelijking van voorbeeld 1 (zie pagina 42) op waarbij we veronderstellen dat  $v_{IN}(t) = \sin \omega t$ :

$$RC \frac{di_C}{dt} + i_C = C \frac{dv_{IN}}{dt}$$

met als beginvoorwaarde:

$$i_C(0) = 0 \text{ A}$$

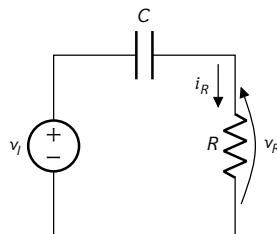
**Oefening 5.1.3-2:** Los de differentiaalvergelijking van voorbeeld 2 op (zie pagina 43)

$$LC \frac{d^2 v_{R_2}}{dt^2} + R_2 C \frac{dv_{R_2}}{dt} + v_{R_2} = R_2 t$$

waarbij we veronderstellen dat  $i_{IN}(t) = t$  en de volgende beginvoorwaarden nemen  $v_{R_2}(0) = 1 \text{ V}$  en  $\frac{dv_{R_2}(t)}{dt} = 0 \text{ V/s}$ . Verder mag je veronderstellen dat:

$$\frac{1}{LC} - \left( \frac{R_2}{2L} \right)^2 > 0$$

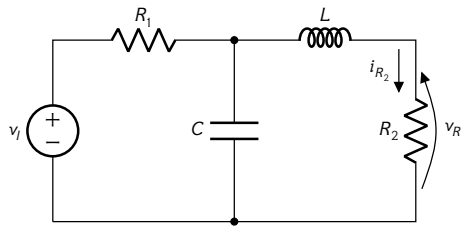
**Oefening 5.1.3-3:** Beschouw het volgende netwerk:



Bereken de stroom  $i_R$  en de spanning  $v_R$  als functie van de ingangbron  $v_i$ :

1. in het tijddomein (veronderstel  $v_i = t$ , en  $i_R(0) = 0$ )
2. in DC-regime
3. in het frequentiedomein

Oefening 5.1.3-4: Beschouw het volgende netwerk:



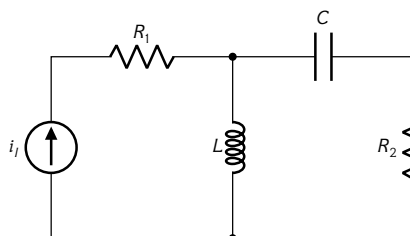
Bereken de stroom  $i_{R_2}$  en de spanning  $v_{R_2}$  als functie van de ingangsbron  $v_i$ :

1. in het tijd domein (veronderstel  $v_i = t$  en  $i_{R_2}(0) = 1 \text{ mA}$ ,  $i'_{R_2}(0) = 0 \text{ A/s}$ ).
2. in DC-regime
3. in het frequentiedomein

Oefening 5.1.3-5: Beschouw opnieuw het netwerk van Oefening 5.1.3-3. Bereken het (actieve, reactieve en schijnbare) vermogenverbruik in het frequentiedomein voor de condensator en voor de spoel indien de spanningsbron sinusvormig is met amplitude 10 V.

Oefening 5.1.3-6: Beschouw opnieuw het netwerk van Oefening 5.1.3-4. Bereken het (actieve, reactieve en schijnbare) vermogenverbruik in het frequentiedomein dat de serieschakeling van  $L$  en  $R_2$  verbruikt indien de spanningsbron sinusvormig is met RMS-waarde  $10 V_{\text{RMS}}$ .

Oefening 5.1.3-7: Bereken in het frequentiedomein alle stromen door en spanningen over de individuele elementen van het onderstaande netwerk. Veronderstel dus dat de bron sinusvormig is.

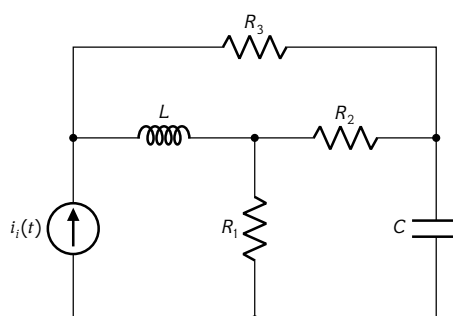


Bereken het gemiddelde vermogenverbruik van de elementen (incl. de bron) en verifieer dat de som van de schijnbare vermogens gelijk is nul (m.a.w. dat het bronvermogen volledig verbruikt wordt door de passieve elementen).

Kan je het netwerk hertekenen voor  $\omega = 0$ ?

Zelfde vraag voor  $\omega \rightarrow +\infty$ .

Oefening 5.1.3-8: Bereken in het frequentiedomein alle stromen door en spanningen over de individuele elementen van het onderstaande netwerk. Veronderstel dus dat de bron sinusvormig is.





Figuur 5.2: Hendrik Wade Bode (\*1905–†1982)

Bereken het gemiddelde vermogen dat de bron moet leveren. Kan je het netwerk hertekenen voor  $\omega = 0$ ?  
Zelfde vraag voor  $\omega \rightarrow +\infty$ .

**Oefening 5.1.3-9:** Bepaal de vormfactor  $F$  voor de sinusgolf  $v(t) = A \sin(\omega t)$ .

**Oefening 5.1.3-10:** Bepaal de vormfactor  $F$  voor een driehoeksgolf  $v(t)$  tussen spanningen  $-V$  en  $V$  met symmetrie  $\alpha$ .  
Stel vast dat de symmetrie niet voorkomt in de vormfactor.

**Oefening 5.1.3-11:** Bepaal de vormfactor  $F$  voor een blokgolf  $v(t)$  tussen spanningen  $-V$  en  $V$  met duty cycle  $\alpha$ .  
Stel vast dat de duty cycle niet voorkomt in de vormfactor.

#### 5.1.4 Spectra en Bode-diagrammen

In de twee voorbeelden uit de vorige sectie hebben we ter illustratie een specifieke waarde voor de frequentie  $\omega$  van de bron genomen. We kunnen echter ook de transferfunctie grafisch weergeven in functie van de frequentie  $\omega$ . Aangezien de waarden van de transferfunctie betekenis krijgen indien we ze in polaire vorm weergeven, maken we twee grafieken:

- een magnitudegrafiek,
- een fasegrafiek.

We noemen dit combo het spectrum van de transferfunctie.

Indien we de frequentie-as en de magnitude-as logaritmisch maken, dan krijgen we een Bode-diagram, genoemd naar Hendrik Wade Bode (zie Figuur 5.2). Voor de frequentie-as gebruiken we gewoon een logaritmische schaal. De magnitude-as maken we logaritmisch door ze om te rekenen naar decibels. Lees meer over de decibelschaal in Bijlage D.

**Voorbeeld 1** We hernemen het eerste voorbeeld uit de vorige sectie (zie pagina 48). We berekenen toen de volgende transferfunctie als functie van  $\omega$ :

$$|Y| = \left| \frac{j\omega C}{1 + j\omega RC} \right| = \frac{\omega C}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

$$\arg Y = 90^\circ - \arctan \frac{\omega RC}{1}$$

met  $R = 1 \text{ k}\Omega$  en  $C = 1 \mu\text{F}$ .

Je vindt de grafische weergave, d.w.z. de bijhorende spectra en Bode-diagrammen in Figuur 5.3.

**Voorbeeld 2** We hernemen het tweede voorbeeld uit de vorige sectie (zie pagina 55). We berekenen toen de volgende transferfunctie als functie van  $\omega$ :

$$|Z| = \frac{R_2}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega R_2 C)^2}}$$

$$\arg Z = -\arctan \frac{\omega R_2 C}{1 - \omega^2 LC}$$

met  $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $L = 1 \text{ mH}$  en  $C = 2 \text{ }\mu\text{F}$ .

Je vindt de grafische weergave, d.w.z. de bijhorende spectra en Bode-diagrammen in Figuur 5.3.

In je cursus systeemtheorie ga je Bode-diagrammen nog in meer detail leren kennen. Momenteel beperken we ons ze te plotten indien we een uitdrukking voor de magnitude en de fase hebben als functie van de hoekfrequentie  $\omega$  (of frequentie  $f$ ).

---

### Oefeningen

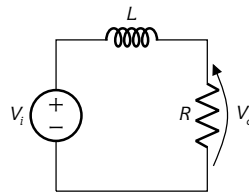
Gebruik je grafische rekenmachine of nog beter één van je favoriete programma's om grafieken mee te tekenen, Matlab bijvoorbeeld.

**Oefening 5.1.4-1:** Teken een Bode-diagram voor de impedantie van een weerstand met waarde  $R = 1000 \Omega$ .

**Oefening 5.1.4-2:** Teken een Bode-diagram voor de impedantie van een spoel met waarde  $L = 1 \mu\text{H}$ .

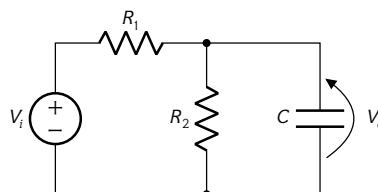
**Oefening 5.1.4-3:** Teken een Bode-diagram voor de impedantie van een condensator met waarde  $C = 1 \text{ nF}$ .

**Oefening 5.1.4-4:** Teken een Bode-diagram voor  $H(s) = V_o(s)/V_i(s)$  voor het onderstaande netwerk:

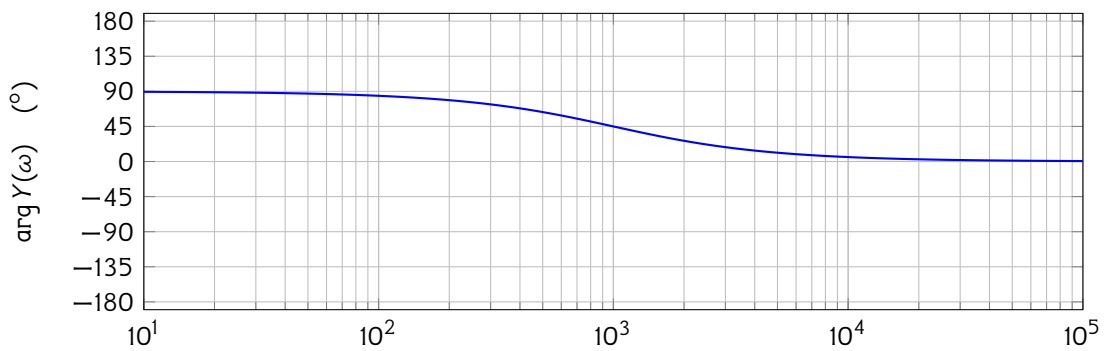
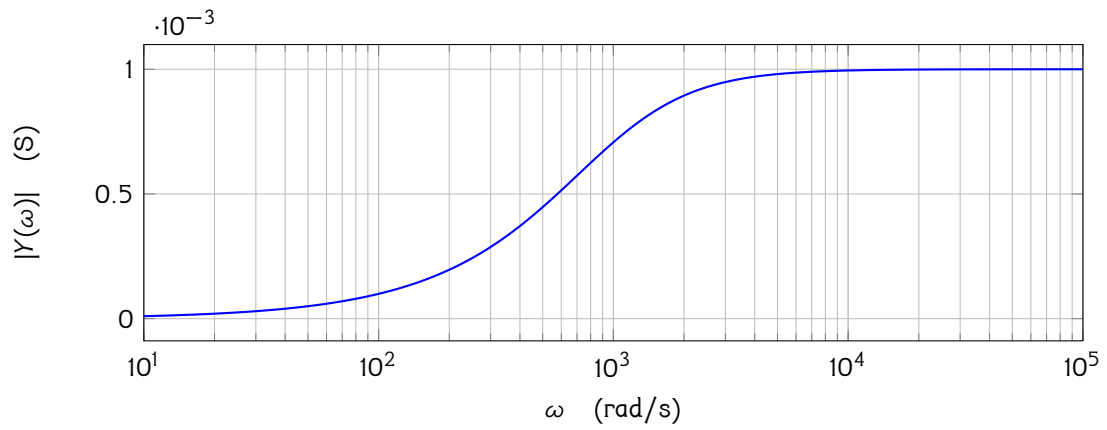


met  $R = 1 \text{ k}\Omega$  en  $L = 1 \mu\text{H}$ .

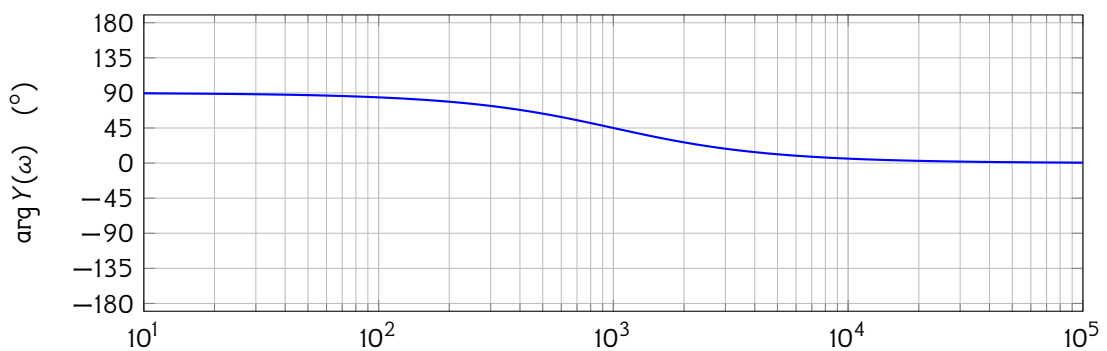
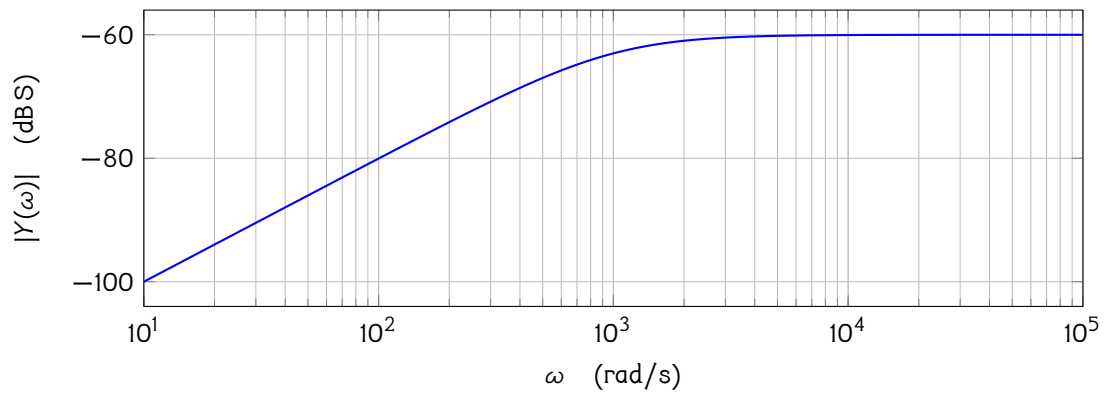
**Oefening 5.1.4-5:** Teken een Bode-diagram voor  $H(s) = V_o(s)/V_i(s)$  voor het onderstaande netwerk:



met  $R_1 = 9 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$  en  $C = 1 \mu\text{F}$ .

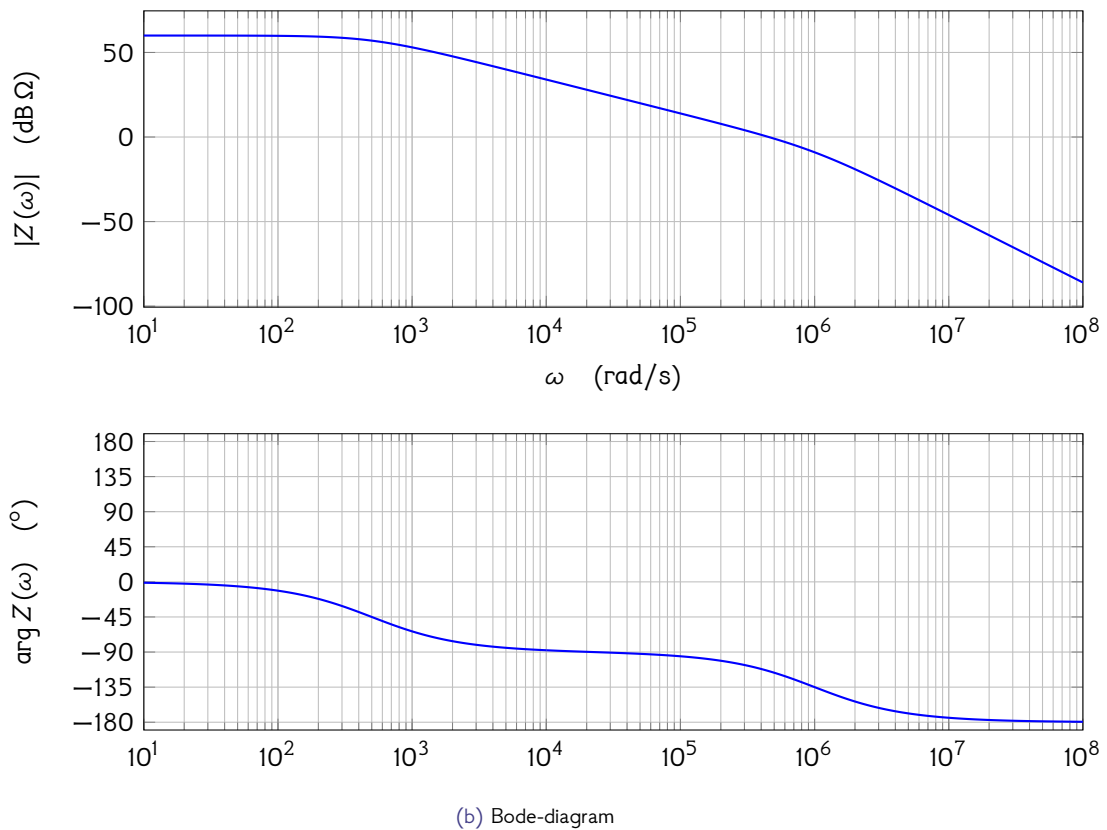
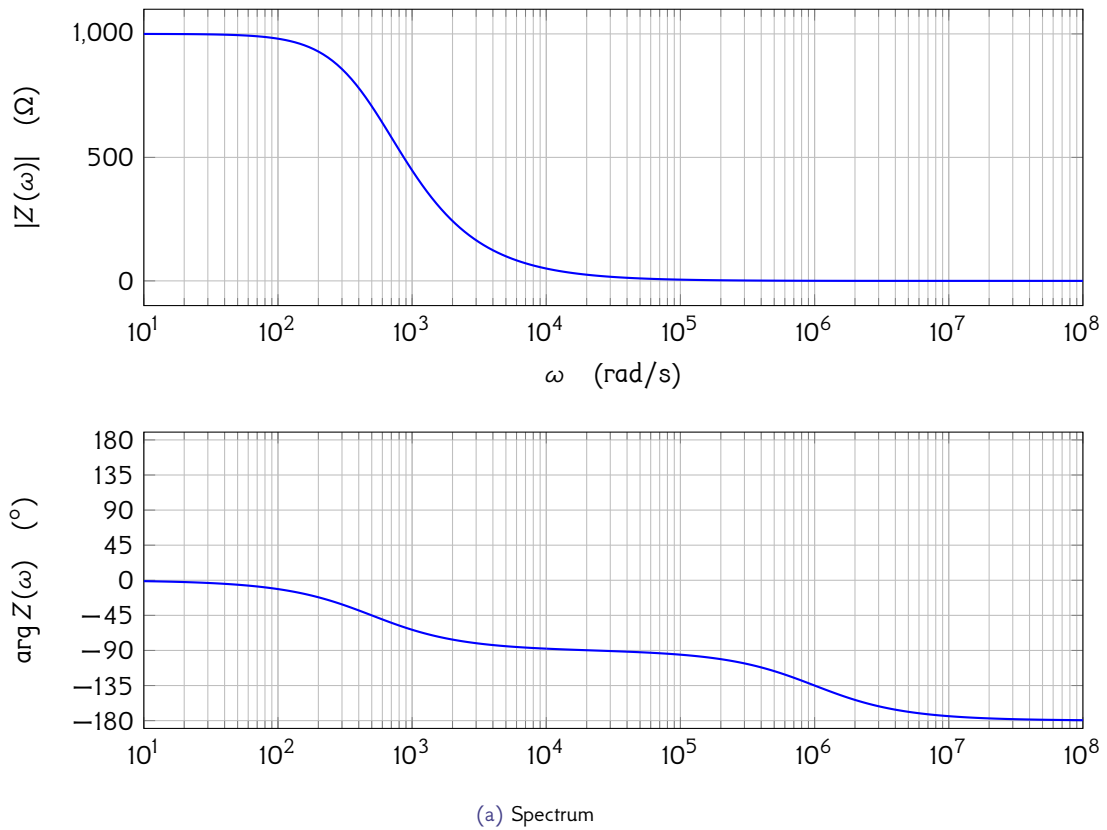


(a) Spectrum



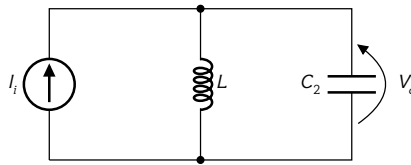
(b) Bode-diagram

Figuur 5.3: Frequentie-afhankelijkheid van de berekende transferfunctie van voorbeeld 1



Figuur 5.4: Frequentie-afhankelijkheid van de berekende transferfunctie van voorbeeld 2

Oefening 5.1.4-6: Teken een Bode-diagram voor  $H(s) = V_o(s)/I_i(s)$  voor het onderstaande netwerk:



met  $L = 1 \text{ mH}$  en  $C = 1 \text{ nF}$ .

### 5.1.5 Superpositie

Bij het opstellen van de rekenregels voor lineaire netwerken in het frequentiedomein (in sectie 5.1.3), gingen we ervan uit dat er maar één bron in het netwerk aanwezig is. Bij twee of meer bronnen, moeten we superpositie toepassen.

Lineaire netwerken voldoen inderdaad aan het superpositieprincipe, d.w.z. dat als meerdere bronnen een netwerk aansturen, je het totale effect kan berekenen als de som van alle deeleffecten (bron per bron).

We illustreren dit voor een willekeurige spanning gemeten met een voltmeter in Figuur 5.5. Dan betekent dit:

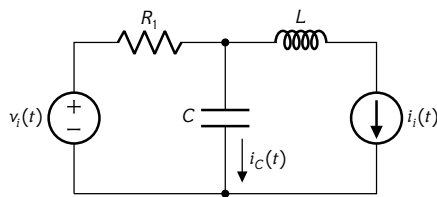
$$v_o = v_a + v_b + v_c + v_d$$

waarbij voor de berekening van elke term uit het rechterlid alle bronnen uitgeschakeld worden behalve telkens één. Voor spanningsbronnen betekent uitschakelen dat je ze vervangt door een kortsluiting, voor stroombronnen dat je ze vervangt door een open keten.

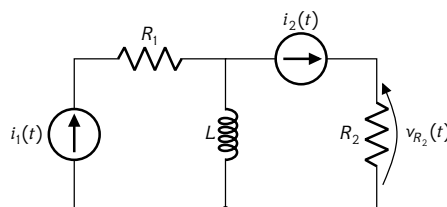
---

### Oefeningen

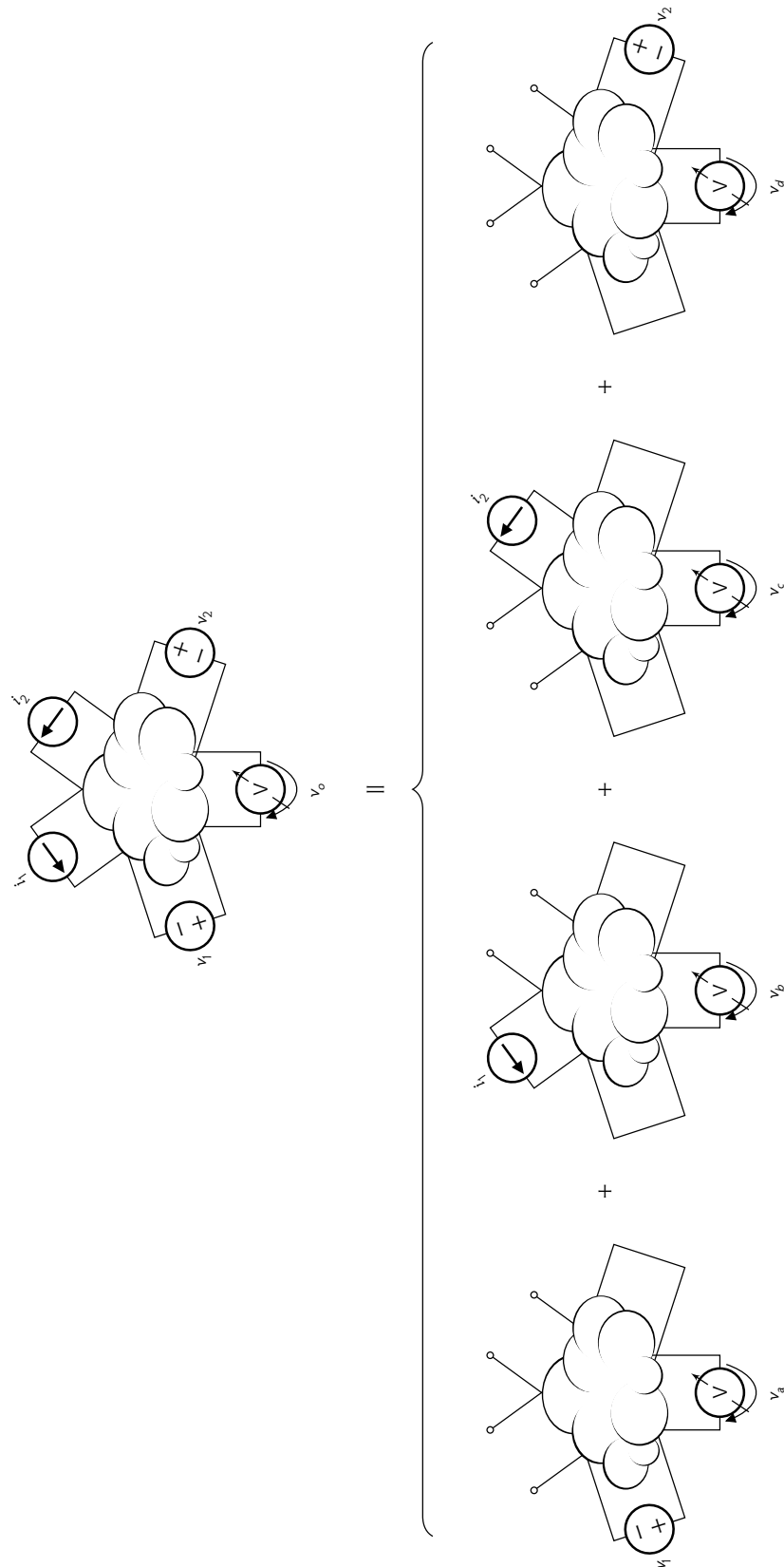
Oefening 5.1.5-1: Bereken  $i_C$  i.f.v.  $v_i$  en  $i_i$  in het frequentiedomein (rekenen met 's') door superpositie toe te passen.



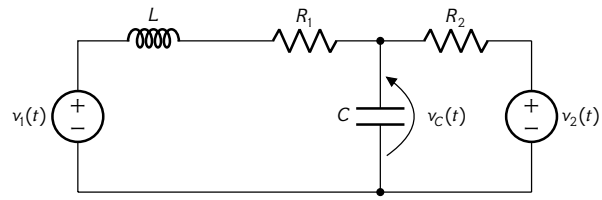
Oefening 5.1.5-2: Bereken  $v_{R_2}$  i.f.v.  $i_1$  en  $i_2$  in het frequentiedomein (rekenen met 's') door superpositie toe te passen.



Oefening 5.1.5-3: Bereken  $v_C$  i.f.v.  $v_1$  en  $v_2$  in het frequentiedomein (rekenen met 's') door superpositie toe te passen.



Figuur 5.5: Superpositie toegepast op een netwerk met meerdere onafhankelijke bronnen. Het totale uitgangssignaal is gelijk aan de som van de uitgangssignalen bekomen door alle bronnen uit te schakelen behalve telkens één:  $v_o = v_a + v_b + v_c + v_d$



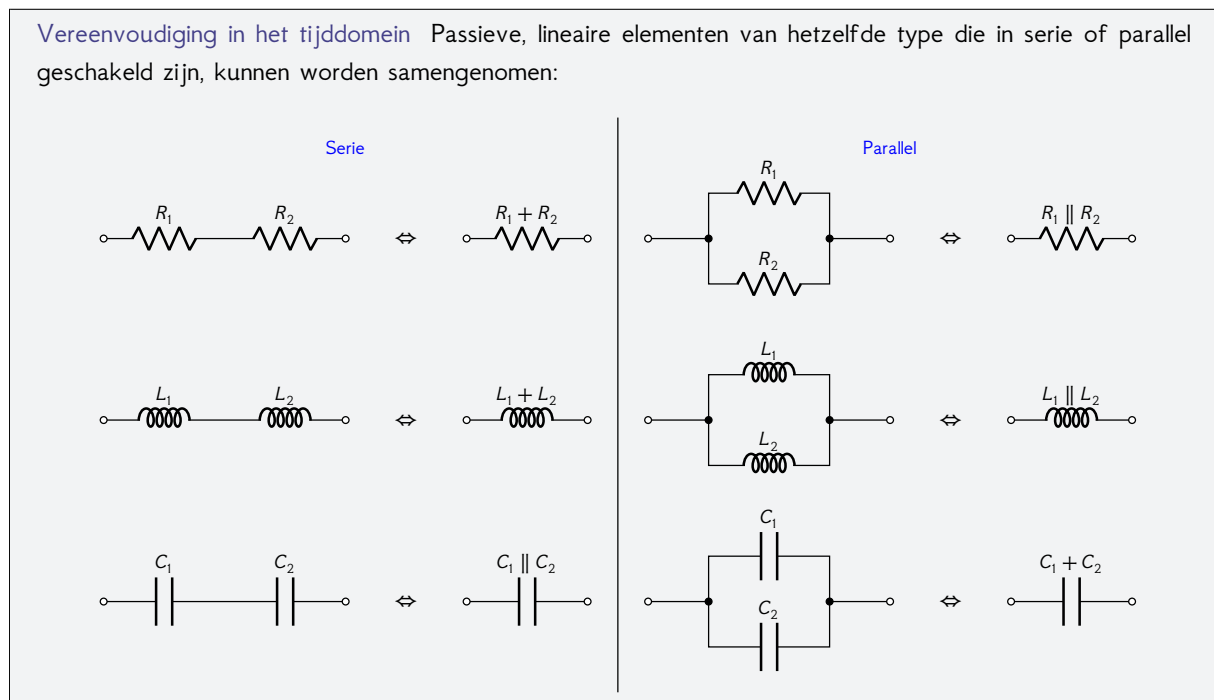
## 5.2 Elementaire vereenvoudigingen voor schakelingen in serie / parallel / ster / driehoek

Voor lineaire netwerkelementen zijn handige vereenvoudigingen mogelijk, in het bijzonder indien we rekenen in het frequentiedomein.

### 5.2.1 Serie / Parallel - vereenvoudiging

We starten in het tijddomein en behandelen dan het frequentiedomein.

In het tijddomein



Waarbij we de volgende notatie gebruiken:

$$a \parallel b = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

Merk op dat deze notatie ook kan gebruikt worden voor parallelschakelingen van meer dan twee elementen, bijvoorbeeld:

$$a \parallel b \parallel c = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

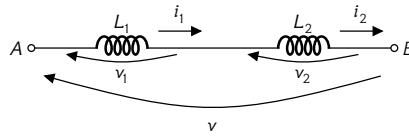
Bijkomend zit deze bewerking in de volgorde der bewerkingen tussen de optelling en de vermenigvuldiging, m.a.w.

$$A + B \parallel CD = A + [B \parallel (CD)]$$

We bewijzen enkel de serieschakeling en de parallelschakeling van de spoel. De andere bewijzen verlopen volledig parallel en kunnen door de lezer volledig analoog zelf opgesteld worden.

Bewijs serieschakeling spoelen in het tijddomein

Beschouw de serieschakeling van twee spoelen  $L_1$  en  $L_2$  en een enkele spoel met de som van de twee inductanties:



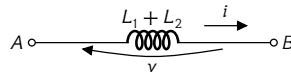
We weten dat  $i_1 = i_2$  en stellen  $i \equiv i_1 = i_2$ . Als we dit toepassen op de takvergelijkingen van de spoelen in het tijddomein, krijgen we:

$$v_1 = L_1 \frac{di}{dt} \qquad v_2 = L_2 \frac{di}{dt}$$

Wetende dat  $v = v_1 + v_2$ , leiden we verder af dat

$$v = v_1 + v_2 = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} = (L_1 + L_2) \frac{di}{dt}$$

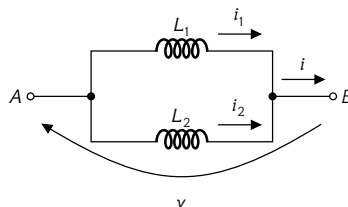
wat overeenkomt met de takvergelijking van het equivalente netwerk:



■

Bewijs parallelschakeling spoelen in het tijddomein

Beschouw de parallelschakeling van twee spoelen  $L_1$  en  $L_2$  en een enkele spoel met als inductantie  $L_1 \parallel L_2$ :



We weten dat  $i = i_1 + i_2$  en leiden deze vergelijking af naar t:

$$\frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt}$$

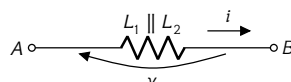
Wetende dat de spanning over beide spoelen  $v$  bedraagt, vullen we vervolgens de takvergelijkingen van de individuele spoelen in:

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L_1} v + \frac{1}{L_2} v = \left( \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) v$$

We lossen deze vergelijking op naar  $v$ , wat leidt tot:

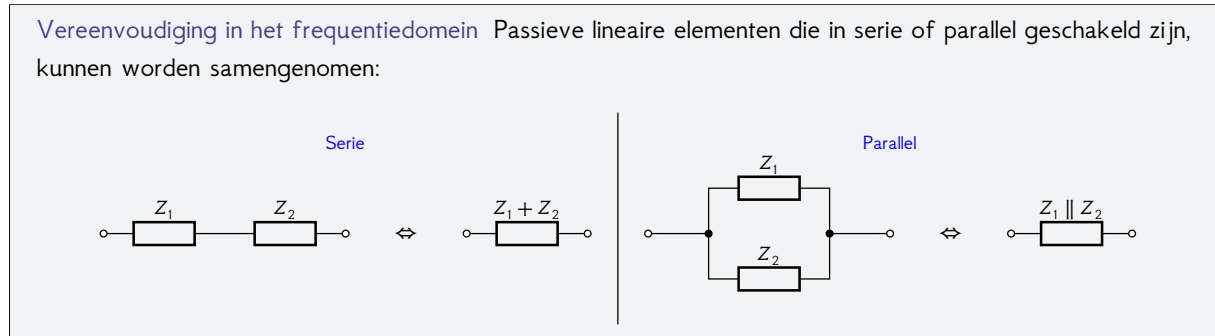
$$v = \frac{1}{\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}} \frac{di}{dt}$$

wat overeenkomt met de takvergelijking van het equivalente netwerk:



Merk op dat we in het tijddomein enkel elementen van hetzelfde type (bv. spoel met spoel) kunnen vereenvoudigen.

In het frequentiedomein Het wordt echter nog veel leuker in het frequentiedomein want dan kunnen we ook verschillende passieve elementen met elkaar combineren.

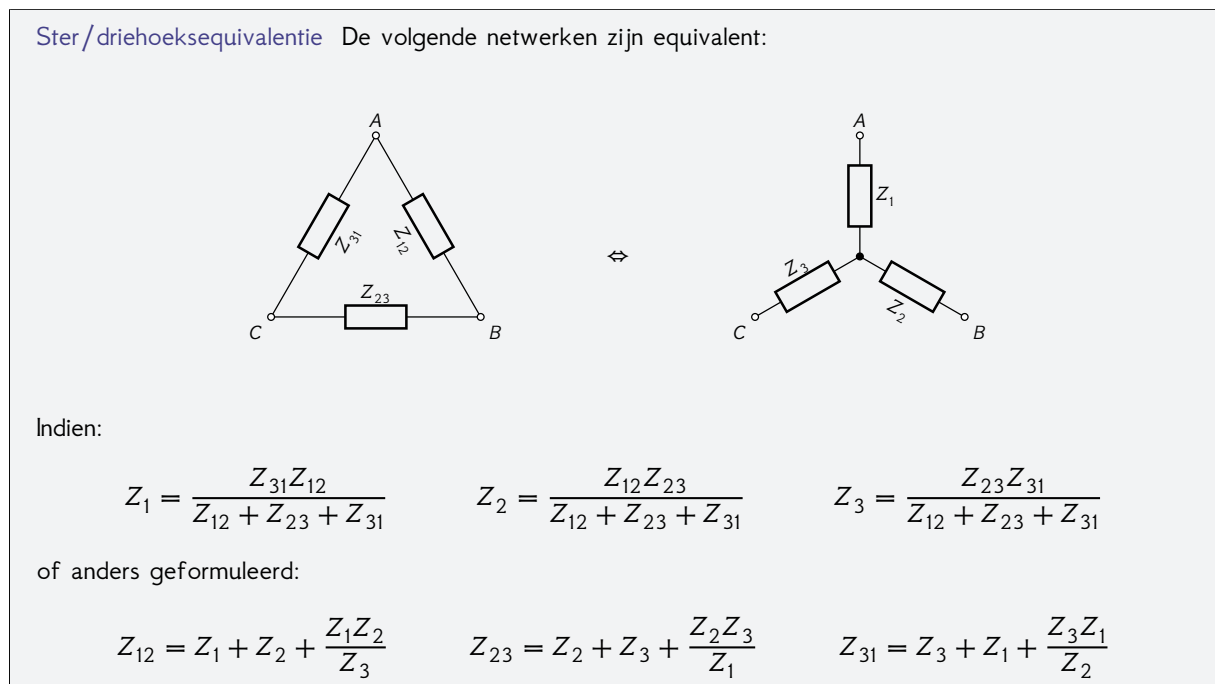


We kunnen dus serie- of parallelnetwerken van combinaties van elementen (bv. een weerstand met een condensator, of een condensator met een spoel) vereenvoudigen.

Het bewijs van deze stelling verloopt volledig parallel aan die in het tijddomein en wordt bijgevolg aan de lezer overgelaten.

### 5.2.2 Ster-driehoeksequivalentie

We behandelen deze vereenvoudiging enkel in het frequentiedomein. In het tijddomein mag je deze regels ook toepassen, maar enkel voor elementen van hetzelfde type (allemaal weerstanden, allemaal condensatoren, of allemaal spoelen).



Door deze transformatie in functie van de omstandigheden in een van de twee richtingen toe te passen, kan het oplossen van het netwerk vereenvoudigd worden.

---

#### Bewijs van driehoek naar ster

We gaan telkens tussen twee klemmen een spanningsbron aansluiten waarbij we de derde klem openlaten zodat we de stroom die gaat vloeien kunnen meten. Anders geformuleerd: we meten de impedantie tussen de twee klemmen waarbij we de derde openlaten.

Tussen  $B$  en  $C$  zien we in het linkerlid de impedantie van de sterschakeling en in het rechterlid de impedantie van de driehoeksschakeling, die vanzelfsprekend gelijk moeten zijn aan elkaar als de twee netwerken equivalent zijn:

$$\begin{aligned} Z_2 + Z_3 &= Z_{23} \parallel (Z_{31} + Z_{12}) \\ Z_2 + Z_3 &= \frac{Z_{23}Z_{31} + Z_{23}Z_{12}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Op basis van dezelfde analyse tussen klemmen  $C$  en  $A$  leren we:

$$Z_3 + Z_1 = \frac{Z_{31}Z_{12} + Z_{31}Z_{23}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}} \quad (5.2)$$

Op basis van dezelfde analyse tussen klemmen  $A$  en  $B$  leren we:

$$Z_1 + Z_2 = \frac{Z_{12}Z_{23} + Z_{12}Z_{31}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}} \quad (5.3)$$

Indien we de som (5.3) + (5.2) – (5.1) uitrekenen, dan bekomen we:

$$Z_1 = \frac{Z_{12}Z_{31}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}$$

Op gelijkaardige wijzen vinden we de uitdrukkingen voor  $Z_2$  en  $Z_3$ . ■

---

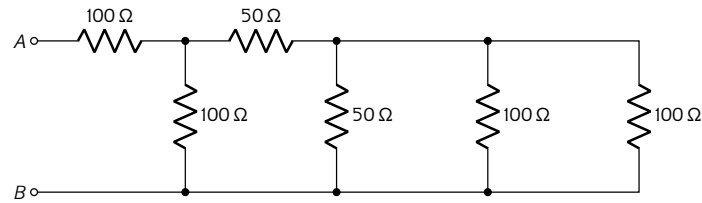
#### Bewijs van ster naar driehoek

We rekenen ditmaal met admittanties en we voeren het volgende experiment uit: we sluiten twee klemmen kort, en sluiten tussen deze twee klemmen en de derde een stroombron aan en meten welke spanning ontstaat. Anders geformuleerd: we meten de admittantie tussen de twee kortgesloten klemmen en de derde.

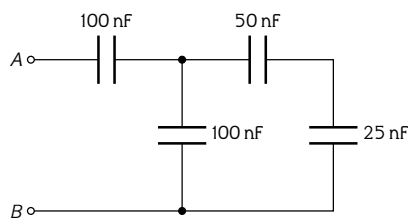
Schrijf zelf de nodige vergelijkingen en los ze op. Vervang op het einde alle admittanties door impedanties en je vindt de gezochte formules. ■

Oefeningen

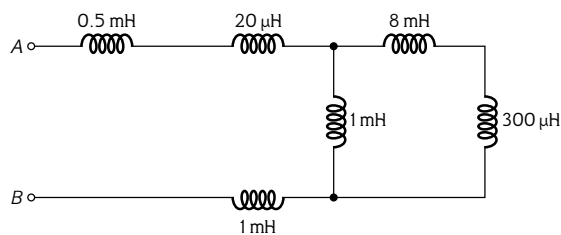
Oefening 5.2.2-1: Vereenvoudig het onderstaande netwerk tussen klemmen *A* en *B* in het tijddomein.



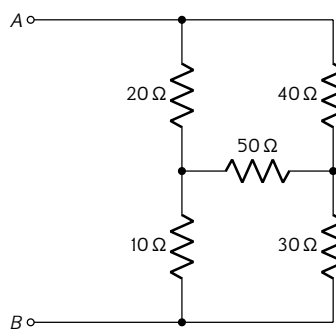
Oefening 5.2.2-2: Vereenvoudig het onderstaande netwerk tussen klemmen *A* en *B* in het tijddomein.



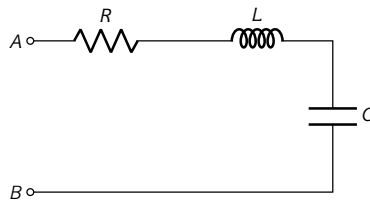
Oefening 5.2.2-3: Vereenvoudig het onderstaande netwerk tussen klemmen *A* en *B* in het tijddomein.



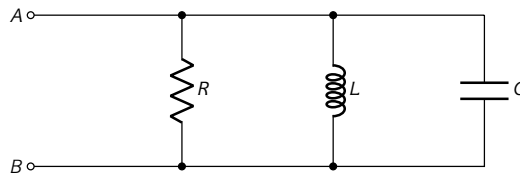
Oefening 5.2.2-4: Vereenvoudig het onderstaande netwerk tussen klemmen *A* en *B* in het tijddomein.



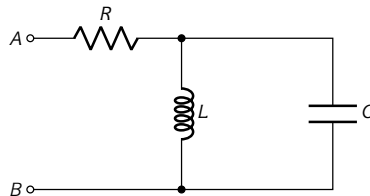
Oefening 5.2.2-5: Vereenvoudig het onderstaande netwerk tussen klemmen *A* en *B* in het frequentiedomein (rekenen met 's'):



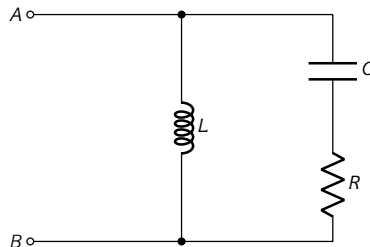
**Oefening 5.2.2-6:** Vereenvoudig het onderstaande netwerk tussen klemmen  $A$  en  $B$  in het frequentiedomein (rekenen met 's'):



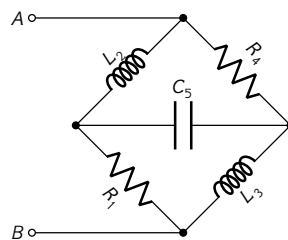
**Oefening 5.2.2-7:** Vereenvoudig het onderstaande netwerk tussen klemmen  $A$  en  $B$  in het frequentiedomein (gebruik de variabele 's'):



**Oefening 5.2.2-8:** Vereenvoudig het onderstaande netwerk tussen klemmen  $A$  en  $B$  in het frequentiedomein (gebruik de variabele 's'):



**Oefening 5.2.2-9:** Vereenvoudig het onderstaande netwerk tussen klemmen  $A$  en  $B$  in het frequentiedomein (gebruik de variabele 's'). Tip: vervang eerst de netwerkelementen door generieke impedanties  $Z_1$  t.e.m.  $Z_5$  en vervang past op het laatste de impedanties weer door de concrete uitdrukkingen.



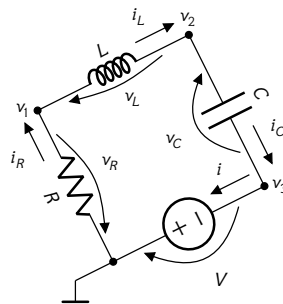
### 5.3 Rekenen met stromen en potentialen

Het nadeel van de wetten van Kirchhoff is dat je onmiddellijk een heleboel vergelijkingen krijgt:

- één voor elke onafhankelijke knoop (KCL)
- één voor elke onafhankelijke lus (KVL)
- één voor elk element in het netwerk (BE)

We kunnen de situatie significant vereenvoudigen door niet meer te werken met takspanningen maar met potentialen op de knopen. Indien we een van de knopen van het netwerk potentiaal nul geven, en de spanning tussen twee knopen beschouwen als een potentiaalverschil, dan kunnen we op die manier een potentiaal toekennen aan alle knopen in het netwerk.

We illustreren dit aan de hand van onderstaand voorbeeld. In het netwerkje met 4 knopen, kiezen we de onderste knoop als referentieknoop (met potentiaal 0 V) en duiden dit aan met een 'referentiesymbool' (een horizontaal streepje van waaruit een geleider vertrekt). We duiden de potentialen op de knopen aan als  $v_1$ ,  $v_2$  en  $v_3$ .



Deze manier van werken zorgt ervoor dat de spanningswetten van Kirchhoff automatisch voldaan zijn. Inderdaad: wetende dat spanning over de elementen potentiaalverschillen zijn:

$$v_R = 0 - v_1 \quad v_L = v_1 - v_2 \quad v_C = v_2 - v_3 \quad V = 0 - v_3$$

dan kunnen we gemakkelijk verifiëren dat KVL in de lus automatisch voldaan is:

$$v_R + v_L + v_C - V = 0$$

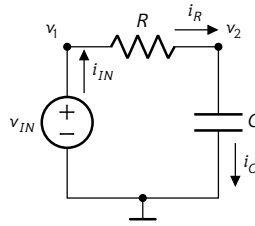
$$(0 - v_1) + (v_1 - v_2) + (v_2 - v_3) - (0 - v_3) = 0$$

Over een vereenvoudiging gesproken!

Het werken met potentialen komt ook overeen met de typische signaalverwerkingsbril waardoor elektronici naar netwerken kijken: elke knoop stelt een signaal voor (t.o.v. de referentieknoop), en het netwerk versterkt/verzwakt/filtret deze signalen door de knopen te verbinden met de gepaste netwerkelementen.

Soms hebben we differentiële signalen (verschilpotentiaal tussen twee knopen), maar ook in dat geval is het onwaarschijnlijk dat de twee betrokken knopen door exact één element van elkaar gescheiden worden. De spanning zal dus niet voorkomen in de oorspronkelijke beschrijving m.b.v. KCL/KVL/BE. Ook dan is het werken met potentialen eenvoudiger.

**Voorbeeld 1** Beschouw opnieuw het eerste voorbeeldnetwerk (zie pagina 48), waarbij we de stroom door de condensator  $i_C(t)$  moeten berekenen als functie van  $v_{IN}(t)$ . Laten we deze berekening in het tijddomein uitvoeren. We kiezen een referentieknoop en kennen de andere knopen een eigen potentiaal toe:



We schrijven Kirchhoffs stroomwetten en de nodige takvergelijkingen:

$$i_{IN} - i_R = 0 \quad (\text{KCL-}n_1)$$

$$i_R - i_C = 0 \quad (\text{KCL-}n_2)$$

$$v_1 = v_{IN} \quad (\text{BE-V})$$

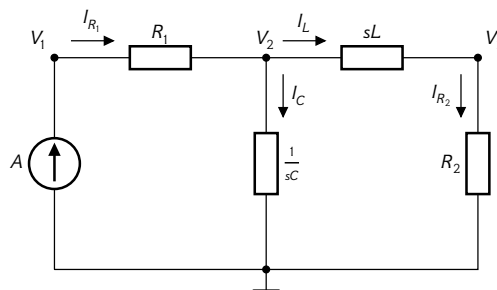
$$v_1 - v_2 = Ri_R \quad (\text{BE-R})$$

$$i_C = C \frac{dv_2}{dt} \quad (\text{BE-C})$$

Het enige aandachtspunt is het schrijven van de potentiaalverschillen in de juiste volgorde. Eliminatie van  $i_{IN}$ ,  $i_R$ ,  $v_1$  en  $v_2$  (doe dit zelf!) levert het volgende op:

$$RC \frac{di_C}{dt} + i_C = C \frac{dv_{IN}}{dt}$$

**Voorbeeld 2** Laten we nu naar het tweede voorbeeldnetwerk (zie pagina 55) kijken in het frequentiedomein. We berekenen opnieuw de spanning over  $R_2$  als functie van de amplitude  $A$  van de ingangsstroombron. We kiezen een referentieknoop en kennen de andere knopen een eigen potentiaal toe. Merk op dat  $V_{R_2} = V_3$ .



Vervolgens schrijven we opnieuw de stroomvergelijkingen en de takvergelijkingen, waarbij we bij deze laatste letten op de correcte volgorde van de potentiaalverschillen:

$$A - I_{R_1} = 0 \quad (\text{KCL-}n_1)$$

$$I_{R_1} - I_C - I_L = 0 \quad (\text{KCL-}n_2)$$

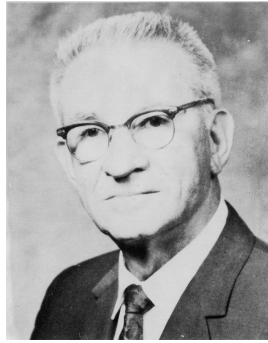
$$I_L - I_{R_2} = 0 \quad (\text{KCL-}n_3)$$

$$V_1 - V_2 = R_1 I_{R_1} \quad (\text{BE-}R_1)$$

$$I_C = sC V_2 \quad (\text{BE-C})$$

$$V_2 - V_3 = sL I_L \quad (\text{BE-L})$$

$$V_3 = R_2 I_{R_2} \quad (\text{BE-}R_2)$$



Figuur 5.6: Jacob Millman (\*1911–†1991)

Opnieuw kunnen we  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $i_{R_1}$ ,  $i_C$ ,  $i_L$  en  $i_{R_2}$  elimineren (doe dit zelf!), wat opnieuw leidt tot:

$$V_3 = \frac{R_2}{LCs^2 + R_2Cs + 1} \cdot A$$

$$\downarrow s = j\omega$$

$$= \frac{R_2}{1 - \omega^2LC + j\omega R_2C} \cdot A$$

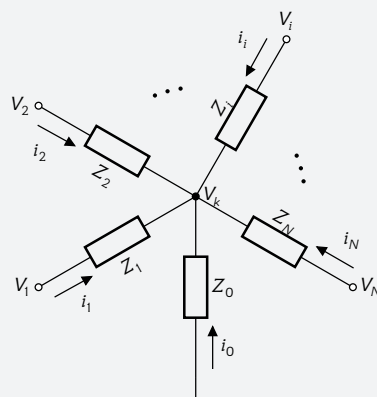
De trouwe lezer die de bovenstaande afleiding zelf heeft gemaakt, zal vaststellen dat het rekenwerk niet significant afneemt t.g.v. het werken met potentialen. De kers die nog ontbreekt op de taart is de stelling van Millman: die zal toelaten het rekenwerk gevoelig te versnellen.

## 5.4 Rekenen met potentialen: stelling van Millman

Het werken met potentialen liet toe om het probleem te formuleren zonder Kirchhoffs spanningswet (KVL) expliciet te schrijven. De stelling van Jacob Millman (Figuur 5.6) zal toelaten om ook de stroomwet (KCL) niet meer expliciet te schrijven. Op die manier reduceren we sterk het aantal vergelijkingen om het rekenwerk mee te starten [Mil40].

### Stelling van Millman

Indien een knoop uitsluitend via passieve tweepolen verbonden is met een aantal (buur)knoten, dan kan je de potentiaal op de knoop schrijven als een gewogen gemiddelde van de buurpotentialen:



$$V_k = \frac{\sum_{i=1}^N Y_i \cdot V_i}{\sum_{i=0}^N Y_i}$$

met als gewichten:  $Y_i = \frac{1}{Z_i}$

Merk hierbij op dat je de stelling enkel mag toepassen op een knoop die zuiver via passieve tweepolen op de buurknoten is aangesloten!

Het bewijs van deze stelling is haast triviaal.

Bewijs

We schrijven KCL op de centrale knoop:  $i_1 + i_2 + \dots + i_i + \dots + i_N + i_0 = 0$ .

We gebruiken dan de takvergelijkingen om de stromen te elimineren:

$$Y_1(V_1 - V_k) + Y_2(V_2 - V_k) + \dots + Y_i(V_i - V_k) + \dots + Y_N(V_N - V_k) + Y_0(0 - V_k) = 0$$

We lossen deze vergelijking op naar  $V_k$ :

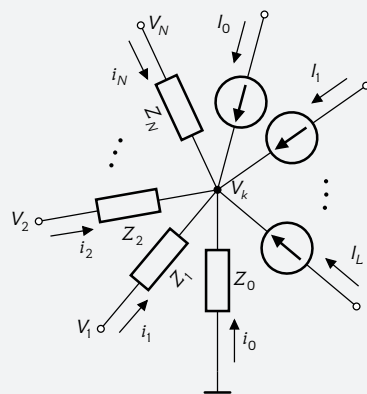
$$V_k = \frac{Y_1 V_1 + Y_2 V_2 + \dots + Y_i V_i + \dots + Y_N V_N}{Y_0 + Y_1 + Y_2 + \dots + Y_i + \dots + Y_N}$$

■

We kunnen echter nog een stap verdergaan en ook toelaten dat stroombronnen op de centrale knoop worden aangesloten. Zo komen we tot

#### De veralgemeende stelling van Millman

Indien een knoop uitsluitend via passieve tweepolen of via stroombronnen verbonden is met een aantal (buur)knoten, dan kan je de potentiaal op de knoop schrijven als een gewogen gemiddelde van de buurpotentialen en de stromen van de bronnen:



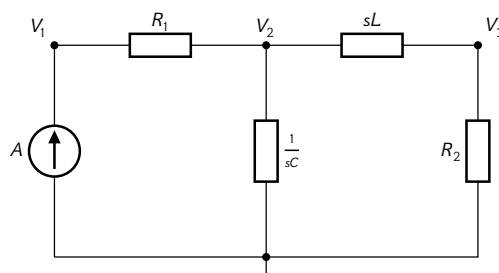
$$V_k = \frac{\sum_{i=1}^N Y_i \cdot V_i + \sum_{j=0}^L I_j}{\sum_{i=0}^N Y_i}$$

met als gewichten:  $Y_i = \frac{1}{Z_i}$

Een laatste tip, voor we een voorbeeld bekijken: omdat je vaak met de vergelijking van de (veralgemeende) stelling van Millman moet verderrekenen is het doorgaans gemakkelijker om ze neer te schrijven als:

$$\left( \sum_{i=0}^N Y_i \right) \cdot V_k = \sum_{i=1}^N Y_i \cdot V_i + \sum_{l=0}^L I_l$$

**Voorbeeld** Laten we ons ineens storten op voorbeeld 2 en  $V_3$  berekenen i.f.v.  $A$ . Merk op dat we steeds minder moeten aanduiden op het schema om het rekenwerk te starten!



We passen nu de veralgemeende stelling van Millman toe op knoop  $V_1$  en de gewone stelling van Millman op knopen  $V_2$  en  $V_3$ . Merk op hoe we daarbij gemakkelijksshalve de knopen benoemen a.d.h.v. de potentiaal die erop staat. Een tip die helpt om het rekenwerk te vergemakkelijken: schrijf de (veralgemeende) stelling van Millman als:

$$\frac{1}{R_1}V_1 = \frac{1}{R_1}V_2 + A \quad \text{MM-}V_1 \quad (5.4)$$

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{sL} + sC\right)V_2 = \frac{1}{R_1}V_1 + \frac{1}{sL}V_3 \quad \text{MM-}V_2 \quad (5.5)$$

$$\left(\frac{1}{sL} + \frac{1}{R_2}\right)V_3 = \frac{1}{sL}V_2 \quad \text{MM-}V_3$$

We elimineren eerst  $V_1$  uit (5.4) en (5.5):

$$\left(\frac{1}{sL} + sC\right)V_2 = A + \frac{1}{sL}V_3 \quad (5.6)$$

$$\left(\frac{1}{sL} + \frac{1}{R_2}\right)V_3 = \frac{1}{sL}V_2 \quad (5.7)$$

Vervolgens elimineren we  $V_2$  uit (5.6) en (5.7):

$$\left(\frac{1}{sL} + sC\right)\left(\frac{1}{sL} + \frac{1}{R_2}\right)V_3 = \frac{1}{sL}\left(A + \frac{1}{sL}V_3\right)$$

Beide leden vermenigvuldigen met  $sL$  en alle termen met  $V_3$  naar het linkerlid brengen, geeft:

$$\left[\left(1 + s^2LC\right)\left(\frac{1}{sL} + \frac{1}{R_2}\right) - \frac{1}{sL}\right]V_3 = A$$

Nu kunnen we de verhouding  $V_3/A$  gemakkelijk verder uitwerken:

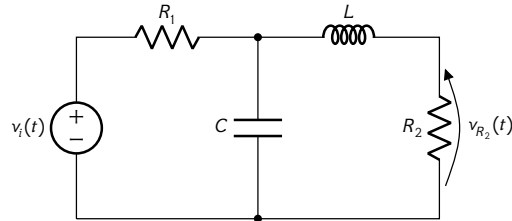
$$\begin{aligned} \frac{V_3}{A} &= \frac{1}{\left[\left(1 + s^2LC\right)\left(\frac{1}{sL} + \frac{1}{R_2}\right) - \frac{1}{sL}\right]} \\ &\downarrow \text{teller en noemer vermenigvuldigen met } sLR_2 \\ &= \frac{sLR_2}{\left[\left(1 + s^2LC\right)\left(R_2 + sL\right) - R_2\right]} \\ &= \frac{sLR_2}{sL + s^2LCR_2 + s^3L^2C} \\ &\downarrow \text{teller en noemer delen door } sL \\ &= \frac{R_2}{1 + s^2LC + sR_2C} \\ &\downarrow s = j\omega \\ &= \frac{R_2}{1 - \omega^2LC + j\omega R_2C} \end{aligned}$$

Vanzelfsprekend is dit resultaat opnieuw identiek aan het resultaat van de vorige afleidingen.

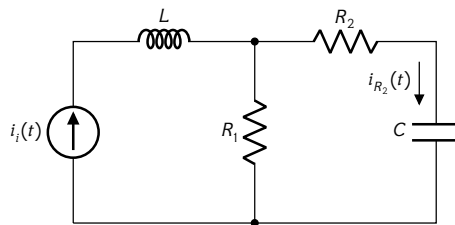
Op het eerste zicht lijkt de hoeveelheid rekenwerk niet te zijn afgenomen, maar beseft dat de bovenstaande afleiding in veel meer detail werd uitgeschreven dan bij onze afleidingen m.b.v. spanningen en zonder de stelling van Millman (in het tijd- of frequentiedomein). De grote meerwaarde is dat het aantal vergelijkingen dat je moet neerschrijven veel kleiner is, en daardoor blijft het rekenwerk veel overzichtelijker.

## Oefeningen

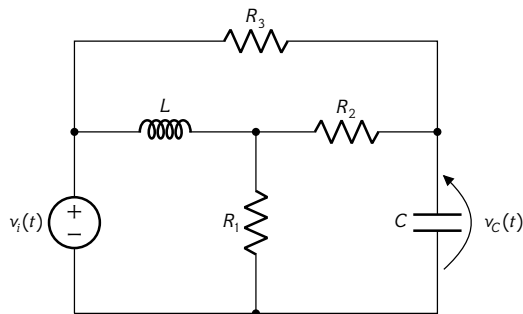
**Oefening 5.4-1:** Bereken  $v_{R_2}$  i.f.v.  $v_i$  in het frequentiedomein (rekenen met 's') m.b.v. potentiaalrekenen en de stelling van Millman. Veronderstel dus dat de bron sinusvormig is.



**Oefening 5.4-2:** Bereken  $i_{R_2}$  i.f.v.  $i_i$  in het frequentiedomein (rekenen met 's') m.b.v. potentiaalrekenen en de stelling van Millman. Veronderstel dus dat de bron sinusvormig is.



**Oefening 5.4-3:** Bereken  $v_C$  i.f.v.  $v_i$  in het frequentiedomein (rekenen met 's') m.b.v. potentiaalrekenen en de stelling van Millman. Veronderstel dus dat de bron sinusvormig is.



## 5.5 Modified Nodal Analysis (MNA)

We kunnen het rekenwerk nog verder systematiseren volgens een rekentechniek die we Modified Nodal Analysis (MNA) noemen. Deze techniek wordt gebruikt in de netwerksimulatiesoftware SPICE (Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis) [NP73], ontwikkeld door Don Pederson (zie Figuur 5.7) en alle ervan afgeleide producten, maar is ook extreem handig bij het uitrekenen van symbolische netwerkfuncties.

Het uitgangspunt is dat je de werking van een elektronische schakeling kan beschrijven met een stelsel vergelijkingen. In het licht van de hoeveelheid computergeheugen en rekenkracht die je nodig hebt om dat stelsel op te lossen, loont het om zo weinig mogelijk vergelijkingen te schrijven in zo weinig mogelijk onbekenden. De MNA-methode levert quasi het optimum: we nemen enkel de knooppuntsspanningen als onbekenden, aangevuld

---

met de stromen die we expliciet willen uitrekenen. Bijkomend kunnen we dan bij het gebruiken van deze methode voor handberekenen, nog enkele trucs uithalen om het aantal vergelijkingen en onbekenden te beperken.

Bij de handberekeningen halen we een methode van onder het stof om stelsels lineaire vergelijkingen op te lossen: de regel van Cramer. De methode raakte wat in onbruik omdat ze voor numerieke berekenen slecht presteert. Voor symbolische berekeningen is ze echter top.

## Modified Nodal Analysis

1. Bereid het netwerk voor:
  - 1.1. Voeg voor elke stroom die moet berekend worden of die gebruikt wordt door een stroomafhankelijke bron een (meet)spanningsbron met spanning nul toe.
2. Benoem de onbekenden:
  - 2.1. Geef elk knooppunt een nummer (met 0 voor de referentieknoop). De potentiaal op knoop  $n$  benoemen we als  $V_n$  (met  $n = 1, \dots, N$ , waarbij het aantal knopen gelijk is aan  $N$ ).
  - 2.2. Maak voor de stroom door elke spanningsbron een onbekende  $I_m$  aan (met  $m = 1, \dots, M$ , waarbij het aantal onbekenden gelijk is aan  $M$ ).
3. Noteer de vergelijkingen:
  - 3.1. Schrijf voor elk knooppunt de stroomwet van Kirchhoff, waarbij je een stroom die de knoop verlaat positief neemt en waarbij de onafhankelijke bronnen in het rechterlid worden geplaatst.
  - 3.2. Schrijf voor elke spanningsbron de takvergelijking (BE), waarbij de onafhankelijke bronwaarden weer in het rechterlid worden gezet.

In het geval van lineaire netwerken, krijg je op deze manier lineaire vergelijkingen in  $N + M$  onbekenden. Indien we de vergelijkingen in het frequentiedomein beschrijven, dan kunnen we het stelsel als een matrixvergelijking noteren:

$$\begin{bmatrix} \text{KCL coëfficiënten} \\ \text{BE coëfficiënten van spanningsbronnen horende bij } I_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_n \\ I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{I-bronnen} \\ \text{V-bronnen} \end{bmatrix}$$

De gezochte potentialen of stromen kunnen op die manier berekend worden met de regel van Cramer (zie Bijlage E).



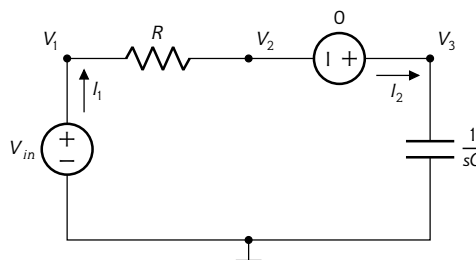
Figuur 5.7: Donald Oscar Pederson (\*1925–†2004)

**Opmerking** Bij het handmatig berekenen van de MNA, loont het om het aantal onbekenden en zo ook het aantal vergelijkingen te beperken.

- Een onbekende stroom door een impedantie kan vaak achteraf eenvoudigweg berekend worden door een potentiaalverschil te delen door de betrokken impedantie. Door geen meetspanningsbron toe te voegen daalt de dimensie van het stelsel met twee!
- Een ingangsspanningsbron die tussen een knoop en de referentieknoop staat kan in het rechterlid worden opgenomen. De dimensie van het stelsel daalt hierdoor met 1.
- Merk op dat het oplossen van dit stelsel steeds leidt tot een rationale functie van twee veeltermen in  $s$ . De noemer wordt bepaald door het netwerk zelf (ongeacht de locatie van ingang en uitgang). De teller wordt bepaald door de locatie van de ingang en de uitgang in het netwerk.

Om de procedure te illustreren, gebruiken we de twee oorspronkelijke voorbeelden, maar voegen we er achteraf nog twee nieuwe voorbeelden aan toe. De resultaten van deze voorbeelden zullen later bruikbaar blijken.

**Voorbeeld 1** Beschouw opnieuw het eerste voorbeeldnetwerk, waarbij we de stroom door de condensator  $I_C$  moeten berekenen als functie van  $V_{in}$ . We bereiden het netwerk voor door een (meet)spanningsbron met spanning nul toe te voegen in serie met de condensator (zodat de gezochte stroom  $I_C$  in de berekening zal voorkomen als de stroom  $I_2$  door de meetspanningsbron). We duiden ineens ook de onbekenden aan, nl. de potentialen  $V_1$  t.e.m.  $V_3$  en de onbekende stromen doorheen de spanningsbronnen  $I_1$  en  $I_2$ .



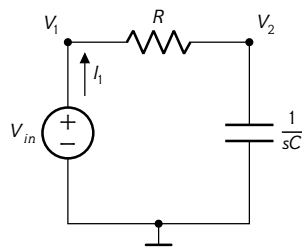
Concreet:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R} & -\frac{1}{R} & 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{R} & \frac{1}{R} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & sC & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_{in} \\ 0 \end{bmatrix}$$

M.b.v. de regel van Cramer kunnen we nu  $I_2$  berekenen als:

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R} & 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{R} & \frac{1}{R} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sC & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & V_{in} \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R} & 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{R} & \frac{1}{R} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & sC & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}$$

We hadden echter de complexiteit van het probleem kunnen beperken, door geen meetspanningsbron toe te voegen voor  $I_2$ . Dit levert ons het volgende schema op:



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R} & -1 \\ -\frac{1}{R} & \frac{1}{R} + sC & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ V_{in} \end{bmatrix}$$

Hieruit berekenen we:

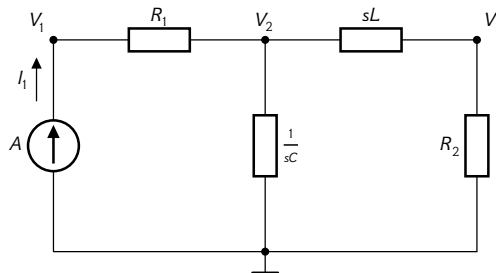
$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & -1 \\ -\frac{1}{R} & 0 & 0 \\ 1 & V_{in} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R} & -1 \\ -\frac{1}{R} & \frac{1}{R} + sC & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}} \stackrel{(C_3)}{=} \frac{V_{in}}{\frac{1}{R} + sC} \stackrel{(C_3)}{=} \frac{1}{1 + sRC} V_{in}$$

waarbij we zowel teller als noemer ontwikkelden volgens de laatste kolom (aanduiding boven en onder het gelijkheidsteken). De stroom wordt dan eenvoudigweg:

$$I_2 = sC V_2 = \frac{sC}{1 + sRC} V_{in} \stackrel{s=j\omega}{=} \frac{j\omega C}{1 + j\omega RC}$$

Merk op dat voor dit voorbeeld de berekening volgens het MNA-stramen wat weg heeft van een bazooka die gebruikt wordt om een vlieg te doden. Voor meer complexe netwerken vormt het echter wel een goede houvast om het rekenwerk overzichtelijk te houden. We hadden overigens nog verder kunnen vereenvoudigen door  $V_1$  rechtstreeks op te nemen in het rechterlid.

**Voorbeeld 2** Laten we nu naar het tweede voorbeeldnetwerk kijken in het frequentiedomein. We berekenen opnieuw de spanning over  $R_2$  als functie van de amplitude  $A$  van de ingangsstroombron. We kiezen een referentieknoop en kennen de andere knopen een eigen potentiaal toe. Merk op dat  $V_{R_2} = V_3$ .



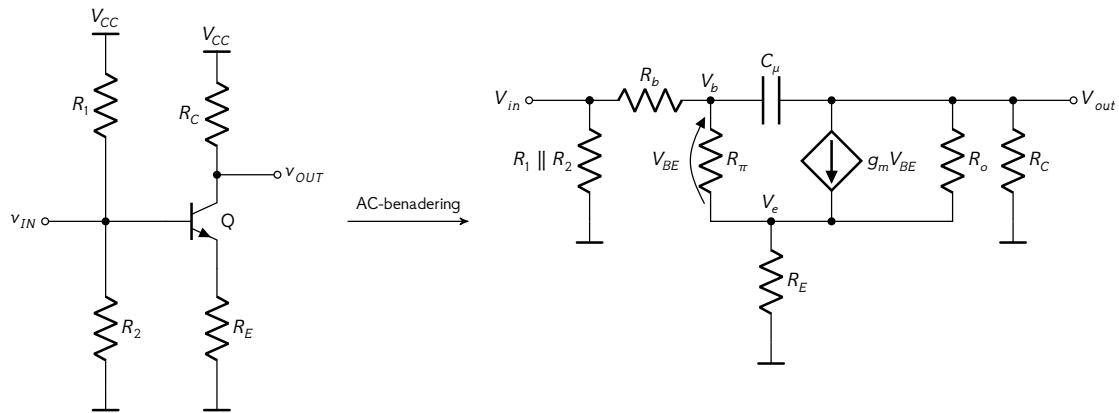
De MNA beschrijving, levert de volgende matrixvergelijking op:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + sC + \frac{1}{sL} & -\frac{1}{sL} \\ 0 & -\frac{1}{sL} & \frac{1}{sL} + \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hieruit kunnen we  $V_3$  berekenen als:

$$\begin{aligned} V_3 &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & A \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + sC + \frac{1}{sL} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{sL} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + sC + \frac{1}{sL} & -\frac{1}{sL} \\ 0 & -\frac{1}{sL} & \frac{1}{sL} + \frac{1}{R_2} \end{vmatrix}} \\ &\stackrel{(C_3)}{\stackrel{(C_1)}}{=} \frac{\frac{1}{sL} A}{\frac{1}{R_1} \left( \begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} + sC + \frac{1}{sL} & -\frac{1}{sL} \\ -\frac{1}{sL} & \frac{1}{sL} + \frac{1}{R_2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\frac{1}{R_1} & 0 \\ -\frac{1}{sL} & \frac{1}{sL} + \frac{1}{R_2} \end{vmatrix} \right)} \\ &= \frac{\frac{1}{sL} A}{\left( \frac{1}{R_1} + sC + \frac{1}{sL} \right) \left( \frac{1}{sL} + \frac{1}{R_2} \right) - \frac{1}{s^2 L^2} - \frac{1}{R_1} \left( \frac{1}{sL} + \frac{1}{R_2} \right)} \\ &= \frac{\frac{1}{sL} A}{\left( sC + \frac{1}{sL} \right) \left( \frac{1}{sL} + \frac{1}{R_2} \right) - \frac{1}{s^2 L^2}} \\ &= \frac{\frac{1}{sL} A}{sC \frac{1}{sL} + sC \frac{1}{R_2} + \frac{1}{sL R_2}} = \frac{R_2 A}{sC R_2 + s^2 CL + 1} = \frac{R_2 A}{s^2 LC + sR_2 C + 1} \\ &\downarrow s = j\omega \\ &= \frac{R_2 A}{1 - \omega^2 LC + j\omega R_2 C} \end{aligned}$$

**Voorbeeld 3** Beschouw onderstaande transistorversterker, en het equivalente schema dat de werking van de transistor beschrijft voor AC-signalen. Breek je hoofd niet over het omzetten van dit transistorschema naar een equivalent AC-schema. Dat is een techniek die we zullen leren van zodra we transistoren beschrijven.



Figuur 5.8: Eenvoudige transistorversterker: schema (links) en AC-equivalent schema (rechts)

We concentreren ons momenteel enkel op het uitrekenen van de spanningsversterking van  $V_{in}$  naar  $V_{out}$  m.b.v. de MNA-techniek. We hoeven geen specifieke stromen te kennen en voegen daarom geen (meet)spanningsbronnen toe. Bijkomend staat de ingangsspanningsbron tussen de grond en de ingangsknoop en kunnen we deze opnemen in het rechterlid. De onbekenden zijn dus de potentialen  $V_b$ ,  $V_e$  en  $V_{out}$ .

We schrijven de MNA beschrijving als volgt neer:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_\pi} + sC_\mu & -\frac{1}{R_\pi} & -sC_\mu \\ -\frac{1}{R_\pi} - g_m & \frac{1}{R_\pi} + g_m + \frac{1}{R_E} + \frac{1}{R_o} & -\frac{1}{R_o} \\ -sC_\mu + g_m & -g_m - \frac{1}{R_o} & sC_\mu + \frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_C} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_b \\ V_e \\ V_{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_b} V_{in} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Met de regel van Cramer bepalen we de uitgangsspanning  $V_{out}$ :

$$V_{out} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_\pi} + sC_\mu & -\frac{1}{R_\pi} & \frac{1}{R_b} \\ -\frac{1}{R_\pi} - g_m & \frac{1}{R_\pi} + g_m + \frac{1}{R_E} + \frac{1}{R_o} & 0 \\ -sC_\mu + g_m & -g_m - \frac{1}{R_o} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_\pi} + sC_\mu & -\frac{1}{R_\pi} & -sC_\mu \\ -\frac{1}{R_\pi} - g_m & \frac{1}{R_\pi} + g_m + \frac{1}{R_E} + \frac{1}{R_o} & -\frac{1}{R_o} \\ -sC_\mu + g_m & -g_m - \frac{1}{R_o} & sC_\mu + \frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_C} \end{vmatrix}} \cdot V_{in} \quad (5.8)$$

Dit leidt ons tot de uitdrukking die je vindt in Figuur 5.9. Jawel, we moeten het blad dwars leggen en een minuscule lettertype gebruiken om de vergelijking op een lijn te krijgen! Dit is een fundamenteel probleem in de analyse van analoge netwerken: zelfs kleine netwerken leveren al aanzienlijk lange uitdrukkingen op. En erger: de lengte van de uitdrukkingen neemt exponentieel toe met het aantal knopen en takken in een netwerk.

Onze voorlopige conclusie is dat we nood hebben aan vereenvoudiging. Dat kan op basis van een inschatting van de redelijke waarden van de componenten

- na het genereren van de uitdrukking

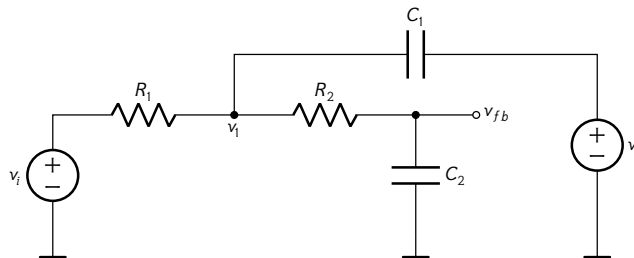
- tijdens het genereren van de uitdrukking
- vóór het genereren van de uitdrukking

In sommige gevallen is de eerste mogelijkheid zelfs niet uitvoerbaar gegeven de beschikbare rekenkracht en het geheugen van de hedendaagse computers.

Indien we bijvoorbeeld veronderstellen<sup>5</sup> dat  $R_o \gg R_C$ ,  $R_o \gg R_E$ ,  $\frac{1}{R_o} \ll g_m$  en  $\frac{1}{R_\pi} \ll g_m$ , dan kunnen we de vergelijking al vereenvoudigen (zie Figuur 5.9). Het is het handigste om dat te doen vóór de uitrekening van de determinanten in (5.8).

**Voorbeeld 4** Als volgende voorbeeld nemen we een filternetwerk met meerdere ingangen dat courant gebruikt wordt als onderdeel van een actief Sallen-Key laagdoorlaatfilter. We concentreren ons hier op het passieve netwerk.

Beschouw onderstaand schema met twee spanningsbronnen  $v_i$ ,  $v_o$  als ingang en als uitgangssignaal  $v_{fb}$ :



We passen onze MNA-methode toe waarbij we de ingangsspanningsbronnen in het rechterlid plaatsen:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC_1 & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + sC_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_{fb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}V_i + sC_1V_o \\ 0 \end{bmatrix}$$

Indien we de ingangen apart (superpositie) beschouwen, krijgen we:

$$\begin{aligned} \left. \frac{V_{fb}}{V_i} \right|_{V_o=0} &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC_1 & \frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_2} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC_1 & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + sC_2 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{\frac{1}{R_1} \frac{1}{R_2}}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC_1\right)\left(\frac{1}{R_2} + sC_2\right) - \frac{1}{R_2}^2} \\ &= \frac{\frac{1}{R_1} \frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_1} \frac{1}{R_2} + s\left(\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)C_2 + \frac{1}{R_2}C_1\right) + s^2C_1C_2} = \frac{1}{1 + s((R_1 + R_2)C_2 + R_1C_1) + s^2R_1R_2C_1C_2} \end{aligned}$$

<sup>5</sup>De notatie '≫' staat voor 'veel groter dan' en '≪' voor 'veel kleiner dan'. Hoeveel groter of kleiner? Zoveel dat je de kleinere term kan verwaarlozen. Frequent hanteren we een factor 50 of meer.

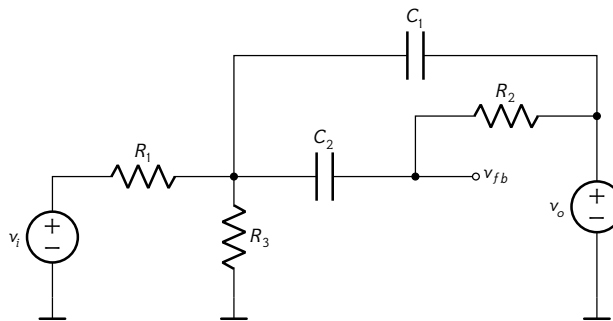


en

$$\begin{aligned} \frac{V_{fb}}{V_o} \Big|_{V_i=0} &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC_1 & sC_1 \\ -\frac{1}{R_2} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC_1 & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + sC_2 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{sC_1 \frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_1} \frac{1}{R_2} + s\left(\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)C_2 + \frac{1}{R_2}C_1\right) + s^2C_1C_2} = \frac{sR_1C_1}{1 + s((R_1 + R_2)C_2 + R_1C_1) + s^2R_1R_2C_1C_2} \end{aligned}$$

**Voorbeeld 5** Als laatste voorbeeld nog een filternetwerk met meerdere ingangen dat courant gebruikt wordt als onderdeel van actieve negatieve feedback filters. We concentreren ons hier opnieuw op het passieve netwerk.

Beschouw onderstaand schema met twee spanningsbronnen  $v_i$ ,  $v_o$  als ingang en als uitgangssignaal  $v_{fb}$ :



We passen onze MNA-methode toe waarbij de we de ingangsspanningsbronnen in het rechterlid plaatsen. Om het schrijfwerk nog verder te vereenvoudigen, stellen we  $G_i = 1/R_i$ :

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_3 + s(C_1 + C_2) & -sC_2 \\ -sC_2 & G_2 + sC_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_i \\ V_{fb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1V_i + sC_1V_o \\ G_2V_o \end{bmatrix}$$

Indien we de ingangen apart (superpositie) beschouwen, krijgen we:

$$\begin{aligned} \frac{V_{fb}}{V_i} \Big|_{V_o=0} &= \frac{\begin{vmatrix} G_1 + G_3 + s(C_1 + C_2) & G_1 \\ -sC_2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_1 + G_3 + s(C_1 + C_2) & -sC_2 \\ -sC_2 & G_2 + sC_2 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{sG_1C_2}{(G_1 + G_3 + s(C_1 + C_2))(G_2 + sC_2) - s^2C_2^2} \\ &= \frac{sG_1C_2}{G_1G_2 + G_2G_3 + s(G_2(C_1 + C_2) + G_1C_2 + G_3C_2) + s^2C_1C_2} \\ &= \frac{sR_2R_3C_2}{R_1 + R_3 + s(R_1R_3C_1 + (R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1)C_2) + s^2R_1R_2R_3C_1C_2} \end{aligned}$$

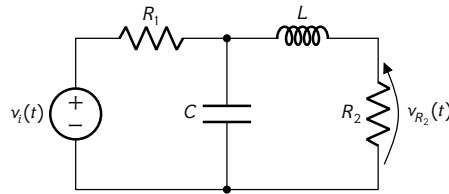
en

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{V_{fb}}{V_o} \right|_{V_i=0} &= \frac{\begin{vmatrix} G_1 + G_3 + s(C_1 + C_2) & sC_1 \\ -sC_2 & G_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_1 + G_3 + s(C_1 + C_2) & -sC_2 \\ -sC_2 & G_2 + sC_2 \end{vmatrix}} \\
 &= \frac{G_1G_2 + G_2G_3 + sG_2(C_1 + C_2) + s^2C_1C_2}{(G_1 + G_3 + s(C_1 + C_2))(G_2 + sC_2) - s^2C_2^2} \\
 &= \frac{G_1G_2 + G_2G_3 + sG_2(C_1 + C_2) + s^2C_1C_2}{G_1G_2 + G_2G_3 + s(G_2(C_1 + C_2) + G_1C_2 + G_3C_2) + s^2C_1C_2} \\
 &= \frac{R_1 + R_3 + sR_1R_3(C_1 + C_2) + s^2R_1R_2R_3C_1C_2}{R_1 + R_3 + s(R_1R_3C_1 + (R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1)C_2) + s^2R_1R_2R_3C_1C_2}
 \end{aligned}$$

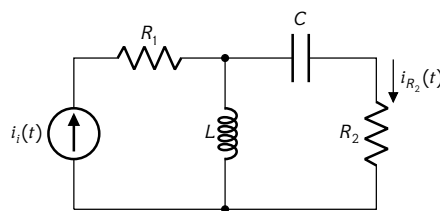
Beide transferfuncties zullen we nodig hebben bij het ontwerpen van filters met meervoudige feedback.

## Oefeningen

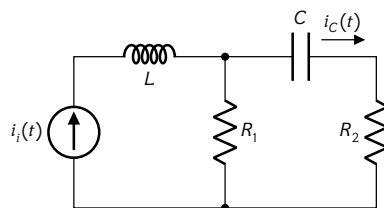
Oefening 5.5-1: Bereken  $v_{R_2}$  i.f.v.  $v_i$  in het frequentiedomein (rekenen met 's') met de MNA methode.



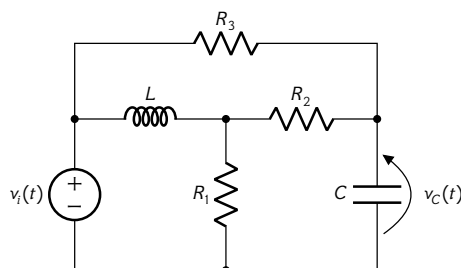
Oefening 5.5-2: Bereken  $i_{R_2}$  i.f.v.  $i_i$  in het frequentiedomein (rekenen met 's') met de MNA methode.



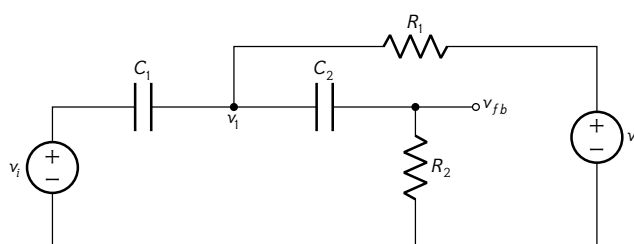
Oefening 5.5-3: Bereken  $i_C$  i.f.v.  $i_i$  in het frequentiedomein (rekenen met 's') met de MNA methode.



Oefening 5.5-4: Bereken  $v_C$  i.f.v.  $v_i$  in het frequentiedomein (rekenen met 's') met de MNA methode.



Oefening 5.5-5: Beschouw onderstaand schema met twee spanningsbronnen  $v_i$  en  $v_o$  als ingang en als uitgangssignaal  $v_{fb}$ :

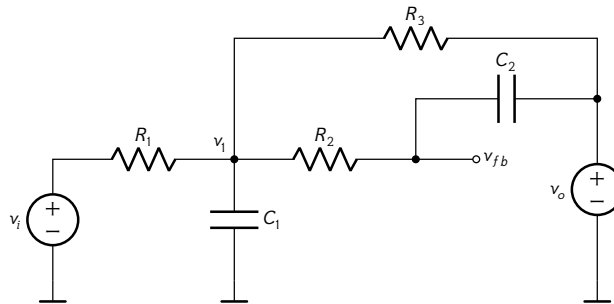


Reken de spanningstransfer uit:

- van  $V_i$  naar  $V_{fb}$
- van  $V_o$  naar  $V_{fb}$

Dit netwerk wordt gebruikt in een high-pass Sallen-Key filter.

**Oefening 5.5-6:** Beschouw onderstaand schema met twee spanningsbronnen  $v_i$  en  $v_o$  als ingang en als uitgangssignaal  $v_{fb}$ :

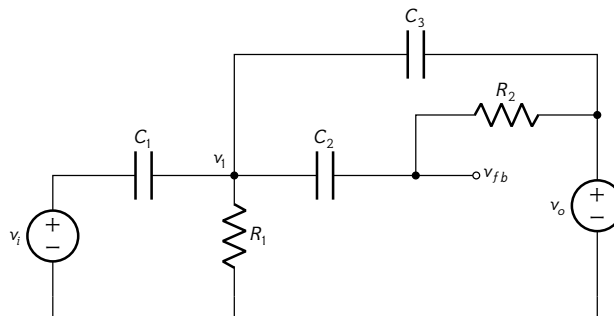


Reken de spanningstransfer uit:

- van  $V_i$  naar  $V_{fb}$
- van  $V_o$  naar  $V_{fb}$

Dit netwerk wordt gebruikt in een low-pass multiple feedback filter.

**Oefening 5.5-7:** Beschouw onderstaand schema met twee spanningsbronnen  $v_i$  en  $v_o$  als ingang en als uitgangssignaal  $v_{fb}$ :



Reken de spanningstransfer uit:

- van  $V_i$  naar  $V_{fb}$
- van  $V_o$  naar  $V_{fb}$

Dit netwerk wordt gebruikt in een high-pass multiple feedback filter.

## 5.6 Slotbeschouwing

In dit hoofdstuk zagen we verschillende technieken om het gedrag van lineaire netwerken te berekenen. De meest eenvoudige vertrekken van de wetten van Kirchhoff en de takvergelijkingen (de tableau-analyse). We

---

kunnen het gedrag berekenen in het tijddomein en in het frequentiedomein. Superpositie maakt het mogelijk het probleem op te splitsen in deelproblemen. Het werken met knooppuntspanningen blijkt heel interessant. Het laat toe om m.b.v. de stelling van Millman en de MNA-techniek met een minimum aan rekenwerk het gewenste resultaat te bekomen. Zorg ervoor dat je deze rekentechnieken onder de knie hebt. Het opent de poort om zelf nieuwe netwerken te leren kennen.





## Standaardkenmerken en -modellen van lineaire netwerken

---

### Overzicht

6.1	Inleiding . . . . .	88
6.1.1	Poorten . . . . .	88
6.1.2	Auto- vs. trans-kenmerken . . . . .	88
6.1.3	Klem- vs. knooppuntskenmerken . . . . .	89
6.2	De situatie in rust . . . . .	89
6.3	Auto-kenmerken . . . . .	91
6.3.1	Definitie - berekening . . . . .	91
6.3.2	Betekenis . . . . .	92
6.4	Trans-kenmerken . . . . .	92
6.4.1	Definitie - berekening . . . . .	92
6.4.2	Betekenis . . . . .	93
6.5	Lineaire netwerkmodellen . . . . .	95
6.5.1	Eenpoort- of tweepoolmodellen . . . . .	96
6.5.2	Tweepoort- of vierpoolmodellen . . . . .	102
6.5.3	z-parameters . . . . .	104
6.5.4	y-parameters . . . . .	108
6.5.5	h-parameters . . . . .	109
6.5.6	g-parameters . . . . .	112
6.5.7	abcd-parameters . . . . .	116
6.5.8	a'b'c'd'-parameters . . . . .	117

Elektronische netwerken hebben als doel om bewerkingen uit te voeren op signalen. Deze signalen zijn de stromen en spanningen die we aanleggen aan het netwerk. Indien we een signaal beschouwen als een functie van de tijd, dan wil dat zeggen dat onze netwerken bewerkingen (operaties) op functies uitvoeren.

We onderscheiden:

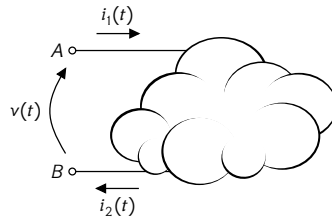
- unaire signaaloperaties, d.w.z. bewerkingen op één signaal (bv. versterken, filteren), en
- binaire signaaloperaties, d.w.z. bewerkingen waarbij we twee (of meerdere) signalen combineren (bv. optellen, vermenigvuldigen).

We concentreren ons in dit hoofdstuk op bewerkingen op één signaal. De centrale vraag in dit hoofdstuk is dus hoe het netwerk reageert indien we een signaal (een spanning of een stroom) aanleggen aan het netwerk. We beschrijven deze reactie aan de hand van een aantal standaardkenmerken.

## 6.1 Inleiding

### 6.1.1 Poorten

De eerste vraag die zich opdringt is hoe we die signalen zullen aanleggen aan het netwerk. We doen dit m.b.v. poorten.<sup>1</sup> Een poort is een paar knopen/klemmen van het netwerk die we naar buiten brengen, zodat we er een testspanning of -stroom kunnen aanleggen. Indien we ons netwerk voorstellen als een wolkje, krijgen we dus:



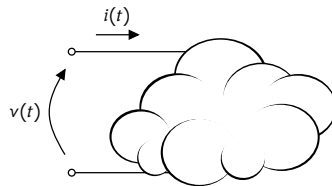
We veronderstellen daarbij steeds dat de stroom die we in één van klemmen sturen er langs de andere klem weer uitkomt, dus  $i_1(t) = i_2(t)$ .

De eis dat de bovenstaande stromen aan elkaar gelijk zijn, komt overeen met de eis dat het apparaat waarmee we onze testspanning en -stroom genereren op geen enkele andere manier verbonden is met het netwerk. Het feit dat deze stromen aan elkaar gelijk zijn is zo triviaal, dat we in wat volgt nog maar één van de twee stromen aanduiden op het schema.

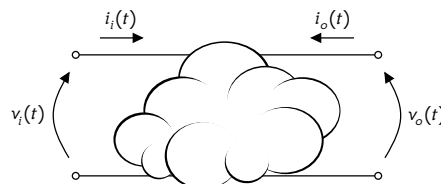
### 6.1.2 Auto- vs. trans-kenmerken

We beschouwen nu twee situaties:

- We beschouwen één poort (d.w.z. één paar klemmen) aan het netwerk, en we onderzoeken hoe een spanning die we aanleggen aan deze klemmen zich vertaalt in een stroom of omgekeerd.



- We beschouwen twee poorten (d.w.z. twee paar klemmen) aan het netwerk, en we onderzoeken hoe een spanning of een stroom die we aanleggen aan de eerste poort, zich vertaalt in een spanning of een stroom in de tweede poort.



In het eerste geval spreken we van autokenmerken (impedantie, admittantie), in het tweede geval spreken we

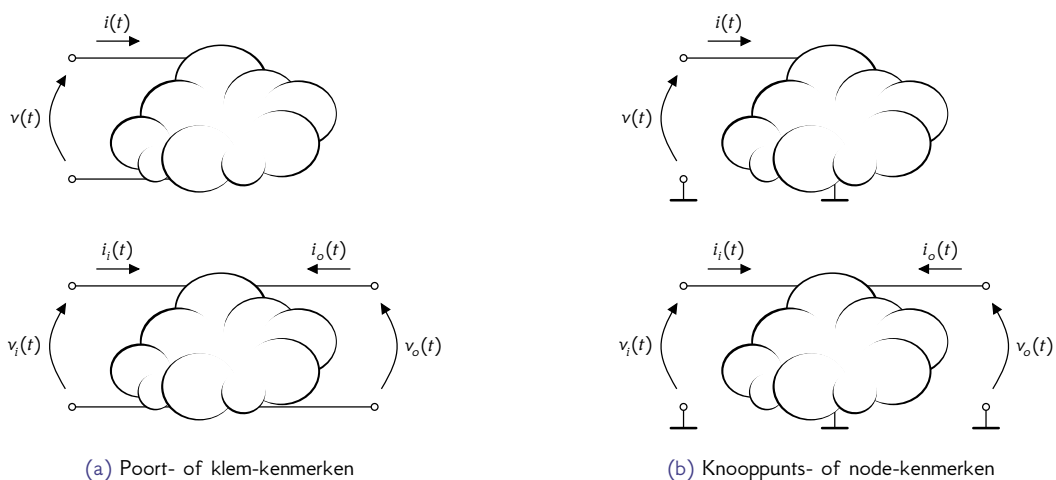
<sup>1</sup>Merk op dat we het begrip poort hier fundamenteel anders definiëren dan in de digitale elektronica, waar het begrip poort gebruikt wordt om een Booleaanse bewerking (zoals de bewerkingen AND, OR, NOT, ...) aan te duiden.

van transkenmerken (stroom- of spanningstransferverhouding, transimpedantie en transadmittantie).<sup>2</sup> Indien we willen dat  $i_o(t) \neq 0$ , dan betekent dit natuurlijk dat we een stroompad moeten voorzien, d.w.z. dat we een belasting op de tweede poort moeten aansluiten.

De autokenmerken worden ook wel eens driving point functies genoemd, de transkenmerken worden transfer functies genoemd.

### 6.1.3 Klem- vs. knooppuntskenmerken

Indien de klemmen van de poorten willekeurig gekozen worden (zie Figuur 6.1a), spreken we van klem- of poortkenmerken. Indien één van de klemmen de referentiepotentiaal (de 'grond') is, dan spreken we van een knooppunts-, knoop- of nodekenmerk (zie Figuur 6.1b).



Figuur 6.1: Illustratie van de verschillende soorten poort/klem- en knooppunts/node-kenmerken die je kan berekenen/meten (autokenmerken bovenaan, transkenmerken onderaan). Voor de transkenmerken zijn ook mengvormen mogelijk, waarbij een van de ingangsklemmen de referentiepotentiaal is, maar de uitgangsklemmen er volledig los van staan, of omgekeerd.

## 6.2 De situatie in rust

Als een netwerk geen autonome bronnen bevat, dan gaan de spanningen en stromen een strikt lineair verband hebben. Als een netwerk wel autonome bronnen bevat, dan gaan de spanningen en stromen een affien verband hebben. Wat is nu het verschil tussen affien en strikt lineair? Vanuit de wiskunde benoemen we doorgaans beide als lineaire verbanden (in ruime zin).

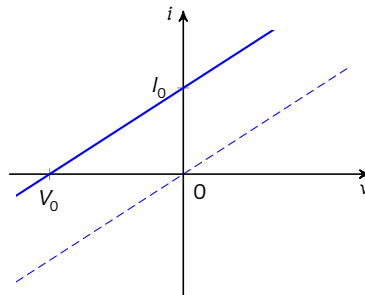
Een strikt lineair verband wordt weergegeven in Figuur 6.2a en een affien verband wordt weergegeven in Figuur 6.2b. Bij een strikt lineair verband is  $y$  een zuiver veelvoud van  $x$  (de rechte gaat door de oorsprong). Bij een affien verband is er een lineair verband tussen  $y$  en  $x$  op een constante na.

Als we op zoek gaan naar het lineaire verband tussen stromen en spanningen, dan zoeken we eigenlijk in beide gevallen naar de lineaire factor  $a$  (de helling of richtingscoëfficiënt) van het verband).

<sup>2</sup>Merk op dat we strikt genomen zouden kunnen spreken over auto-impedantie en auto-admittantie, maar in de praktijk laten we het voorvoegsel auto- steeds weg.

### De factor $a$ bepalen via berekening

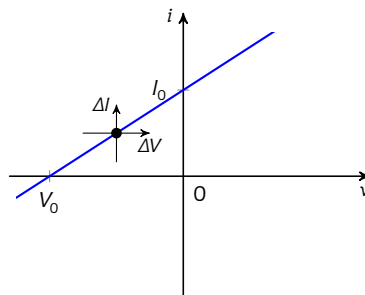
Beschouw bijvoorbeeld onderstaand verband tussen een stroom en een spanning in een lineair netwerk, aangegeven in volle blauwe lijn:



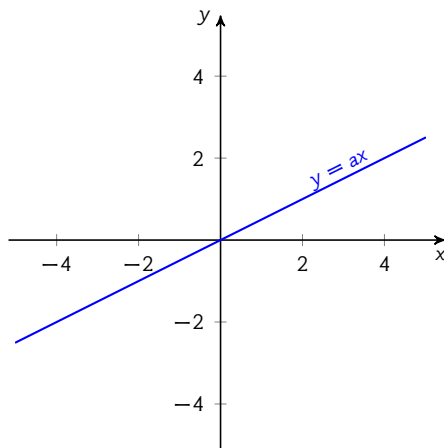
Men kan aantonen dat dit verband zich verplaatst naar de oorsprong (de gestreepte lijn), indien we in het netwerk alle autonome bronnen neutraliseren, d.w.z. de spanningsbronnen vervangen door een kortsluiting en de stroombronnen vervangen door een open keten.

### De factor $a$ bepalen via meting

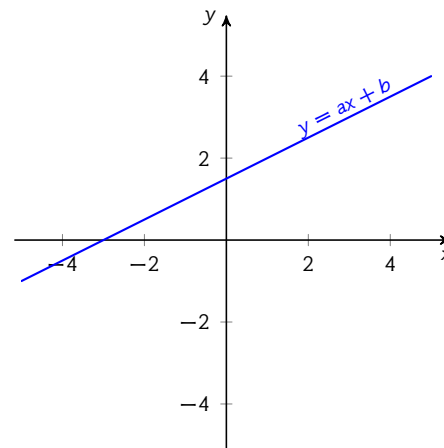
Indien we enkel kunnen meten om de factor  $a$  te bepalen, dan zullen we eerst een rusttoestandsmeting moeten uitvoeren, om zo ons nulpunt opnieuw te ijken en de wijzigingen t.o.v. die rusttoestand te meten. We verplaatsen dan ons assenkruis  $(V, I)$  naar het assenkruis  $(\Delta V, \Delta I)$ , zoals aangegeven in de onderstaande figuur:



De rusttoestand is aangegeven met een zwarte stip. In het relatieve coördinatenstelsel kunnen we metingen



(a) Een strikt lineair verband tussen  $y$  en  $x$



(b) Een affien verband tussen  $y$  en  $x$

Figuur 6.2: Lineaire verbanden (in ruime zin)

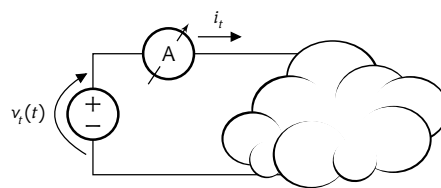
uitvoeren die een zuiver lineair verband zullen weergeven.

## 6.3 Auto-kenmerken

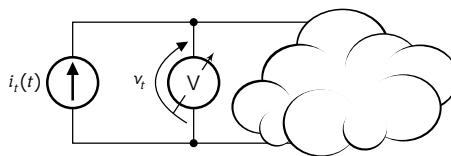
### 6.3.1 Definitie - berekening

We kunnen de volgende twee experimenten uitvoeren op de enige poort die we beschouwen in het netwerk. Dit experiment kan je zowel in gedachten uitvoeren (en ermee rekenen), als in de werkelijkheid aan de labotafel (al metend).

- We leggen een testspanning aan en we meten de stroom die vloeit:



- We leggen een teststroom aan en we meten de spanning die over de klemmen ontstaat:



Merk op dat de inwendige impedantie van de ideale ampèremeter  $0\ \Omega$  bedraagt en dus de spanning van de bron  $v_t$  zonder spanningsval doorgeeft aan de ingangsklemmen van het netwerk. Op dezelfde manier beïnvloedt de ideale voltmeter omwille van zijn oneindige impedantie de stroom van de bron  $i_t$  niet. Alle stroom vloeit in het netwerk.

Indien het netwerk dat we beschouwen lineair is, dan kan men aantonen dat ook het verband tussen de testspanning/stroom en de gemeten spanning/stroom lineair is. In dat geval maakt het ook niet uit welk van de twee bovenstaande experimenten je uitvoert. Merk wel op (zie vorige sectie) dat je bij berekeningen alle autonome bronnen in het netwerk eerst moet neutraliseren en dat je bij metingen incrementele metingen moet uitvoeren.

De lineariteit geldt overigens niet voor elk tijdstip<sup>3</sup>, maar wel in DC omstandigheden en in het frequentiedomein, d.w.z. als we rekenen met  $s$  of  $j\omega$ . Om dit duidelijk te maken, schrijven we in wat volgt opnieuw hoofdletters. Deze stellen als complex getal opnieuw de magnitude en de fase van de bron en de gemeten waarde voor.

We krijgen zo twee auto-kenmerken die we kunnen berekenen:

Auto-kenmerk	Definitie
Impedantie	$Z = \frac{V_t}{I_t}$
Admittantie	$Y = \frac{I_t}{V_t}$

<sup>3</sup>Enkel indien het netwerk zuiver resistief is, geldt dit wel.

### 6.3.2 Betekenis

We weten nu hoe we de autokenmerken kunnen berekenen en/of meten, maar welke betekenis hebben ze?

Ongeacht of het gaat om klem- of knooppuntskenmerken kan je het volgende stellen:

- een lage impedantie (of hoge admittantie) wil zeggen dat het moeilijk zal zijn om de spanning te wijzigen; een wijziging in spanning zal veel stroomwijziging vragen.
- een hoge impedantie (of lage admittantie) wil zeggen dat het moeilijk zal zijn om de stroom te wijzigen; een wijziging in stroom zal heel wat spanningswijziging vragen.

Merk op dat in de bovenstaande uitspraken nooit gesteld wordt dat je veel stroom of spanning zal nodig hebben. Er wordt altijd gesproken in termen van wijziging van stroom of spanning. We zullen immers later zien dat we sommige componenten van een standaard DC-spanning moeten voorzien om ze goed te laten werken ("we biasen ze in een goed werkingpunt") en dat de signalen die ze verwerken (die bovenop die DC-spanning staan) relatief klein zijn in vergelijking met de bias-grootheden.

Merk ook op dat aangezien impedanties en admittanties frequentie-afhankelijk zijn, dat eenzelfde knoop (of klem) zich voor verschillende frequenties heel anders kan gedragen.

## 6.4 Trans-kenmerken

### 6.4.1 Definitie - berekening

Indien het netwerk dat we beschouwen lineair is, dan kan men aantonen dat ook het verband tussen de testspanning/stroom en de gemeten spanning/stroom lineair is. De definities in Figuur 6.3e vermelden dus opnieuw hoofdletters, die de complexe waarde voorstellen met als magnitude en fase die van de bijhorende sinusgolf (zie sectie 5.1.3 op pagina 46).

**Spanningstransferverhouding** Hiervoor leggen we aan de ingangspoort een testspanning  $v_{i,t}(t)$  aan en meten/-berekenen wat er aan de uitgang verschijnt als  $v_{o,t}(t)$  (zie Figuur 6.3a). Merk op dat we hierbij veronderstellen dat we het netwerk aan de uitgang niet belasten met de voltmeter (d.w.z. dat er omwille van de oneindig hoge impedantie van de ideale voltmeter geen stroom vloeit). Dat wil niet zeggen dat er geen belasting tussen de twee uitgangsklemmen aanwezig is, maar in dat geval veronderstellen we dat die deel uitmaakt van het netwerk dat we testen. Anderzijds zal er wel een zekere ingangsstroom vloeien, t.g.v. van de spanning die we aanleggen aan de ingang, maar die is niet relevant voor de spanningstransferverhouding die we zoeken. De definitie van de spanningstransferverhouding vind je in Figuur 6.3e. Vermits de term spanningstransferverhouding nogal bombastisch klinkt, spreken we wel eens van een spanningsversterking (hoewel het niet noodzakelijk een versterking betekent).

**Stroomstransferverhouding** Hiervoor leggen we aan de ingangspoort een teststroom  $i_{i,t}(t)$  aan en meten/-berekenen wat er aan de uitgang verschijnt als  $i_{o,t}(t)$  (zie Figuur 6.3b). Merk op dat we hierbij veronderstellen dat we het netwerk aan de uitgang kortsluiten (t.g.v. van de oneindig grote admittantie van de ideale ampèremeter). Dat wil niet zeggen dat we een deel van het netwerk dat we testen kortsluiten. Het is immers perfect mogelijk om een 'draad' van het netwerk naar buiten te brengen als uitgangspoort en dus de stroom in de draad te meten. Anderzijds zal er over de ingangsklem een zekere ingangsspanning staan, t.g.v. van de stroom die we insturen, maar die is niet relevant voor de stroomstransferverhouding die we zoeken. De definitie van de

stroomtransferverhouding vind je in Figuur 6.3e. Vermits de term stroomtransferverhouding nogal bombastisch klinkt, spreken we wel eens van een stroomversterking (hoewel het opnieuw niet noodzakelijk een versterking betekent).

**Transimpedantie** Hiervoor leggen we aan de ingangspoort een teststroom  $i_{i,t}(t)$  aan en meten/berekenen wat er aan de uitgang verschijnt als  $v_{o,t}(t)$  (zie Figuur 6.3c). Merk op dat we hierbij veronderstellen dat het netwerk aan de uitgang een open keten is (t.g.v. van de oneindig grote impedantie van de ideale voltmeter). Er zal over de ingangsklem een zekereingangsspanning staan, t.g.v. van de stroom die we insturen, maar die is niet relevant voor de transimpedantie die we zoeken. De definitie van de transimpedantie vind je in Figuur 6.3e.

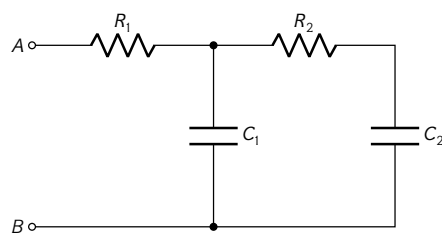
**Transadmittantie** Hiervoor leggen we aan de ingangspoort een testspanning  $v_{i,t}(t)$  aan en meten/berekenen wat er aan de uitgang verschijnt als  $i_{o,t}(t)$  (zie Figuur 6.3d). Merk op dat we hierbij veronderstellen dat we het netwerk aan de uitgang kortsluiten (d.w.z. dat er omwille van de oneindig hoge admittantie van de ideale ampèremeter geen spanning kan ontstaan). Er zal een zekereingangsstroom vloeien, t.g.v. van de spanning die we aanleggen aan de ingang, maar die is niet relevant voor de transadmittantie die we zoeken. De definitie van de transadmittantie vind je in Figuur 6.3e.

## 6.4.2 Betekenis

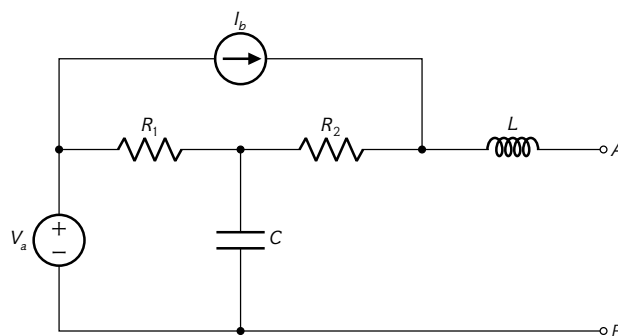
Waar bij de autokenmerken de betekenis te zoeken was in het verzet dat een klem of knoop biedt tegen de wijziging van bepaalde grootheden, zijn de transgrootheden eenvoudig te beschouwen als oorzaak-gevolg relaties. Ze geven de verhouding van gevolg ten opzichte van de oorzaak. Grote waarden geven een grote overdracht aan en vice versa.

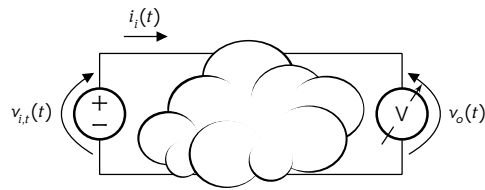
### Oefeningen

**Oefening 6.4.2-1:** Bereken de impedantie tussen klemmen  $A$  en  $B$ .

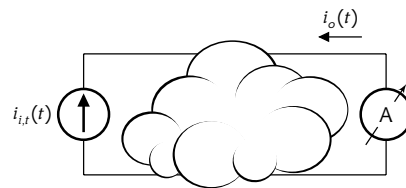


**Oefening 6.4.2-2:** Bereken de admittantie tussen klemmen  $A$  en  $B$ .

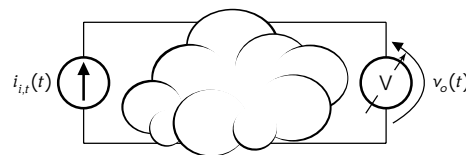




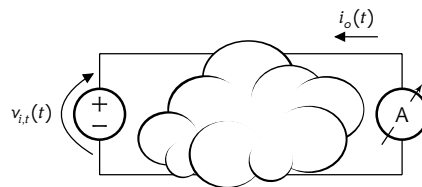
(a) Testconfiguratie voor de spanningstransferverhouding



(b) Testconfiguratie voor de stroomstransferverhouding



(c) Testconfiguratie voor de transimpedantie



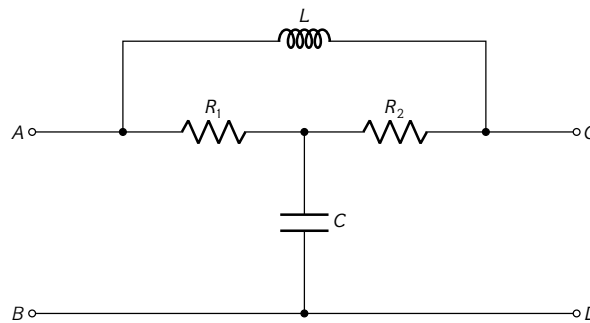
(d) Testconfiguratie voor de transadmittantie

Trans-kenmerk	Definitie
Spanningstransferverhouding	$A_v = \frac{V_o}{V_{i,t}}$
Stroomstransferverhouding	$A_i = \frac{I_o}{I_{i,t}}$
Transimpedantie	$Z_t = \frac{V_o}{I_{i,t}}$
Transadmittantie	$Y_t = \frac{I_o}{V_{i,t}}$

(e) Definities van de transkenmerken horende bij de vier respectieve bovenstaande testconfiguraties

Figuur 6.3: Testconfiguraties voor de transkenmerken (a-d) en de bijhorende definities (e)

Oefening 6.4.2-3: Bereken alle transkenmerken van klemmen  $A$  en  $B$  naar klemmen  $C$  en  $D$ .

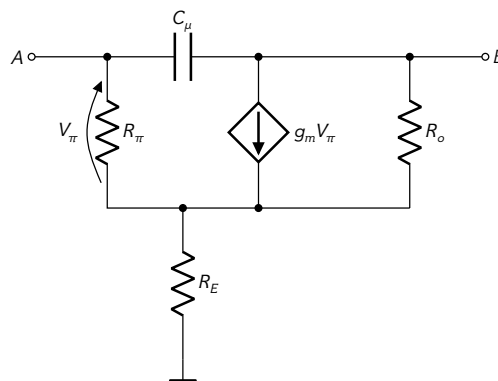


Oefening 6.4.2-4: Bereken de autokenmerken in knopen  $A$  en  $B$ . Bereken de transkenmerken van knoop  $A$  naar knoop  $B$  en omgekeerd.

Ga er voor de ingangsimpedantie, de spannings- en de stroomversterking vanuit dat het netwerk in knoop  $B$  belast wordt door een weerstand  $R_L$ . Voor de stroomversterking nemen we als uitgangsstroom, de stroom door die belastingsweerstand.

Ga er voor de uitgangsimpedantie vanuit dat de ingang wordt aangestuurd met een spanningsbron.

Als weetje: dit netwerk vormt een eenvoudig model voor de AC-werking van een bipolaire transistor in een common-emitter serie-serie-terugkoppelingsconfiguratie (voor de naam alleen al heb je een doctoraat nodig...).



## 6.5 Lineaire netwerkmodellen

Het geheel van auto- en transkenmerken past naadloos in het verhaal van de lineaire netwerkmodellen. De essentie van deze theorie is dat we een netwerk kunnen opsplitsen in blokken met poorten. We onderscheiden:

- Blokken met één poort, eenpoorten (of tweepolen) genoemd: deze worden doorgaans gebruikt om bronnen of belastingen te modelleren.
- Blokken met twee poorten, tweepoorten (of vierpolen) genoemd: deze worden gebruikt om signaalverwerkende blokken te modelleren.
- Blokken met meer poorten, multipoorten genoemd: deze worden gebruikt om signaalpaden samen te brengen of op te splitsen.

Dit werd geïllustreerd in onderstaande figuur. We behandelen de eerste twee in detail. De laatste is een logische extensie van de tweede. Die kan de lezer zelf verkennen wanneer nodig.



(a) Léon Charles Thévenin  
(\*1857–†1926)

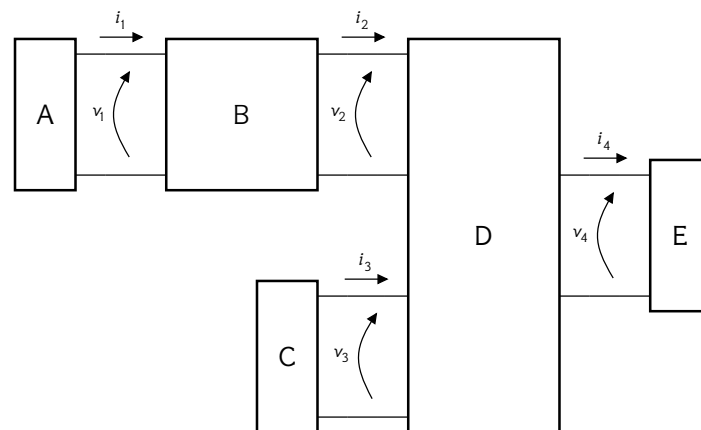


(b) Edward Lawry Norton  
(\*1898–†1983)



(c) Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz  
(\*1821–†1894)

Figuur 6.5: De drie musketiers van de equivalente netwerken



Figuur 6.4: Netwerk van lineaire netwerkmodellen: A, C en E zijn eenpoortmodellen, B een tweepoortmodel en D een multipoortmodel (met 3 poorten)

De inspiratiebronnen voor de theorie der lineaire netwerkmodellen zijn de welbekende theorema's die toegeschreven worden aan Norton en Thévenin (zie Figuur 6.5) hoewel ze al veel vroeger werden ontdekt door von Helmholtz (in 1853) [vH53]. Het centrale idee is dat we een complex netwerk kunnen vervangen door een minimaal netwerk met identiek hetzelfde gedrag.

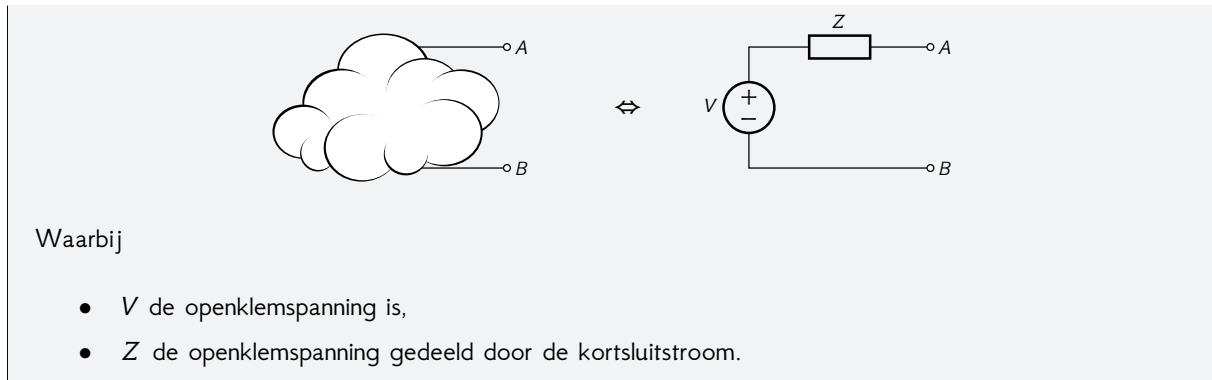
Ze geven rechtstreeks aanleiding tot de theorie van de éénpoorten en zijn een fundamentele schakel in de theorie van de tweepoorten.

### 6.5.1 Eenpoort- of tweepoortmodellen

De stellingen van Norton en Thévenin stellen dat we gelijk welk lineair/affien netwerk met twee klemmen (m.a.w. één poort) kunnen vervangen door een netwerk dat bestaat uit een bron en een passief element.

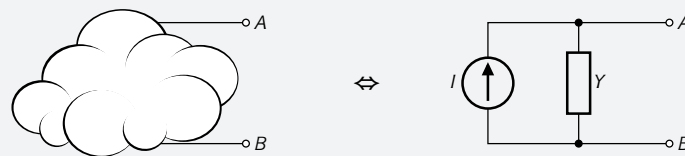
#### Theorema van Thévenin

Elk autonoom lineair/affien netwerk met twee aansluitpunten is elektrisch equivalent met een netwerk met twee aansluitpunten dat bestaat uit de serieschakeling van een (ideale) spanningsbron en een impedantie.



#### Theorema van Norton

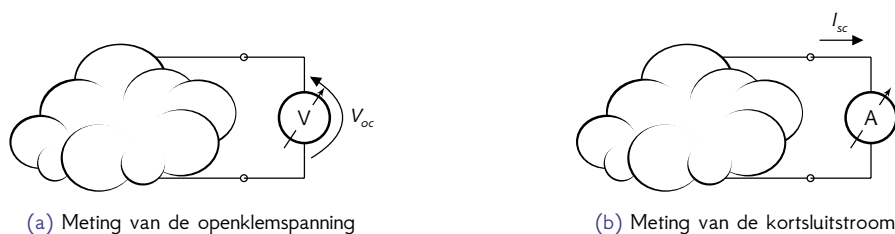
Elk autonoom lineair/affien netwerk met twee aansluitpunten is elektrisch equivalent met een netwerk met twee aansluitpunten dat bestaat uit de parallelschakeling van een (ideale) stroombron en een admittantie.



Waarbij

- $I$  de kortsluitstroom is,
- $Y$  de kortsluitstroom gedeeld door de openklemspanning.

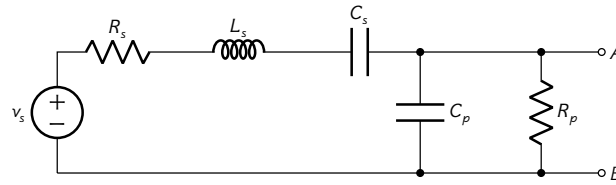
Met behulp van de twee onderstaande testconfiguraties, kunnen we de openklemspanning en de kortsluitstroom bepalen.



Figuur 6.6: Testconfiguraties om de Norton- en Théveninparameters te bepalen

De bovenstaande theorema's laten ons toe om modellen van reële bronnen of belastingen te vereenvoudigen tot deze standaardvorm. We illustreren dit met twee voorbeelden.

**Voorbeeld van een complexe bron** Beschouw het lineaire netwerkmodel van een MEMS condensatormicrofoon, in de figuur hieronder:



Figuur 6.7: Equivalent netwerkmodel van een MEMS condensatormicrofoon [GMO4]<sup>4</sup>

Laten we eenvoudigere Thévenin- en Norton-equivalenten opstellen in het frequentiedomein (gebruik makend van de handige variabele  $s$ ). De openklemspanning kan als volgt berekend worden:

$$\begin{aligned}
 V_{oc} &= V_s \frac{1}{R_s + sL_s + \frac{1}{sC_s} + \frac{1}{sC_p + 1/R_p}} \\
 &= V_s \frac{\frac{R_p}{sR_p C_p + 1}}{R_s + sL_s + \frac{1}{sC_s} + \frac{R_p}{sR_p C_p + 1}} \\
 &= V_s \frac{R_p}{(sR_p C_p + 1)(R_s + sL_s + \frac{1}{sC_s}) + R_p} \\
 &= V_s \frac{sR_p C_s}{(sR_p C_p + 1)(s^2 L_s C_s + sR_s C_s + 1) + sR_p C_s} \\
 &= V_s \frac{sR_p C_s}{s^3 R_p C_p L_s C_s + s^2 (R_p C_p R_s C_s + L_s C_s) + s(R_p C_p + R_s C_s + R_p C_s) + 1}
 \end{aligned}$$

De kortsluitstroom kan berekend worden als:

$$I_{sc} = \frac{V_s}{R_s + sL_s + \frac{1}{sC_s}} = \frac{sC_s V_s}{s^2 L_s C_s + sR_s C_s + 1}$$

De impedantie van het Thévenin equivalent wordt hierdoor:

$$Z = \frac{V_{oc}}{I_{sc}} = R_p \frac{s^2 L_s C_s + sR_s C_s + 1}{s^3 R_p C_p L_s C_s + s^2 (R_p C_p R_s C_s + L_s C_s) + s(R_p C_p + R_s C_s + R_p C_s) + 1}$$

en de admittantie van het Norton equivalent is het omgekeerde hiervan:

$$Y = \frac{I_{sc}}{V_{oc}} = \frac{1}{R_p} \frac{s^3 R_p C_p L_s C_s + s^2 (R_p C_p R_s C_s + L_s C_s) + s(R_p C_p + R_s C_s + R_p C_s) + 1}{s^2 L_s C_s + sR_s C_s + 1}$$

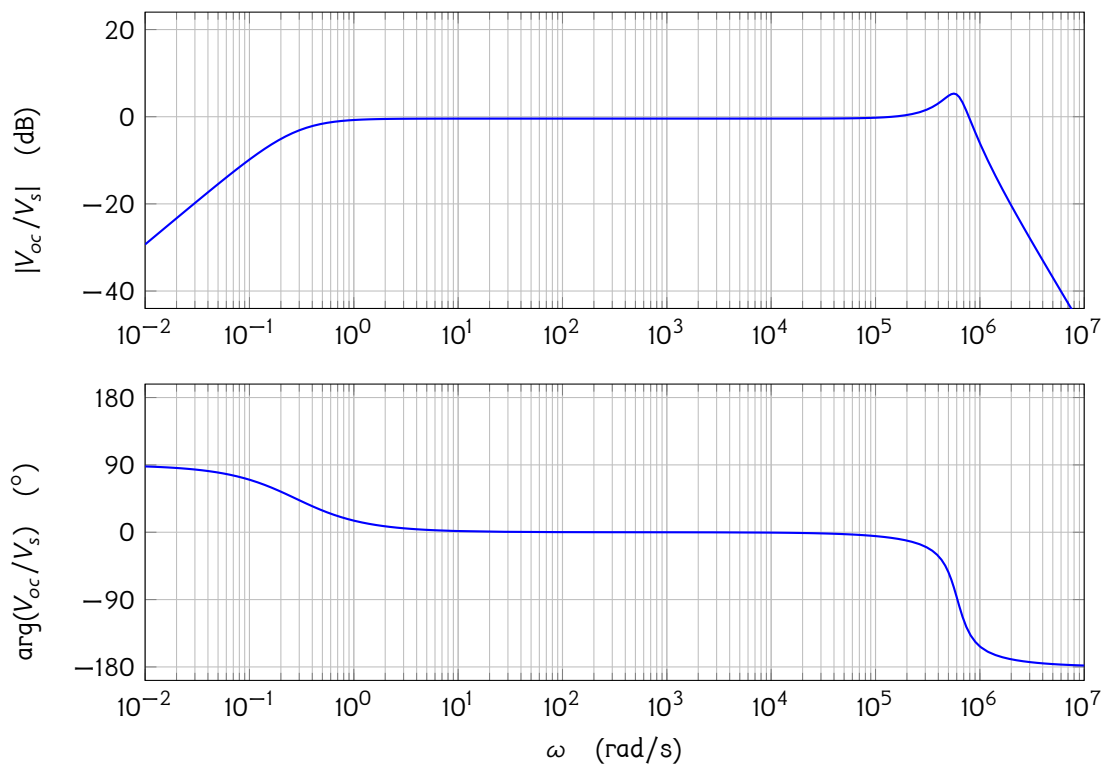
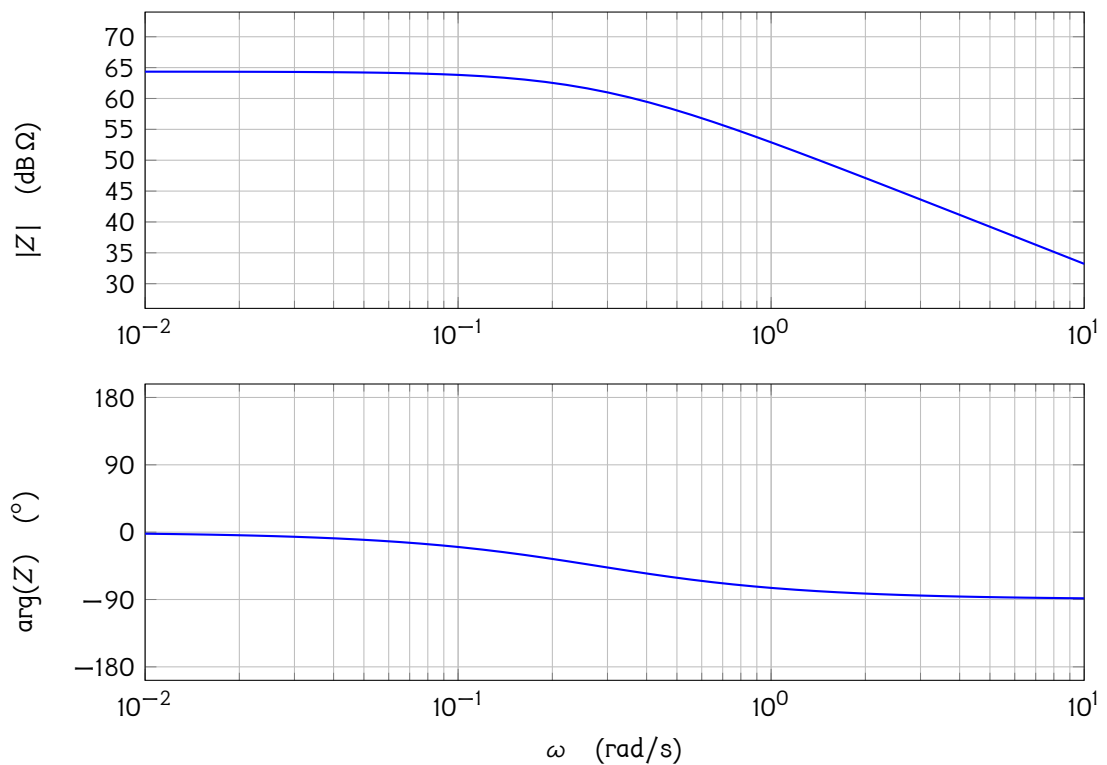
Het frequentiegedrag kan nu bepaald worden door te stellen  $s = j\omega$ . We gaan hierbij uit van waarden die bepaald werden bij het ontwerp van de microfoon, nl.

$$\begin{aligned}
 R_s &= 873 \text{ m}\Omega & C_s &= 2.1 \text{ mF} & L_s &= 26.7 \text{ nH} \\
 R_p &= 1.65 \text{ k}\Omega & C_p &= 106 \text{ }\mu\text{F}
 \end{aligned}$$

De vreemde waarden zijn toe te schrijven aan het feit dat het niet gaat om elektrische weerstanden en spoelen, maar om equivalente elementen die het akoestische gedrag van lucht en de gebruikte materialen in de microfoon weergeven.

In Figuur 6.8 worden de spectra van de openklemspanning en de impedantie van het Thévenin-equivalent weergegeven onder de vorm van een Bode diagram.

<sup>4</sup>We veronderstelden daarbij voor de eenvoud dat de akoestische impedantie  $R_s$  van de lucht in contact met het vibrerende microfoondiafragma constant is (waarde voor  $f = 100 \text{ kHz}$ ) i.p.v. frequentie-afhankelijk.

(a)  $V_{oc}/V_s$  in functie van de hoekfrequentie  $\omega$ (b)  $Z$  in functie van de hoekfrequentie  $\omega$ 

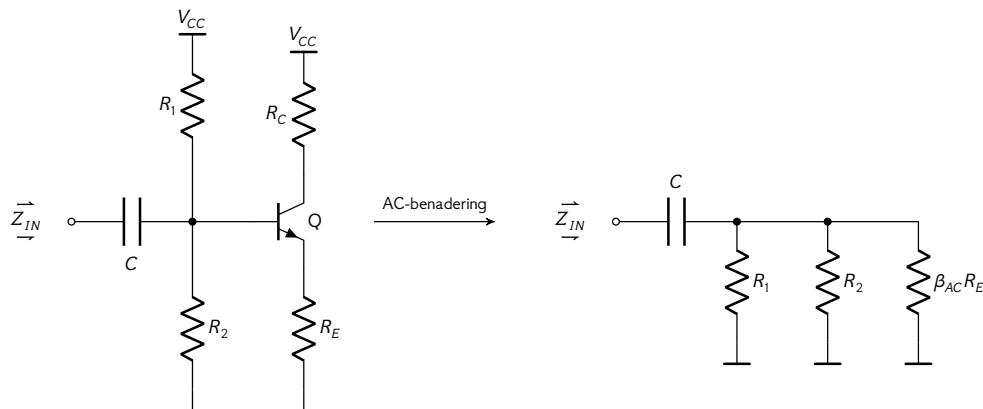
Figuur 6.8: Spectra van de parameters van het equivalente Thévenin-netwerk van de condensatormicrofoon uit Figuur 6.7: (a) openklemspanning en (b) impedantie.

Zo zien we in het magnitudediagram van de openklemspanning dat de microfoon maar goed begint te werken boven de  $1 \text{ rad/s}$  en een kleine resonantiepiek krijgt net boven de  $500 \text{ krad/s}$  waarna hij snel geen signaal meer genereert.

In het magnitudediagram van de Thévenin-impedantie zie je bij lage frequenties een waarde van ongeveer  $1.6 \text{ k}\Omega$ . Vanaf  $\omega = 0.1 \text{ rad/s}$  begint de impedantie te dalen. De fasevertraging neemt vanaf die frequentie ook toe van  $0$  naar  $-90^\circ$ . Wat wil zeggen dat de inwendige impedantie van de microfoon zich dan als een condensator begint te gedragen.

Op basis hiervan heb je een beeld in welk frequentiebereik de microfoon naar behoren werkt.

**Voorbeeld van een complexe belasting** Laten we de ingang van de onderstaande transistorversterker beschouwen (links). We zullen later zien dat we deze configuratie kunnen analyseren in AC-regime (we beschouwen het AC-regime als een superpositie op het DC-regime) m.b.v. het netwerk rechts (met  $\beta_{AC}$  de AC-stroomversterking van de transistor).



Figuur 6.9: Eenvoudige transistorversterker met capacatieve ont koppeling aan de ingang: schema (links) en AC-benadering voor de ingangsimpedantie (rechts).

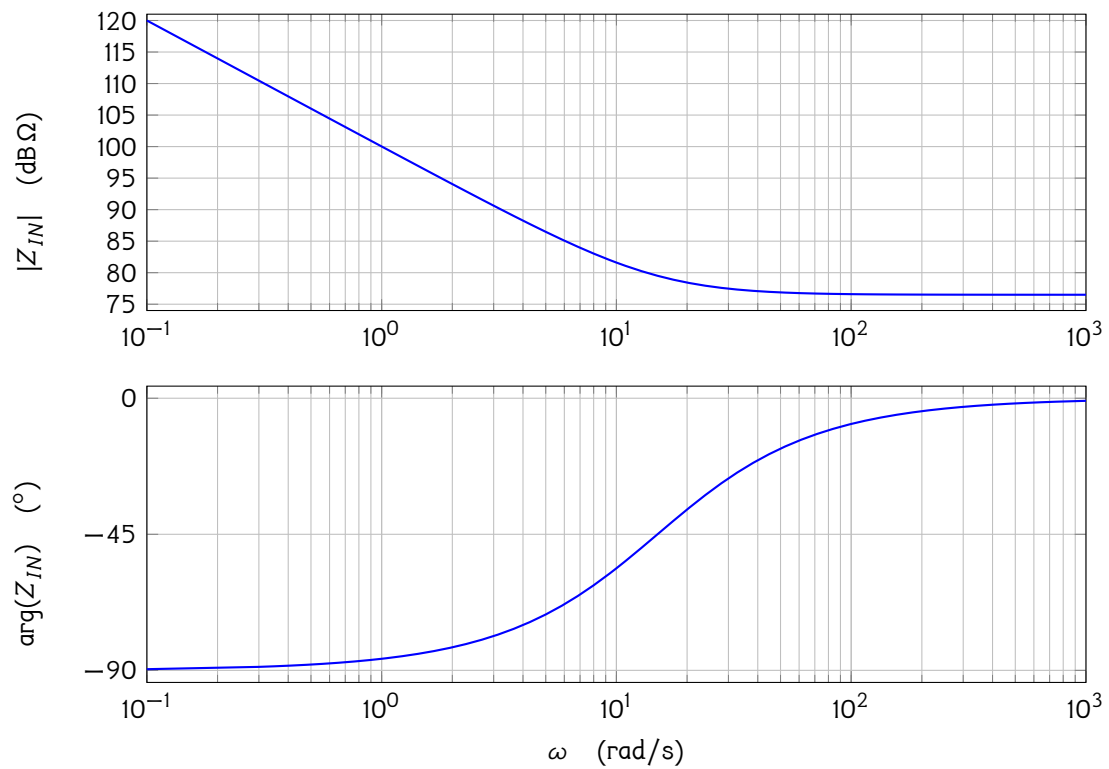
Uit deze benadering kunnen we eenvoudigweg de knooppuntsimpedantie aan de ingang van de transistor berekenen. We gebruiken weer de variable  $s$  als onze frequentievariabele.

$$\begin{aligned}
 Z_{IN} &= \frac{1}{sC} + R_1 \parallel R_2 \parallel \beta_{AC} R_E \\
 &= \frac{1}{sC} + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{\beta_{AC} R_E}} \\
 &= \frac{1}{sC} + \frac{\beta_{AC} R_E R_1 R_2}{\beta_{AC} R_E (R_1 + R_2) + R_1 R_2} \\
 &= \frac{\beta_{AC} R_E (R_1 + R_2) + R_1 R_2 + s \beta_{AC} R_E R_1 R_2 C}{s (\beta_{AC} R_E (R_1 + R_2) + R_1 R_2) C}
 \end{aligned}$$

Indien we veronderstellen dat

$$\begin{aligned}
 R_1 &= 10 \text{ k}\Omega & R_2 &= 22 \text{ k}\Omega \\
 R_E &= 1.2 \text{ k}\Omega & \beta_{AC} &= 200
 \end{aligned}$$

dan kan het frequentiegedrag opnieuw bepaald worden door  $s = j\omega$  te stellen en de magnitude en de fase te plotten. Het spectrum dat op die manier kan berekend worden, vind je in Figuur 6.10.



Figuur 6.10: Spectrum van de ingangsimpedantie van de transistorversterkerparameters van het equivalente Thévenin-netwerk van de condensatormicrofoon uit Figuur 6.9

We zien duidelijk dat voor lage frequenties de versterker zich gedraagt als een condensator van  $10\ \mu\text{F}$  (helling van  $-20\ \text{dB/dec}$  en een impedantiewaarde bij  $1\ \text{rad/s}$  van  $1 \times 10^5\ \Omega$  in combinatie met een fasevertraging van  $90^\circ$ ).

Voor frequenties boven de  $100\ \text{rad/s}$  gedraagt de ingangsimpedantie van de versterker zich als een weerstand met waarde van ongeveer  $7\ \text{k}\Omega$  (de parallelschakeling van  $R_1$ ,  $R_2$  en  $\beta_{AC}R_E$ ).

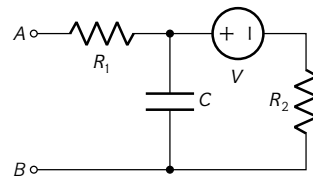
---

## Oefeningen

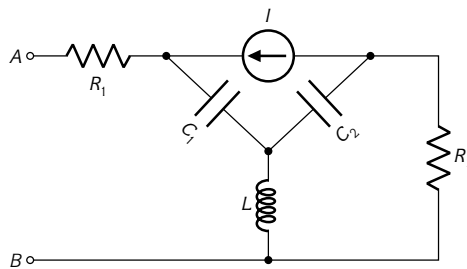
**Oefening 6.5.1-1:** Plot in Matlab of Octave de Thévenin en Norton-parameters uit het voorbeeld van de condensator-microfoon als functie van de frequentie.

**Oefening 6.5.1-2:** Plot in Matlab of Octave de AC ingangsimpedantie van de transistorversterker uit het voorbeeld van de complexe belasting.

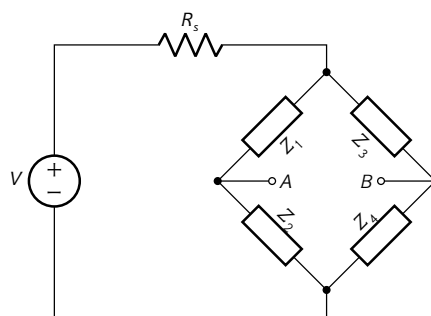
**Oefening 6.5.1-3:** Bepaal het Norton-equivalent en het Thévenin-equivalent tussen klemmen  $A$  en  $B$  van het onderstaande netwerk (in het frequentiedomein, d.w.z. reken met 's').



**Oefening 6.5.1-4:** Bepaal het Norton-equivalent tussen klemmen  $A$  en  $B$  van het onderstaande netwerk (in het frequentiedomein, d.w.z. reken met 's').



**Oefening 6.5.1-5:** Bepaal het Thévenin-equivalent tussen klemmen  $A$  en  $B$  van het onderstaande brugnetwerk (in het frequentiedomein, d.w.z. reken met 's').



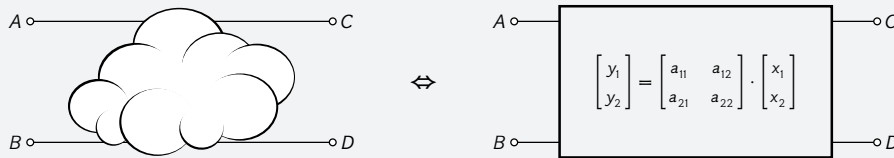
## 6.5.2 Tweepoort- of vierpoolmodellen

We kunnen ook modellen en equivalente schema's maken voor tweepoorten. Een fundamenteel verschil is dat we ervoor kiezen om geen onafhankelijke bronnen toe te laten in de tweepoorten. Dat is niet geheel onlogisch aangezien een éénpoort (of tweepool) erop gericht is een signaal te genereren, terwijl tweepoorten erop gericht zijn om signalen te verwerken (en dus niet om extra signalen in het systeem te brengen).

Het tweepoorttheorema vormt de basis:

#### Tweepoorttheorema

Elk autonoom lineair netwerk met twee poorten dat geen onafhankelijke bronnen bevat, kan geschreven worden als een 2-D (lineaire) matrixvergelijking die twee afhankelijke variabelen  $y_1$  en  $y_2$  beschrijft als lineaire combinatie van twee onafhankelijke variabelen  $x_1$  en  $x_2$ :



De afhankelijke en onafhankelijke variabelen worden geselecteerd uit de poortstromen en poortspanningen van de twee poorten.

De keuze van deze variabelen bepaalt de aard van het equivalente netwerk. Dit leidt tot 6 verschillende modellen.

We onderscheiden tweepoortmodellen die effectief aanleiding geven tot een eenvoudig equivalent schema (en dus vergelijkbaar zijn met Norton- en Thévenin-equivalenten), namelijk:

- impedantieparametermodellen (z-parameters)
- admittantieparametermodellen (y-parameters)
- hybride parametermodellen (h-parameters)
- inverse hybride parametermodellen (g-parameters)

Er zijn nog twee andere tweepoortmodellen, die minder eenvoudig als equivalent schema zijn voor te stellen, namelijk:

- transmissieparametermodellen (abcd-parameters)
- inverse transmissieparametermodellen (a'b'c'd'-parameters)

De zes modellen gaan uit van stromen en spanningen. Het is echter ook mogelijk om equivalenten te definiëren die uitgaan van vermogens (de s-parameter en t-parameter equivalenten). Op deze modellen gaan we hier niet verder in. Hierover leer je meer in je cursussen hoogfrequenttechnieken.

#### Gebruik van tweepoortmodellen

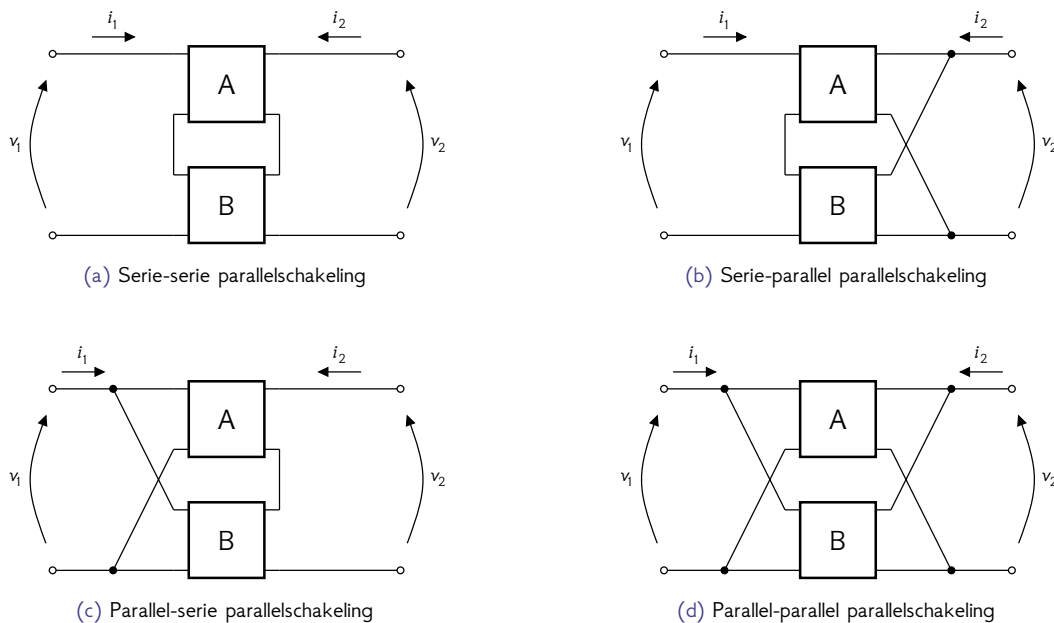
De eerste vier modellen zijn heel geschikt om parallelschakelingen van tweepoorten mee uit te rekenen. We gebruiken deze modellen typisch als we versterkers met feedback willen analyseren of synthetiseren. Een versterker in feedbackconfiguratie bestaat uit een versterker met daaraan parallel een feedbacknetwerk.

De laatste twee modellen zijn heel geschikt om cascadeschakelingen van tweepoorten uit te rekenen. Een typisch toepassingsvoorbeeld daarvan zijn impedantiematchings- en/of lange-lijn modellen (uit de telecommunicatie).

Maar wat betekent het om tweepoorten in parallel of in cascade te schakelen?

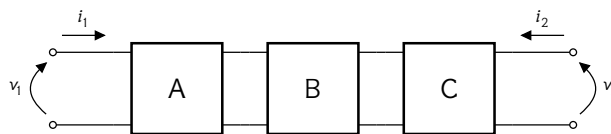
**Paralleel** Blokken parallel plaatsen wil zeggen dat we ze naast elkaar plaatsen (op papier onder elkaar) en hun ingangen en de uitgangen paarsgewijs samenknopen. Dat samenknopen kan op zichzelf in een serie- of parallelschakeling zijn.

Zo komen we tot een serie-serie parallelschakeling, een serie-parallel parallelschakeling, een parallel-serie parallelschakeling en een parallel-parallel parallelschakeling. Jawel! Hopelijk wordt deze complexe terminologie duidelijk door Figuur 6.11 hieronder grondig te bestuderen.



Figuur 6.11: Parallelschakeling van tweepoorten

**Cascade** Blokken in cascade plaatsen wil zeggen dat we ze achter elkaar zetten en de uitgang van de vorige aansluiten op de ingang van de volgende zoals afgebeeld in de onderstaande figuur.



Figuur 6.12: Cascadeschakeling van tweepoorten

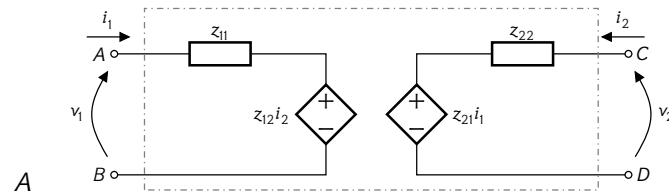
In wat volgt, beschrijven we de z-parameters en hoe ze te berekenen/meten in detail. De lezer moet op basis daarvan in staat zijn om zelfstandig dezelfde redenering te maken voor de andere parameters. We vatten voor de andere parameters dus enkel de conclusies samen.

### 6.5.3 z-parameters

**Definitie** Bij de beschrijving van het tweepoortnetwerk in termen van z-parameters, kiezen we de poortstromen  $i_1$  en  $i_2$  als onafhankelijke variabelen en de poortspanningen  $v_1$  en  $v_2$  als afhankelijke variabelen, m.a.w.:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

wat overeenkomt met het volgende equivalente netwerk:



Merk op dat:

- de parameters  $z_{ij}$  inderdaad (trans)impedanties zijn. Net zoals een (trans)impedantie zetten ze een stroom om in een spanning.
- de opbouw van het netwerk logisch is, aangezien de eerste vergelijking

$$v_1 = z_{11}i_1 + z_{12}i_2$$

de spanning over de ingangspoort schrijft als een som van twee spanningen, wat duidt op een serieschakeling van een impedantie  $z_{11}$  en een transimpedantie  $z_{12}$ .

Eenzelfde redenering kan opgebouwd worden voor de uitgang.

We noemen  $z_{11}$  de ingangsimpedantie en  $z_{22}$  de uitgangsimpedantie van het netwerk. We noemen  $z_{21}$  de voorwaartse transimpedantie en  $z_{12}$  de achterwaartse transimpedantie.

**Meting - berekening** Indien we voor een ongekende vierpoort de z-parameters moeten bepalen (d.w.z. meten of berekenen), dan kunnen we dat doen door telkens een van de parameters uit de vergelijkingen te isoleren.

Beschouw de eerste vergelijking:

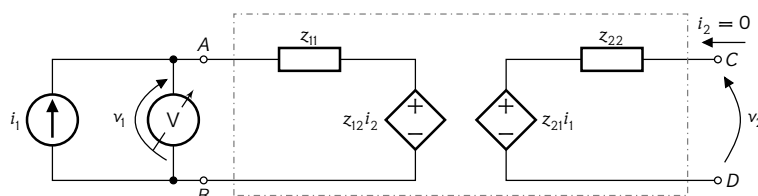
$$v_1 = z_{11}i_1 + z_{12}i_2$$

We zien dat in deze vergelijking twee parameters  $z_{11}$  en  $z_{12}$  voorkomen.

We kunnen  $z_{11}$  berekenen/meten door de term met  $z_{12}$  uit te schakelen. Dit kunnen we doen door  $i_2 = 0$  te stellen, d.w.z. de uitgangspoort open te laten zodat er geen stroom  $i_2$  kan vloeien. Hierdoor zal de afhankelijke spanningsbron aan de ingangspoort zich als zuivere kortsluiting gedragen. We kunnen dan  $z_{11}$  eenvoudig berekenen als:

$$z_{11} = \left. \frac{v_1}{i_1} \right|_{i_2=0}$$

De meetopstelling die we hiervoor moeten bouwen is:<sup>5</sup>



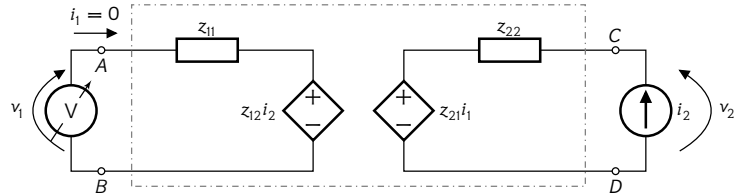
We kunnen  $z_{12}$  berekenen door de term met  $z_{11}$  uit te schakelen wat kan door  $i_1 = 0$  te stellen, d.w.z. de ingangspoort open te laten. Het feit dat er geen stroom door  $z_{11}$  vloeit, zorgt ervoor dat er geen spanningsval

<sup>5</sup>Kan je een andere meetopstelling bedenken die even goed is?

ontstaat over  $z_{11}$  waardoor we de spanning over de afhankelijke bron over de ingangsklemmen  $A$  en  $B$  kunnen meten. We kunnen  $z_{12}$  dan eenvoudig berekenen als:

$$z_{12} = \left. \frac{v_1}{i_2} \right|_{i_1=0}$$

De meetopstelling die we hiervoor moeten bouwen is:



Beschouw de tweede vergelijking:

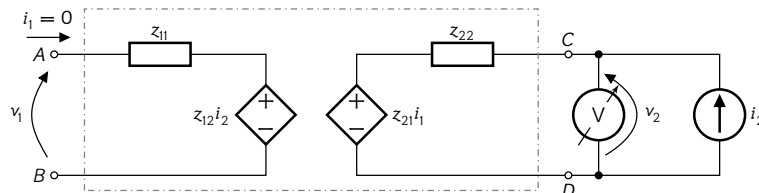
$$v_2 = z_{21}i_1 + z_{22}i_2$$

We zien dat in deze vergelijking twee parameters  $z_{21}$  en  $z_{22}$  voorkomen.

We kunnen  $z_{22}$  berekenen/meten door de term met  $z_{21}$  uit te schakelen. Dit kunnen we doen door  $i_1 = 0$  te stellen, d.w.z. de ingangspoort open te laten zodat er geen stroom  $i_1$  kan vloeien. Hierdoor zal de afhankelijke spanningsbron aan de uitgangspoort zich als zuivere kortsluiting gedragen. We kunnen dan  $z_{22}$  eenvoudig berekenen als:

$$z_{22} = \left. \frac{v_2}{i_2} \right|_{i_1=0}$$

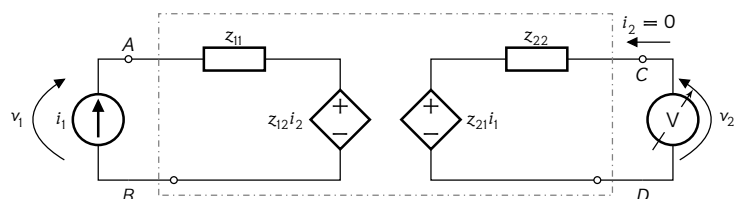
De meetopstelling die we hiervoor moeten bouwen is:



We kunnen  $z_{21}$  berekenen door de term met  $z_{22}$  uit te schakelen wat kan door  $i_2 = 0$  te stellen, d.w.z. de uitgangspoort open te laten. Het feit dat er geen stroom door  $z_{22}$  vloeit, zorgt ervoor dat er geen spanningsval ontstaat over  $z_{22}$  waardoor we de spanning over de afhankelijke bron over de uitgangsklemmen  $C$  en  $D$  kunnen meten. We kunnen  $z_{21}$  dan eenvoudig berekenen als:

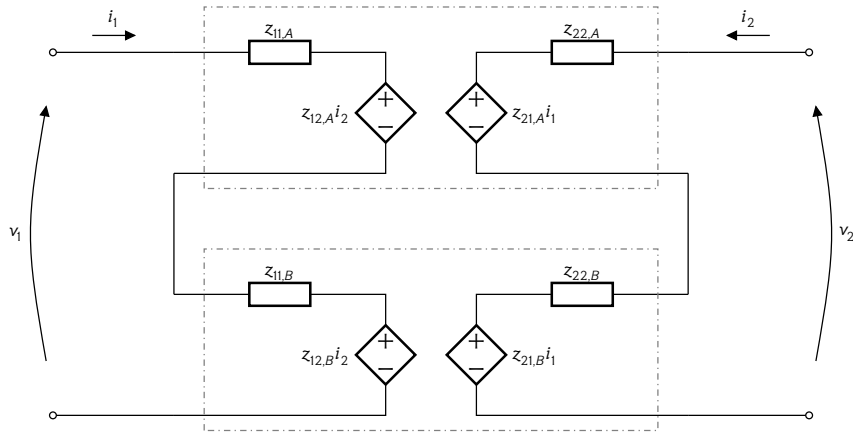
$$z_{21} = \left. \frac{v_2}{i_1} \right|_{i_2=0}$$

De meetopstelling die we hiervoor moeten bouwen is:



Het z-parameter model wordt ook kort samengevat in Figuur 6.15 op pagina 110.

**Parallelschakeling** Het z-parametermodel is handig indien we twee of meerdere tweepoorten parallel schakelen waarbij zowel de ingangen als de uitgangen in serie staan, zoals hieronder in Figuur 6.13.



Figuur 6.13: Serie-serie parallelschakeling van twee z-parameter modellen

We kunnen dan gemakkelijk aantonen dat als de aparte netwerken kunnen beschreven worden met de gepaste z-parameters

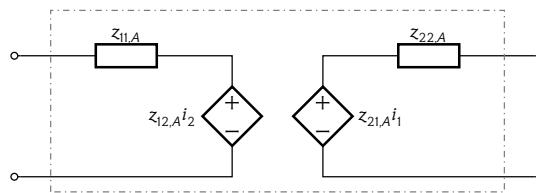
$$Z_A = \begin{bmatrix} z_{11,A} & z_{12,A} \\ z_{21,A} & z_{22,A} \end{bmatrix} \quad Z_B = \begin{bmatrix} z_{11,B} & z_{12,B} \\ z_{21,B} & z_{22,B} \end{bmatrix}$$

het geheel kan vervangen worden door een tweepoort met z-parametermatrix  $Z_C$ , waarbij:

$$Z_C = Z_A + Z_B = \begin{bmatrix} z_{11,A} + z_{11,B} & z_{12,A} + z_{12,B} \\ z_{21,A} + z_{21,B} & z_{22,A} + z_{22,B} \end{bmatrix}$$

### Oefeningen

**Oefening 6.5.3-1:** Beschouw onderstaand Z-parameter tweepoortmodel dat belast wordt met een belastingsimpedantie  $Z_L$ .



Bereken:

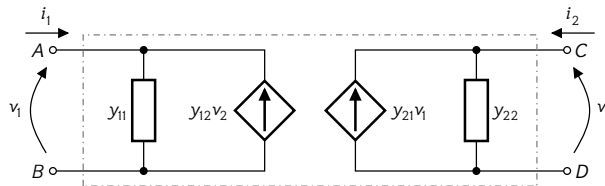
1. de ingangsimpedantie aan ingangspoort
2. de spanningsversterking van ingangspoort naar uitgangspoort

## 6.5.4 y-parameters

**Definitie** Bij de beschrijving van het tweepoortnetwerk in termen van y-parameters, kiezen we de poortspanningen  $v_1$  en  $v_2$  als onafhankelijke variabelen en de poortstromen  $i_1$  en  $i_2$  als afhankelijke variabelen, m.a.w.:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

wat overeenkomt met het volgende equivalente netwerk:



Merk op dat:

- het symbool dat voor de (auto-)admittanties in het netwerk gebruikt wordt hetzelfde is als dat voor een impedantie, maar dat de takrelatie in dit geval wel degelijk is:  $i = y v$ .
- de parameters  $y_{ij}$  inderdaad (trans)admittanties zijn. Net zoals een (trans)admittantie zetten ze een spanning om in een stroom.
- de opbouw van het netwerk logisch is, aangezien de eerste vergelijking

$$i_1 = y_{11}v_1 + y_{12}v_2$$

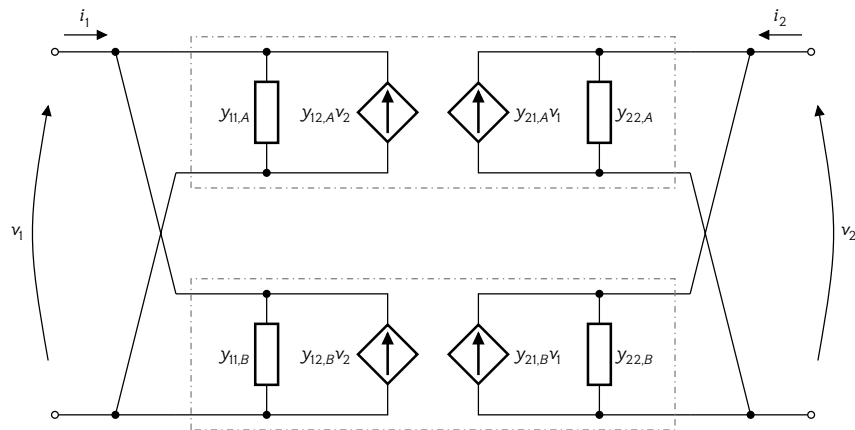
de stroom in de ingangspoort schrijft als een som van twee stromen, wat duidt op een parallelschakeling van een admittantie  $y_{11}$  en een transadmittantie  $y_{12}$ .

Eenzelfde redenering kan opgebouwd worden voor de uitgang.

We noemen  $y_{11}$  de ingangsadmittantie van de schakeling en  $y_{22}$  de uitgangsadmittantie. We noemen  $y_{21}$  de voorwaartse transadmittantie en  $y_{12}$  de achterwaartse transadmittantie.

**Meting - berekening** Het y-parameter model wordt kort samengevat in Figuur 6.16. Maak zelf de nodige afleidingen om het geheel te begrijpen!

**Parallelschakeling** Het y-parametermodel is handig indien we twee of meerdere tweepoorten parallel schakelen waarbij zowel de ingangen als de uitgangen in parallel staan, zoals hieronder in Figuur 6.14.



Figuur 6.14: Parallel-parallel parallelschakeling van twee y-parameter modellen

We kunnen dan gemakkelijk aantonen dat als de aparte netwerken kunnen beschreven worden met de gepaste y-parameters

$$Y_A = \begin{bmatrix} Y_{11,A} & Y_{12,A} \\ Y_{21,A} & Y_{22,A} \end{bmatrix} \quad Y_B = \begin{bmatrix} Y_{11,B} & Y_{12,B} \\ Y_{21,B} & Y_{22,B} \end{bmatrix}$$

het geheel kan vervangen worden door een tweepoort met y-parametermatrix  $Y_C$ , waarbij:

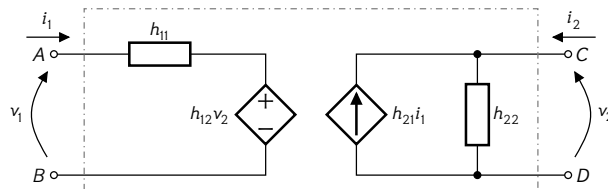
$$Y_C = Y_A + Y_B = \begin{bmatrix} Y_{11,A} + Y_{11,B} & Y_{12,A} + Y_{12,B} \\ Y_{21,A} + Y_{21,B} & Y_{22,A} + Y_{22,B} \end{bmatrix}$$

### 6.5.5 h-parameters

**Definitie** Bij de beschrijving van het tweepoortnetwerk in termen van h-parameters, kiezen we de  $i_1$  en  $v_2$  als onafhankelijke variabelen en  $v_1$  en  $i_2$  als afhankelijke variabelen. Omdat we zowel voor afhankelijke als onafhankelijke parameters een mix van spanning en stroom maken, noemen we dit de hybride parameters. Samengevat:

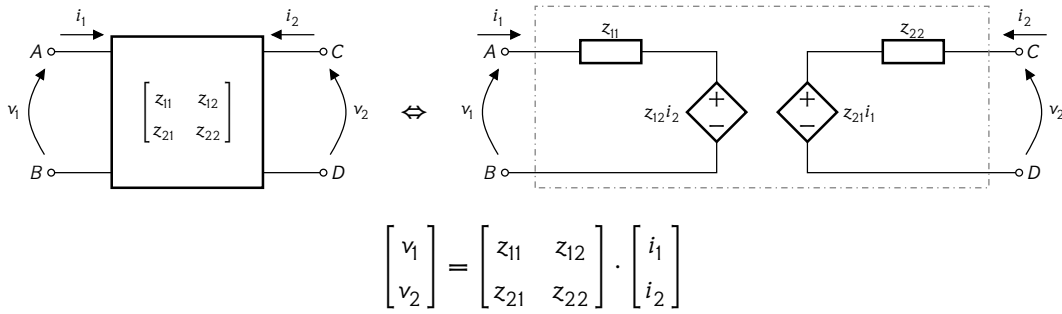
$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

wat overeenkomt met het volgende equivalente netwerk:

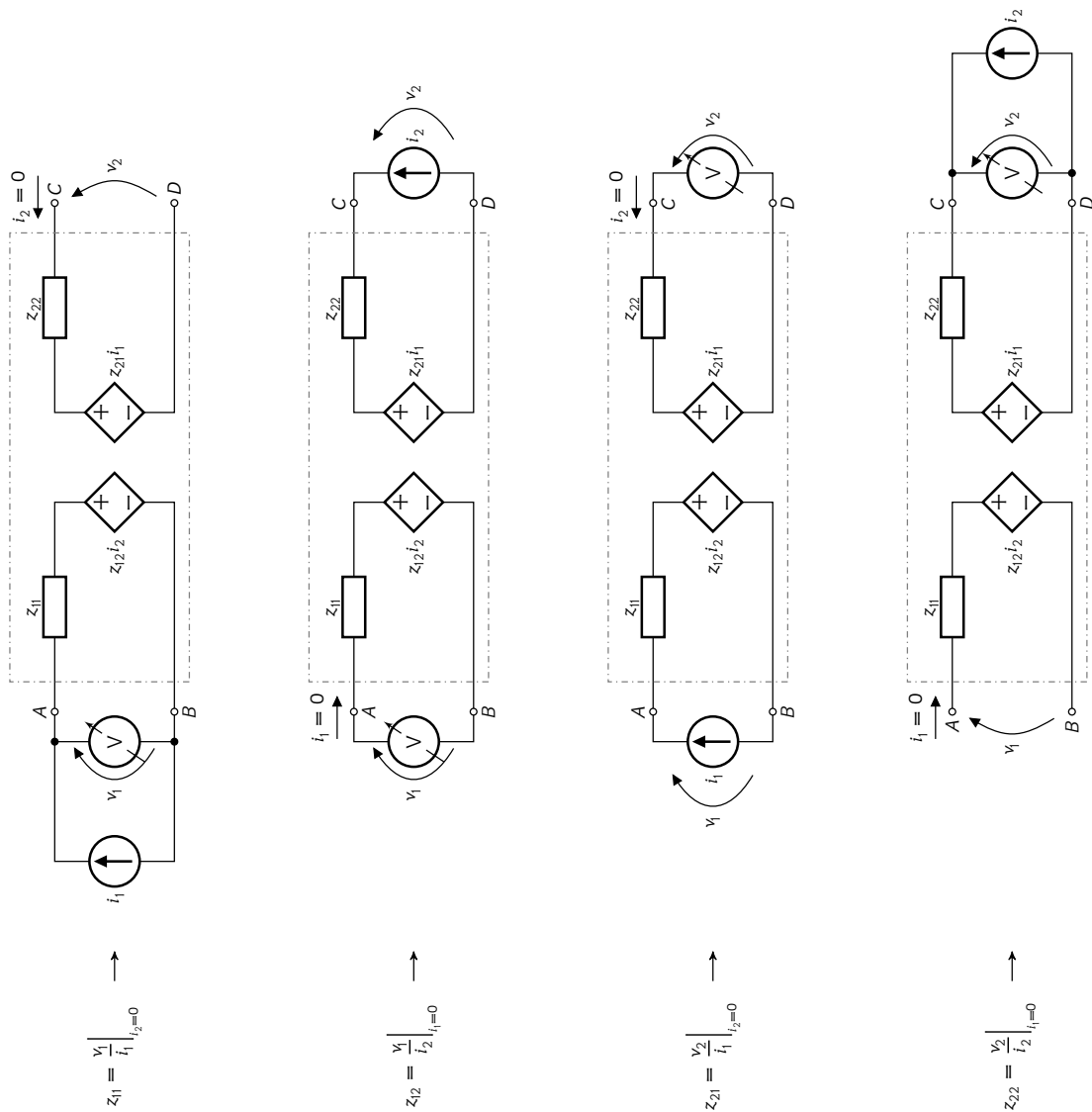


Merk op dat:

- $h_{11}$  een impedantie is,  $h_{22}$  een admittantie,  $h_{21}$  een stroomtransferverhouding en  $h_{12}$  een spanningtransferverhouding.
- het symbool dat voor de admittantie in het netwerk gebruikt wordt hetzelfde is als dat voor een impedantie, maar dat de takrelatie in dit geval wel degelijk is:  $v = h_{11}i_1$  en  $i = h_{22}v_2$ .

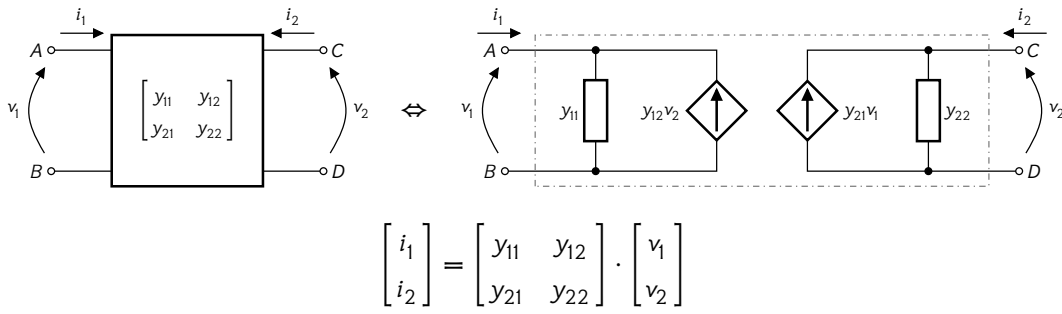


(a) Equivalent circuit and model equations

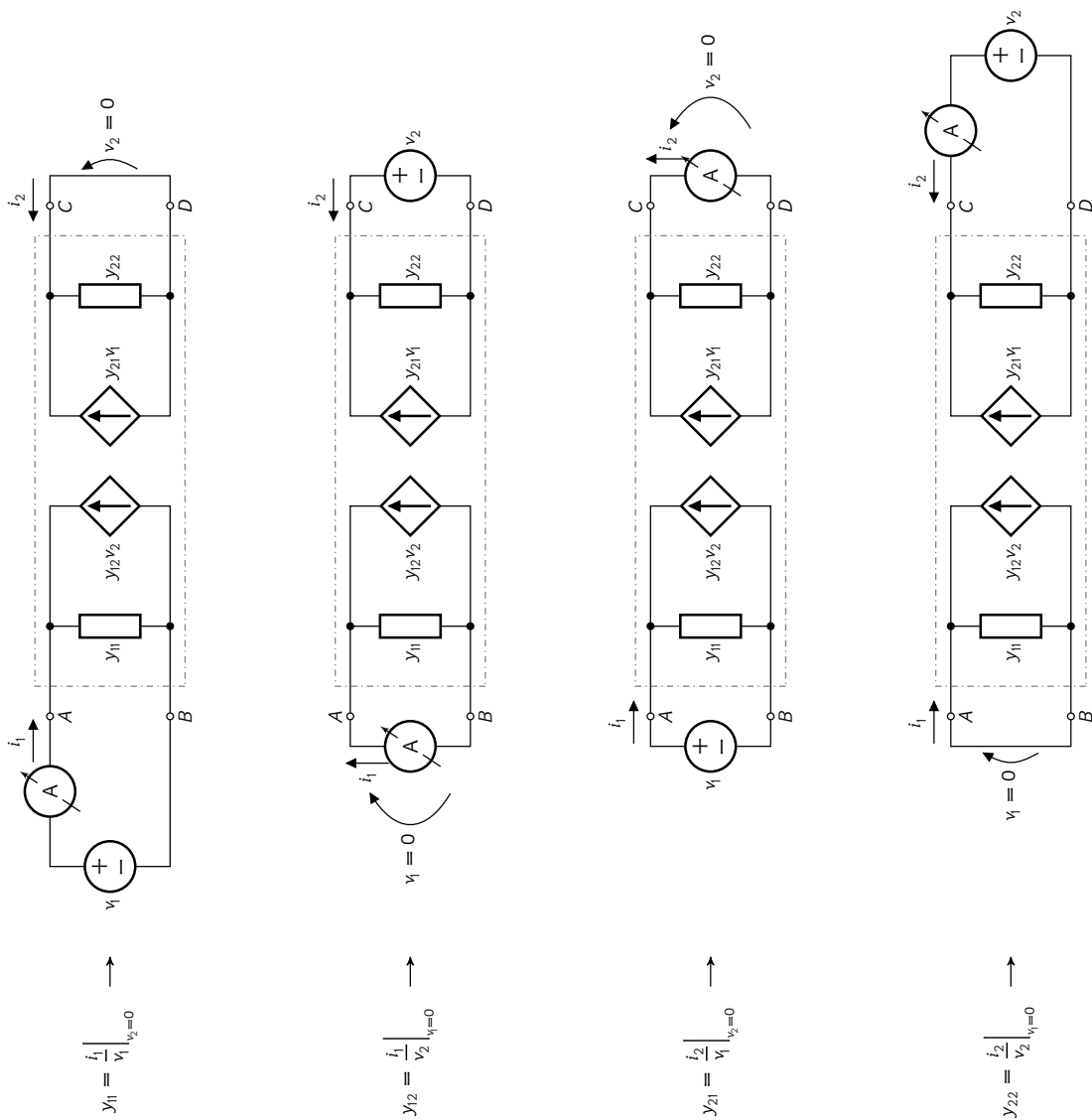


(b) Parameter determination

Figuur 6.15: Z-parameter model



(a) Equivalent circuit and model equations



(b) Parameter determination

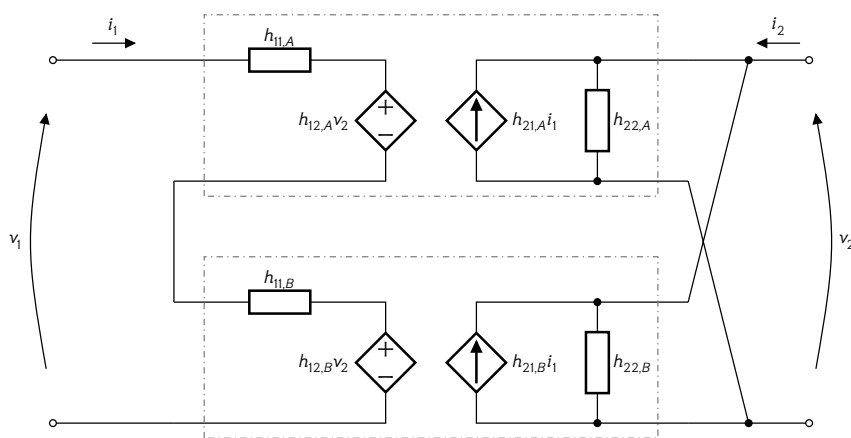
Figuur 6.16: Y-parameter model

- de opbouw van het netwerk logisch is, aangezien de eerste vergelijking een som van spanningen weergeeft (wat wijst op een serieschakeling) en de tweede vergelijking een som van stromen weergeeft (wat wijst op een parallelschakeling).

We noemen  $h_{11}$  de ingangsimpedantie van de schakeling en  $h_{22}$  de uitgangsadmittantie. We noemen  $h_{21}$  de voorwaartse stroomtransferverhouding en  $h_{12}$  de achterwaartse spanningtransferverhouding.

**Meting - berekening** Het h-parameter model wordt kort samengevat in Figuur 6.18. Maak zelf de nodige afleidingen om het geheel te begrijpen!

**Parallelschakeling** Het hybride parametermodel is handig indien we twee of meerdere tweepoorten parallel schakelen waarbij de ingangen in serie staan en de uitgangen in parallel, zoals hieronder in Figuur 6.17.



Figuur 6.17: Serie-parallel parallelschakeling van twee h-parameter modellen

We kunnen dan gemakkelijk aantonen dat als de aparte netwerken kunnen beschreven worden met de gepaste h-parameters

$$H_A = \begin{bmatrix} h_{11,A} & h_{12,A} \\ h_{21,A} & h_{22,A} \end{bmatrix} \quad H_B = \begin{bmatrix} h_{11,B} & h_{12,B} \\ h_{21,B} & h_{22,B} \end{bmatrix}$$

het geheel kan vervangen worden door een tweepoort met h-parametermatrix  $H_C$ , waarbij:

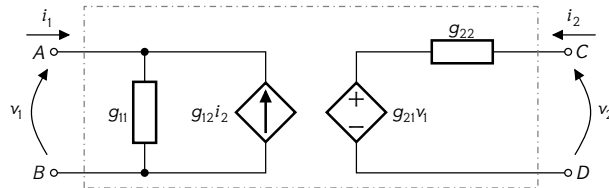
$$H_C = H_A + H_B = \begin{bmatrix} h_{11,A} + h_{11,B} & h_{12,A} + h_{12,B} \\ h_{21,A} + h_{21,B} & h_{22,A} + h_{22,B} \end{bmatrix}$$

### 6.5.6 g-parameters

**Definitie** Bij de beschrijving van het tweepoortnetwerk in termen van g-parameters, kiezen we de  $v_1$  en  $i_2$  als onafhankelijke variabelen en  $i_1$  en  $v_2$  als afhankelijke variabelen. Omdat we zowel voor afhankelijke als onafhankelijke parameters een mix van spanning en stroom maken en net de omgekeerde keuze maken als voor de hybride parameters, noemen we dit de inverse hybride parameters. Samengevat:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

wat overeenkomt met het volgende equivalente netwerk:



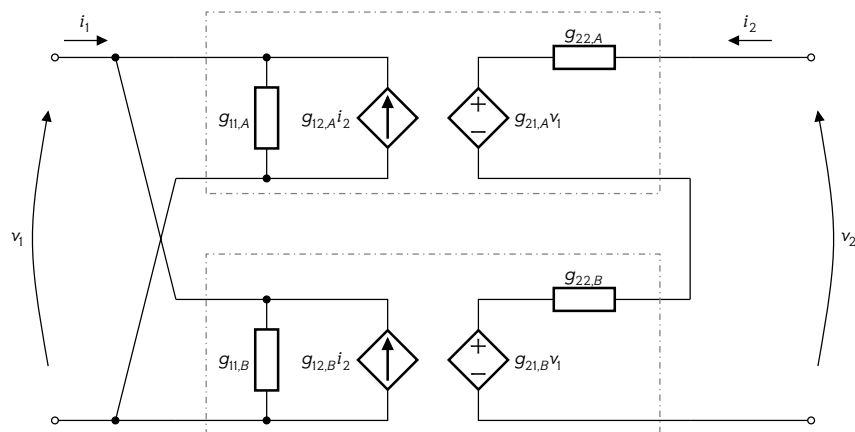
Merk op dat:

- $g_{11}$  een admittantie is,  $g_{22}$  een impedantie,  $g_{21}$  een spanningstransferverhouding en  $g_{12}$  een stroomtransferverhouding.
- het symbool dat voor de admittantie in het netwerk gebruikt wordt hetzelfde is als dat voor een impedantie, maar dat de takrelatie in dit geval wel degelijk is:  $v = g_{11}i_1$  en  $i = g_{22}v_2$ .
- de opbouw van het netwerk logisch is, aangezien de eerste vergelijking een som van stromen weergeeft (wat wijst op een parallelschakeling) en de tweede vergelijking een som van spanningen weergeeft (wat wijst op een serieschakeling).

We noemen  $g_{11}$  de ingangsadmittantie van de schakeling en  $g_{22}$  de uitgangsimpedantie. We noemen  $g_{21}$  de voorwaartse spanningstransferverhouding en  $g_{12}$  de achterwaartse stroomtransferverhouding.

**Meting - berekening** Het g-parameter model wordt kort samengevat in Figuur 6.19. Maak zelf de nodige afleidingen om het geheel te begrijpen!

**Parallelschakeling** Het inverse hybride parametermodel is handig indien we twee of meerdere tweepoorten parallel schakelen waarbij de ingangen in parallel staan en de uitgangen in serie, zoals hieronder in Figuur 6.20.



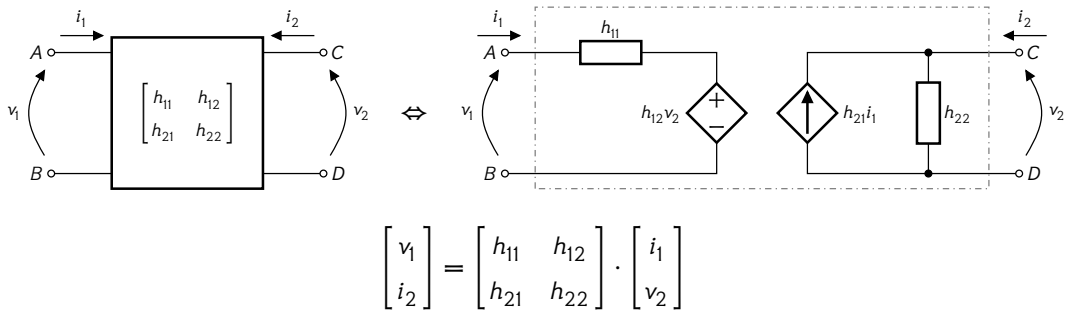
Figuur 6.20: Parallel-serie parallelschakeling van twee g-parameter modellen

We kunnen dan gemakkelijk aantonen dat als de aparte netwerken kunnen beschreven worden met de gepaste g-parameters

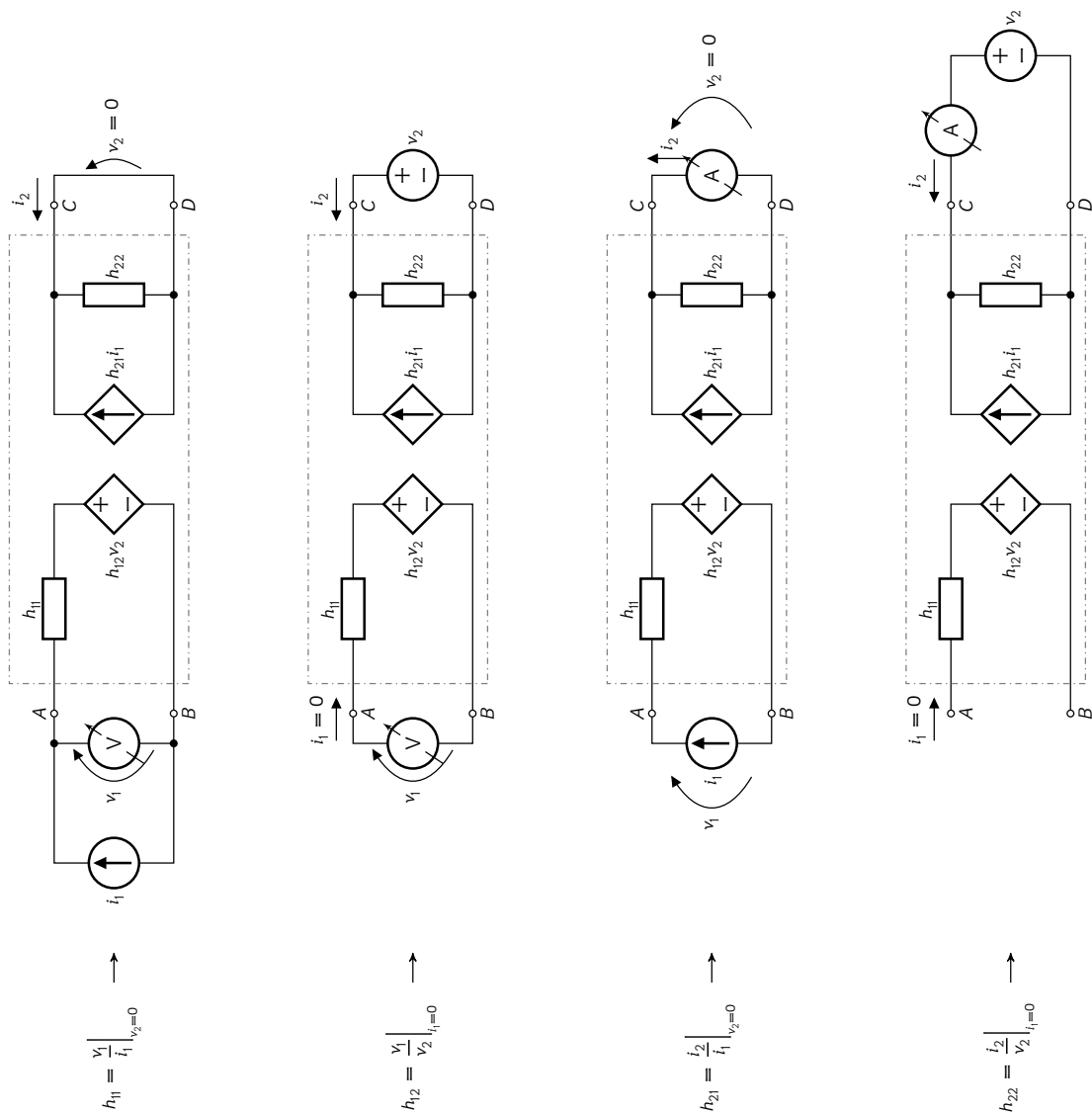
$$G_A = \begin{bmatrix} g_{11,A} & g_{12,A} \\ g_{21,A} & g_{22,A} \end{bmatrix} \quad G_B = \begin{bmatrix} g_{11,B} & g_{12,B} \\ g_{21,B} & g_{22,B} \end{bmatrix}$$

het geheel kan vervangen worden door een tweepoort met g-parametermatrix  $G_C$ , waarbij:

$$G_C = G_A + G_B = \begin{bmatrix} g_{11,A} + g_{11,B} & g_{12,A} + g_{12,B} \\ g_{21,A} + g_{21,B} & g_{22,A} + g_{22,B} \end{bmatrix}$$

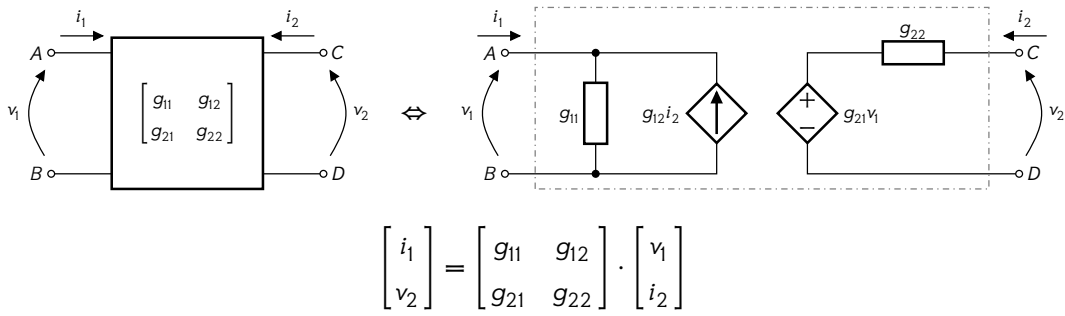


(a) Equivalent circuit and model equations

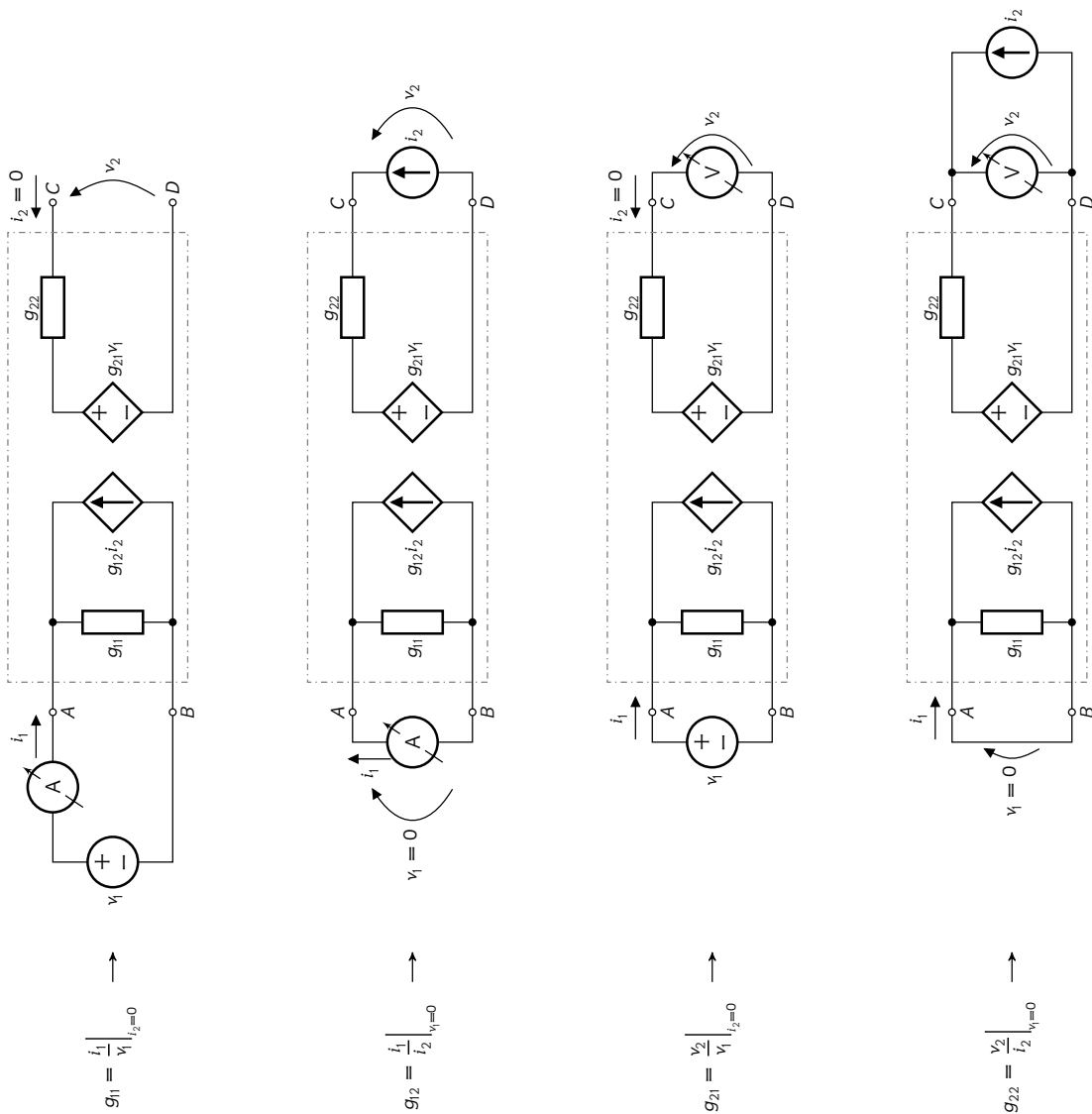


(b) Parameter determination

Figuur 6.18: H-parameter model



(a) Equivalent circuit and model equations



(b) Parameter determination

Figuur 6.19: G-parameter model

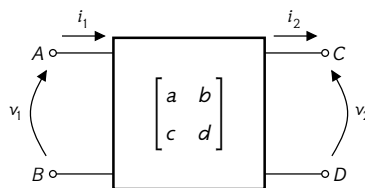
### 6.5.7 abcd-parameters

Het transmissieparametermodel (met abcd-parameters) is spijtig genoeg niet elegant te beschrijven als een equivalent netwerkmodel met slechts enkele netwerkelementen. Het vindt zijn kracht echter in het feit dat de twee poorten van elkaar gescheiden blijven waardoor het heel gemakkelijk wordt om berekeningen uit te voeren waarbij de lineaire netwerken in cascade (d.w.z. in een ketting achtereen) worden geschakeld.

**Definitie** We kiezen  $v_2$  en  $i_2$  als onafhankelijke variabelen,  $v_1$  en  $i_1$  als afhankelijke variabelen en schrijven:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_2 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

waarbij de stromen en spanningen als volgt gedefinieerd zijn:

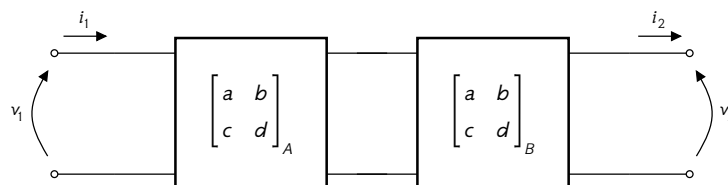


Merk op dat in dit model de uitgangsstroom een omgekeerde zin heeft als in de andere modellen; dit maakt het heel gemakkelijk om een cascade van netwerken uit te rekenen als een product van abcd-parametermatrices.

Omwille van de ietwat vreemde meetsetup die nodig is om de parameters  $a$ ,  $b$ ,  $c$  en  $d$  te bepalen noemen we  $a$  de inverse spanningstransferverhouding,  $b$  de inverse transadmittantie,  $c$  de inverse transimpedantie en  $d$  de inverse stroomstransferverhouding.<sup>6</sup>

**Meting - berekening** Het abcd-parameter model wordt kort samengevat in Figuur 6.22. Maak zelf de nodige afleidingen om het geheel te begrijpen! Merk op dat de testsetups die nodig zijn om de parameters te bepalen heel wat meer denkwerk vragen dan die voor de vorige modellen!

**Cascadeschakeling** Het transmissieparametermodel is handig indien we twee of meerdere tweepoorten in cascade schakelen, zoals hieronder in Figuur 6.21.



Figuur 6.21: Cascadeschakeling van twee (transmissie) abcd-parameter modellen

We kunnen dan gemakkelijk aantonen dat als de aparte netwerken kunnen beschreven worden met de gepaste abcd-parameters

$$T_A = \begin{bmatrix} a_A & b_A \\ c_A & d_A \end{bmatrix} \qquad T_B = \begin{bmatrix} a_B & b_B \\ c_B & d_B \end{bmatrix}$$

<sup>6</sup>Merk op dat 'invers' in dit kader betekent dat  $1/a$  de spanningstransferverhouding is,  $1/b$  de transadmittantie, enz.

het geheel kan vervangen worden door een transmissieparametermodel met abcd-parametermatrix  $T_C$ , waarbij:

$$T_C = T_A \cdot T_B = \begin{bmatrix} a_A & b_A \\ c_A & d_A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_B & b_B \\ c_B & d_B \end{bmatrix}$$

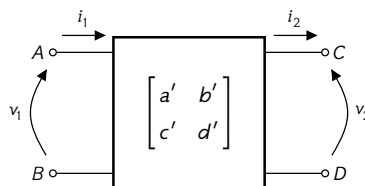
### 6.5.8 a'b'c'd'-parameters

Het inverse transmissieparametermodel (met a'b'c'd'-parameters) is niet zo courant gebruikt en kan spijtig genoeg ook niet elegant beschreven worden als een equivalent netwerkmodel met slechts enkele netwerkelementen. Het vindt zijn kracht echter in het feit dat de twee poorten van elkaar gescheiden blijven waardoor het heel gemakkelijk wordt om berekeningen uit te voeren waarbij de lineaire netwerken in cascade (d.w.z. in een ketting achtereen) worden geschakeld.

**Definitie** We kiezen ditmaal  $v_1$  en  $i_1$  als onafhankelijke variabelen,  $v_2$  en  $i_2$  als afhankelijke variabelen en schrijven:

$$\begin{bmatrix} v_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix}$$

waarbij de stromen en spanningen als volgt gedefinieerd zijn:



Merk op dat ook in dit model de uitgangsstroom een omgekeerde zin heeft als in de andere modellen; dit maakt het heel gemakkelijk om een cascade van netwerken uit te rekenen als een product van a'b'c'd'-parametermatrices.

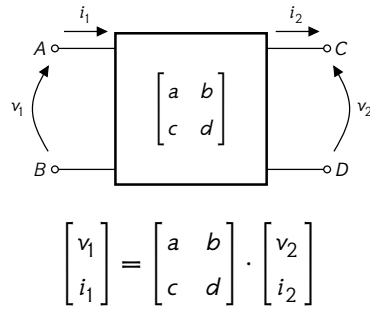
Merk ook op dat de inverse transmissieparametermatrix de inverse is van de transmissieparametermatrix:

$$\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}$$

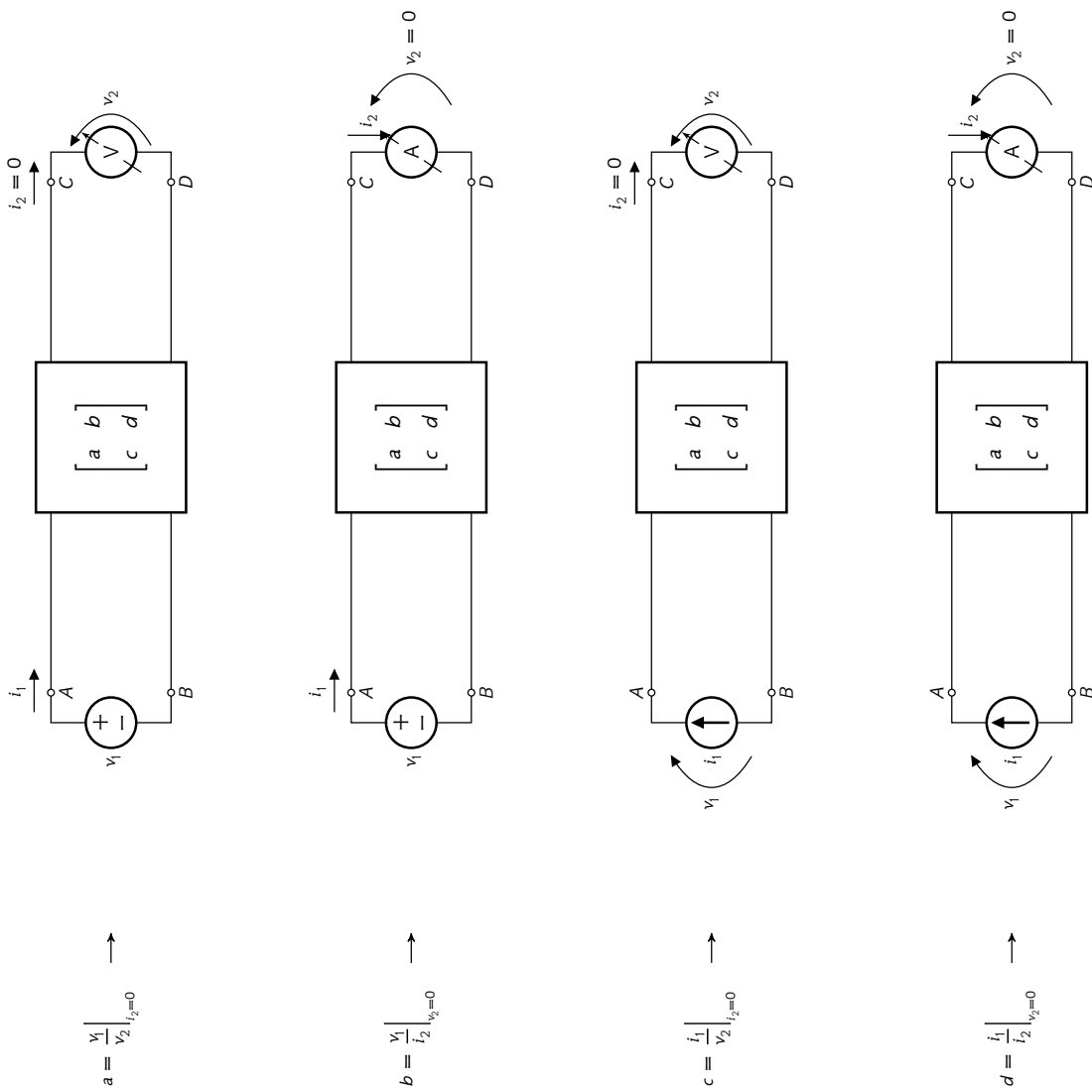
Omwillen van de ietwat vreemde meetsetup die nodig is om de parameters  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  en  $d'$  te bepalen noemen we  $a'$  de inverse achterwaartse spanningstransferverhouding,  $b'$  de inverse achterwaartse transadmittantie,  $1/c'$  de inverse achterwaartse transimpedantie en  $1/d'$  de inverse achterwaartse stroomtransferverhouding.<sup>7</sup> Verlies je tijd niet met het van buiten leren van deze parameterbenamingen. Dat is niet de essentie van de tweepoorttheorie. Weten hoe je ze moet berekenen en wat je ermee kan doen is veel belangrijker!

**Meting - berekening** Het a'b'c'd'-parameter model wordt kort samengevat in Figuur 6.23. Maak zelf de nodige afleidingen om het geheel te begrijpen!

<sup>7</sup>Opnieuw: merk op dat invers slaat op het  $1/x$  karakter en achterwaarts slaat op 'van uitgang naar ingang'.

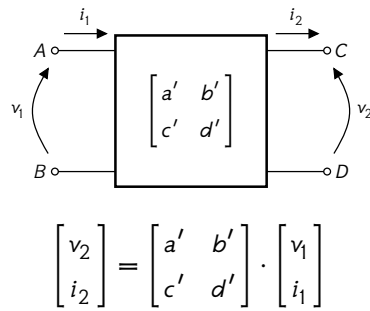


(a) Model equations

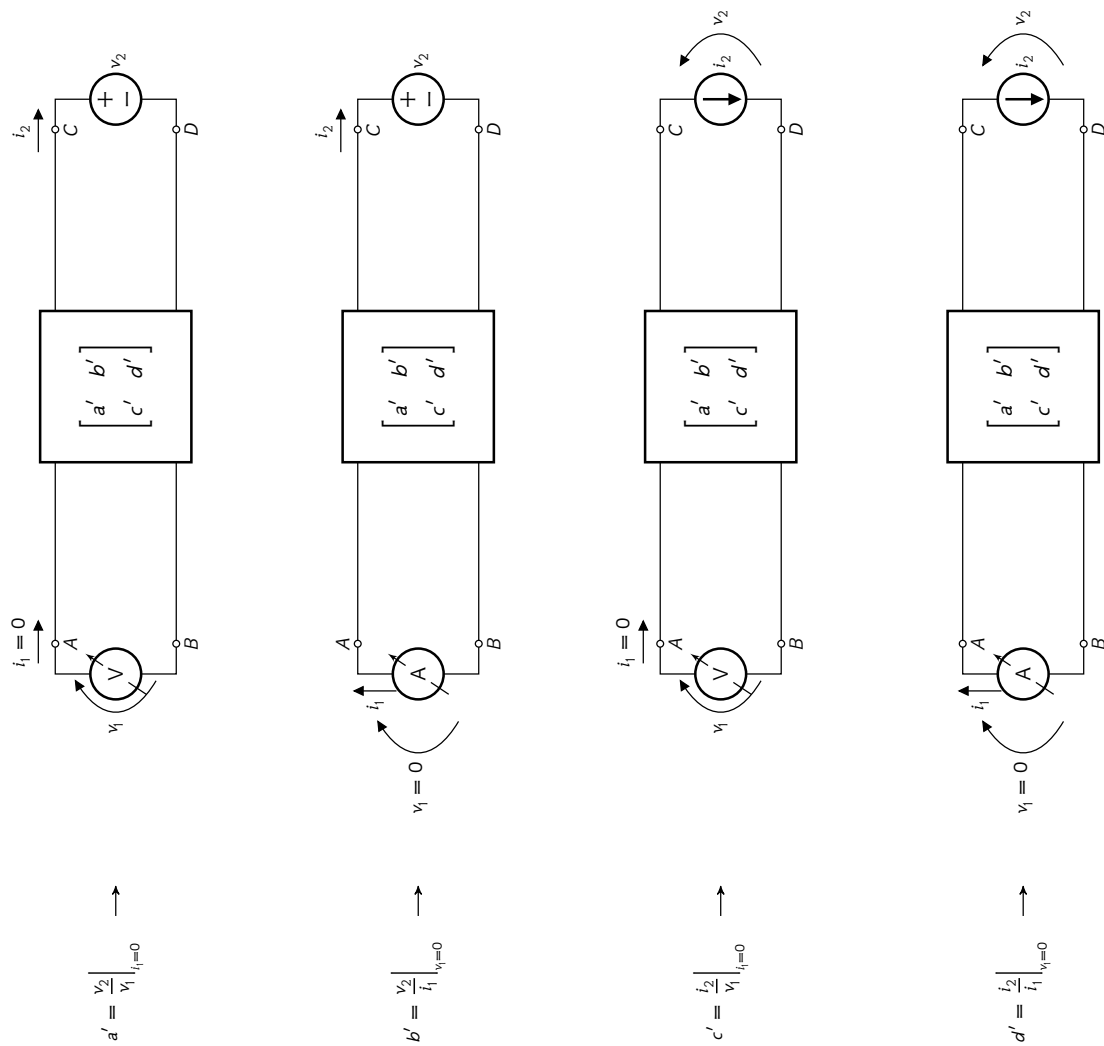


(b) Parameter determination

Figuur 6.22: abcd-parameter model



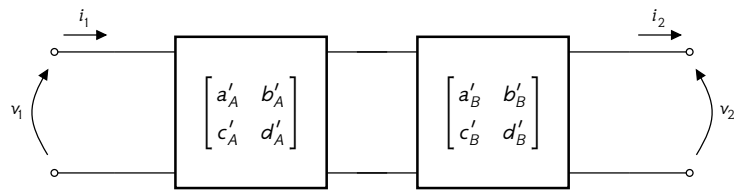
(a) Model equations



(b) Parameter determination

Figuur 6.23: inverse abcd parameter model

**Cascadeschakeling** Het inverse transmissieparametermodel is handig indien we twee of meerdere tweepoorten in cascade schakelen, zoals hieronder in Figuur 6.24.



Figuur 6.24: Cascadeschakeling van twee (inverse transmissie) a'b'c'd'-parameter modellen

We kunnen dan gemakkelijk aantonen dat als de aparte netwerken kunnen beschreven worden met de gepaste a'b'c'd'-parameters

$$T_A^{-1} = \begin{bmatrix} a'_A & b'_A \\ c'_A & d'_A \end{bmatrix} \qquad T_B^{-1} = \begin{bmatrix} a'_B & b'_B \\ c'_B & d'_B \end{bmatrix}$$

het geheel kan vervangen worden door een invers transmissieparametermodel met a'b'c'd'-parametermatrix  $T_C^{-1}$ , waarbij:

$$T_C^{-1} = T_B^{-1} \cdot T_A^{-1} = \begin{bmatrix} a'_B & b'_B \\ c'_B & d'_B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a'_A & b'_A \\ c'_A & d'_A \end{bmatrix}$$

Merk op hoe de matrices in omgekeerde volgorde ('invers') voorkomen. Op basis van dit feit werd het abcd-model het transmissiemodel genoemd en het a'b'c'd'-model het inverse transmissiemodel.

## Basisnetwerken, versterkers en comparatoren

---

### Overzicht

7.1	Passieve netwerken . . . . .	122
7.1.1	Potentiometrische delers . . . . .	122
7.1.2	Sommator . . . . .	126
7.1.3	Gelijkrichters . . . . .	129
7.1.4	Spanningsvermenigvuldigers . . . . .	130
7.2	Actieve netwerken . . . . .	138
7.2.1	Versterkers . . . . .	138
7.2.2	Omzetters . . . . .	144
7.2.3	Somversterkers . . . . .	145
7.2.4	Verschilversterkers . . . . .	147
7.2.5	Comparatoren . . . . .	149
7.2.6	Integrator en differentiator . . . . .	153
7.3	Besluit . . . . .	156

In dit hoofdstuk bestuderen we het gedrag van basisnetwerken met ideale netwerkelementen. Het feit dat we geen rekening moeten houden met de niet-idealiteiten van reële componenten, laat ons toe de analyse eenvoudig te houden en zo tot de essentie van hun werking door te dringen.

Een goed begrip van de ideale werking van deze netwerken is het fundament om later een goed begrip te krijgen van reële schakelingen, waarbij we dan heel duidelijk kunnen zien welke invloed de niet-idealiteiten hebben op het gedrag. Het geeft ons ook een 'baseline', d.w.z. een idee van wat we maximaal uit een reële schakeling kunnen halen.

In dit hoofdstuk concentreren we ons op netwerken waarvan de werking van nature uit in het tijddomein wordt beschreven.

Het feit dat we alle niet-idealiteiten weglaten, zorgt er ook voor dat weinig van de netwerken die we in dit hoofdstuk behandelen zullen werken zoals hier beschreven. In sommige gevallen zullen de overeenkomstige schakelingen zonder de nodige aanpassingen zelfs helemaal niet werken! Enige bescheidenheid na het afronden van dit hoofdstuk is dus aan de orde.

We onderscheiden passieve netwerken en actieve netwerken. In de eerste categorie voegen we enkel energie toe aan het netwerk via de ingangssignalen. In de tweede categorie gebruiken we actieve elementen in de schakeling die extra energie in het netwerk kunnen brengen (vanuit de voedingsspanning).

Wat minder inzichtelijk geformuleerd: passieve netwerken gebruiken enkel passieve elementen, en actieve netwerken gebruiken naast passieve ook actieve elementen.

Deze rigoureuze indeling is echter niet zo lang vol te houden. Vele elektronische bouwblokken kunnen immers zowel passief als actief ontworpen worden.

## 7.1 Passieve netwerken

We bekijken achtereenvolgens:

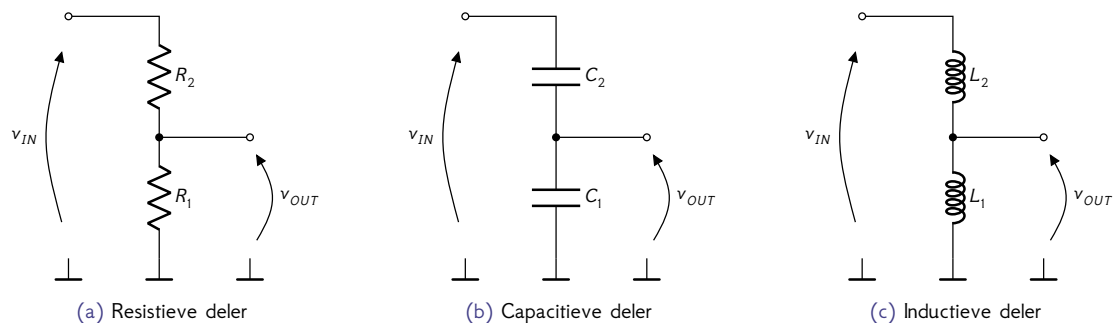
- delers: om een spanning te verlagen
- sommatoren: om twee of meerdere spanningen (gewogen) bij elkaar op te tellen
- gelijkrichters: om een wisselspanning om te vormen tot een (fluctuerende) gelijkspanning
- vermenigvuldigers: om een spanning te verhogen

### 7.1.1 Potentiometrische delers

Potentiometrische delers hebben als doel een potentiaal te verlagen wat meteen de naam verklaart. We kunnen drie types potentiometrische delers maken:

- een resistieve deler
- een capacitieve deler
- een inductieve deler

Deze delers worden hieronder weergegeven in Figuur 7.1.



Figuur 7.1: Potentiometrische delers

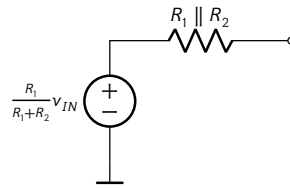
#### 7.1.1.1 Resistieve deler

**Werking** De lezer kan zelf de verworven kennis uit Hoofdstuk 5 toepassen om het verband te zoeken tussen ingangsspanning en uitgangsspanning voor Figuur 7.1a. Het resultaat is

$$v_{OUT} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_{IN} \quad (7.1)$$

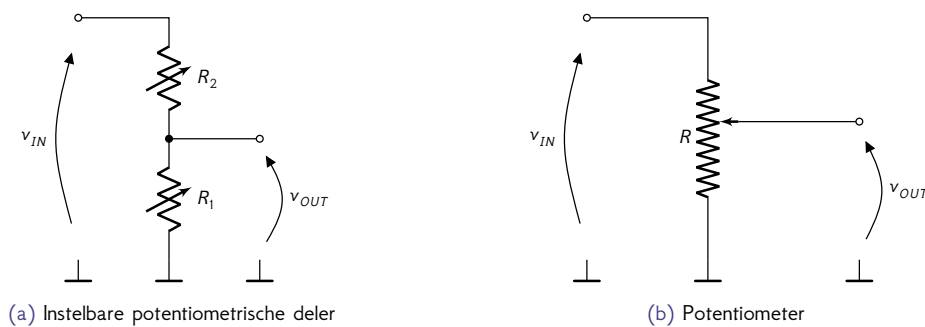
Merk wel op dat deze schakeling een niet te verwaarlozen uitgangsimpedantie heeft. Indien we veronderstellen

dat de bron  $v_{IN}$  ideaal is (inwendige weerstand gelijk aan nul), dan kunnen we de potentiometrische deler voorstellen m.b.v. zijn Thévenin-equivalent:



Het belang hiervan is dat indien we de schakeling belasten (d.w.z. stroom uit de uitgang trekken), dat de afgeleverde spanning zal dalen. We kunnen dit enkel tegengaan door de stroom door die uitgangsimpedantie beperkt te houden, zodat de spanningsval verwaarloosbaar is t.o.v. de originele spanning. Dit kan bijvoorbeeld door een buffer (die we zullen leren kennen bij de actieve netwerken) tussen de deler en de last te plaatsen.

**Potentiometer** Merk ook op dat we deze deler instelbaar kunnen maken door één van de weerstanden (of beide) variabel te maken,<sup>1</sup> of door de uitgang te voorzien als verplaatsbaar aftakpunt op een vaste weerstand (zie Figuur 7.2). Deze laatste noemen we kort een potentiometer.



Figuur 7.2: Instelbare weerstandsdelers

**Dropper** Tot slot hoeft het niet zo te zijn dat we iets aftakken van de potentiometrische deler (in Figuur 7.1a). Het is perfect mogelijk dat  $R_1$  de belasting is die we willen aansturen. In dat geval kunnen we de rol van  $R_2$  op twee manieren beschrijven/begrijpen:

- $R_2$  verlaagt de spanning van de bron tot een gepast spanningsniveau voor de belasting  $R_1$ ,
- $R_2$  verhoogt de totale impedantie die de bron ziet, zodat de stroom door  $R_1$  tot een aanvaardbaar niveau wordt teruggebracht.

Deze schakeling van  $R_2$  die de spanning over en stroom door de belasting beperkt, is een eerste primitieve vorm van voedingsspanningsregeling. We noemen het een resistive dropper.<sup>2</sup>

### 7.1.1.2 Capacitieve deler

Het nadeel van de potentiometrische deler is dat hij elektrische energie dissipeert als warmte in de weerstanden van de deler. Dit kunnen we oplossen door met condensatoren te werken. Die zullen tijdelijk energie opslaan

<sup>1</sup>Welke beperking ontstaan er door enkel  $R_2$  instelbaar te maken, of enkel  $R_1$  instelbaar te maken? Welk gevaar schuilt er in het instelbaar maken van beide weerstanden?

<sup>2</sup>Er is geen courante Nederlandse vertaling van dit begrip.

om die later terug vrij te geven.

**Werking** We weten dat de spanning op de condensatoren (zie Figuur 7.1b) gelijk moet zijn aan:

$$v_1 = \frac{q_1}{C_1} \qquad v_2 = \frac{q_2}{C_2}$$

met  $q_1$  en  $q_2$  de ladingen op de condensatoren.

Vermits de lading die op beide condensatoren staat gelijk moet zijn, weten we ook dat  $q_1 = q_2 = q$ , wat toelaat om de volgende redenering te maken:

$$v_{IN} = v_1 + v_2 = \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} = q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$$

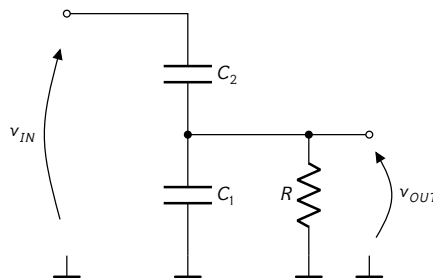
$$q = \frac{v_{IN}}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

En vervolgens:

$$v_{OUT} = v_1 = \frac{q}{C_1} = \frac{1}{C_1} \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} v_{IN} = \frac{C_2}{C_1 + C_2} v_{IN}$$

In tegenstelling tot de resistieve potentiometrische deler, is de capacitieve potentiometrische deler weinig geschikt om in combinatie met DC-spanningen te gebruiken. Elke resistieve belasting gaat er immers voor zorgen dat de uitgangsspanning  $v_{OUT}$  naar 0V gaat. De capacitieve deler is wel interessant indien de voeding een wisselspanningsbron is. De schakeling wordt dan ook bruikbaar om een wisselspanning te verlagen, zonder energieverlies.

De analyse in het frequentiedomein is eenvoudig. Laten we de schakeling met een belastingsweerstand  $R$  beschouwen:



Neem vergelijking (7.1) (die hoort bij een netwerk met dezelfde topologie) en vervang de weerstandswaarden door de complexe impedanties van dit schema:

$$R_2 \rightarrow \frac{1}{sC_2} \qquad R_1 \rightarrow R \parallel \frac{1}{sC_1}$$

Dit levert:

$$v_{OUT} = \frac{\frac{1}{\frac{1}{R} + sC_1}}{\frac{1}{\frac{1}{R} + sC_1} + \frac{1}{sC_2}} v_{IN}$$

$$= \frac{\frac{1}{1 + sRC_1}}{\frac{1}{1 + sRC_1} + \frac{1}{sRC_2}} v_{IN}$$

$$= \frac{sRC_2}{1 + sR(C_1 + C_2)} v_{IN}$$

Deze vergelijking kan onder twee extreme omstandigheden vereenvoudigd worden tot:

$$v_{OUT} = \frac{C_2}{C_1 + C_2} v_{IN} \quad \text{als } \omega R(C_1 + C_2) \gg 1$$

$$v_{OUT} = sRC_2 v_{IN} \quad \text{als } \omega R(C_1 + C_2) \ll 1$$

**Dropper** In het laatste geval hierboven beschreven is de capaciteitswaarde van  $C_1$  nog weinig relevant (de capaciteit zou zelfs kunnen worden weggelaten) en benoemen we  $C_2$  als een capacitive dropper.

**Waarschuwing** Moest je de drang voelen om met dit principe in het labo aan de slag te gaan om de netspanning van 230 V om te zetten in een lagere, veilige spanning, dan moet ik je met aandrang vragen dat niet te doen. Hoewel energetisch heel efficiënt is het een misvatting dat een schakeling met een capacitive dropper een hoge spanning omzet in een veilige spanning. Het spanningsverschil is laag, maar de potentialen aanwezig op de uitgangsklemmen blijven levensgevaarlijk. Het meten van een schakeling waarvan delen op netspanningspotentiaal staan is ook heel moeilijk (en vraagt een isolatietransformator). Je wacht dus beter tot het ogenblik waarop we meer leren over het veilig genereren van een voedingsspanning, en beter nog: tot je nog wat meer jaren op je elektronica-kilometerteller hebt.

### 7.1.1.3 Inductieve deler

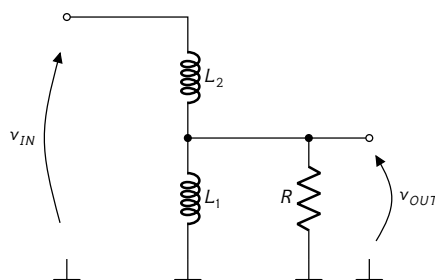
Wat we met condensatoren kunnen, moet ook lukken met spoelen.

**Werking** We bepalen de relatie tussen ingangs- en uitgangsspanning in Figuur 7.1c ineens in het frequentiedomein:

$$v_{OUT} = \frac{sL_1}{sL_1 + sL_2} v_{IN} = \frac{L_1}{L_1 + L_2} v_{IN}$$

Merk op dat deze deler ook niet geschikt is voor DC-spanning, omdat de stroom maar heel even begrensd wordt (tijdens het opbouwen van het magnetische veld door de spoelen).

De deler wordt bruikbaar indien we een wisselspanning aanleggen. We kunnen de schakeling dan gebruiken om deze spanning te verlagen zonder energieverlies. We bekijken weer de situatie met een belastingsweerstand  $R$ :



Neem vergelijking (7.1) (die hoort bij een netwerk met dezelfde topologie) en vervang de weerstandswaarden door de complexe impedanties van dit schema:

$$R_2 \rightarrow sL_2 \quad R_1 \rightarrow R \parallel sL_1$$

Dit levert:

$$\begin{aligned}
 v_{OUT} &= \frac{\frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{sL_1}}}{\frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{sL_1}} + sL_2} v_{IN} \\
 &= \frac{1}{1 + sL_2 \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{sL_1} \right)} v_{IN} \\
 &= \frac{\frac{L_1}{L_1 + L_2}}{1 + s \frac{L_2}{R} \frac{L_1}{L_1 + L_2}} v_{IN}
 \end{aligned}$$

Deze vergelijking kan onder twee extreme omstandigheden vereenvoudigd worden tot:

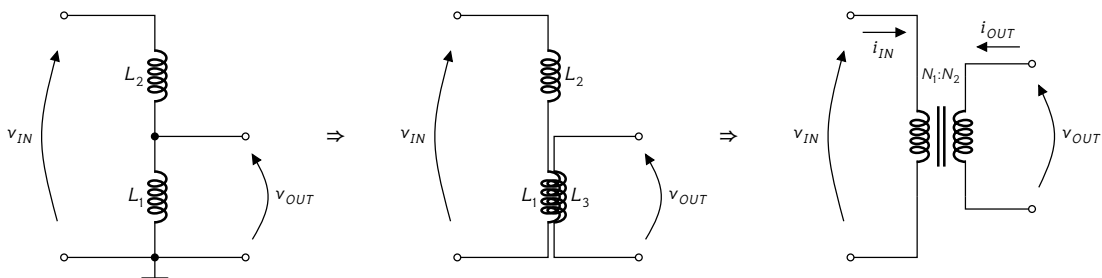
$$\begin{aligned}
 v_{OUT} &= \frac{L_1}{L_1 + L_2} v_{IN} & \text{als } \omega \frac{L_2}{R} \frac{L_1}{L_1 + L_2} \ll 1 \\
 v_{OUT} &= \frac{R}{L_2 s} v_{IN} & \text{als } \omega \frac{L_2}{R} \frac{L_1}{L_1 + L_2} \gg 1
 \end{aligned}$$

**Dropper** In het laatste geval hierboven beschreven is de spoel  $L_1$  nog weinig relevant (en zou ze zelfs kunnen weggelaten worden) en benoemen we  $L_2$  als een inductieve dropper.

**Waarschuwing** Opnieuw geldt dezelfde waarschuwing als bij de capacitieve potentiometrische deler. Ga hier niet zelf mee aan de slag tenzij je heel goed beseft wat de risico's zijn en je de gebruiker 100% kan afschermen van deze risico's.

**Weetje** De ballast in TL-verlichting is in regime-operatie de inductieve dropper voor de lamp.

**Verband met de transformator** De inductieve deler uit Figuur 7.1c is de inspiratiebron voor de transformator. Door de spoel  $L_1$  te doubleren met een spoel die met een gelijk aantal wikkelingen rond dezelfde kern is gewikkeld, ziet de tweede spoel dezelfde flux als de eerste spoel. Zo ontstaat een tweede kring die op haar klemmen dezelfde spanning zal vertonen als de verlaagde spanning over  $L_1$ , maar die op potentiaalvlak vlottend is ten opzichte van de eerste kring. Bijkomend kunnen we verder optimaliseren door het volledige magnetische veld (van  $L_1$  en  $L_2$ ) samen te gebruiken en te spelen met het aantal windingen van  $L_3$ .



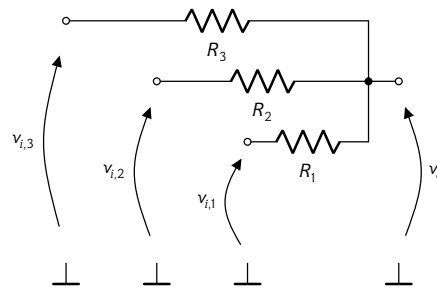
Ook voor de transformator geldt dat hij enkel bruikbaar is met wisselspanningen.

### 7.1.2 Sommatoren

Met een sommatoren willen we een gewogen gemiddelde van een aantal spanningen maken. Indien de gewichten gelijk zijn, dan krijgen we een strikte som, anders een gewogen som. In sommige gevallen is het ook zinvol

om binaire gewichten te voorzien (bv. om een digitaal-analoog-converter te maken). Daarom beschouwen we sommatoren met (a) willekeurige en (b) binaire gewichten.

**Willekeurige gewichten** We kunnen op een eenvoudige manier een gewogen som maken van verschillende spanningen door ze aan te sluiten op een weerstandsnetwerk. Als voorbeeld een sominator voor 3 spanningen:



Inderdaad: indien we  $G_i = 1/R_i$  stellen, dan leert de stelling van Millman ons dat

$$v_o = \frac{G_1 v_1 + G_2 v_2 + G_3 v_3}{G_1 + G_2 + G_3}$$

Enkele belangrijke bemerkingen bij deze vergelijking:

- indien de signalen op de ingangsklemmen aangeleverd worden vanuit bronnen met een niet te verwaarlozen inwendige weerstand, dan kunnen de gewichten anders uitdraaien dan verwacht;
- de vergelijking leert ook dat er bij het maken van een somiator met enkel passieve elementen (weerstanden in dit geval) steeds een verzwakking optreedt, aangezien  $G_i < \sum_j G_j$ .

Indien we een strikte somiator willen maken, dan kiezen we  $R_i = R$ . De somiator heeft in deze configuratie (zoals al opgemerkt hierboven) een verzwakking gelijk aan het aantal ingangen. Door een versterker toe te voegen kunnen we dit compenseren.

**Binaire gewichten - R/2R-ladder** In specifieke gevallen, bv. bij het maken van een digitaal-analoog-converter, is het handig om binaire gewichten te kunnen realiseren. Beschouw als voorbeeld een 4-bit DAC, die een binaire code  $x$  moet omzetten naar een analoge spanning, waarbij elke bit wordt voorgesteld door een spannings signaal  $V_{low} = 0V$  voor een binaire nul en een vaste spanning  $V_{high}$  voor een binaire één.

$$x = (0010)_2 = 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$$

$\downarrow$        $\downarrow$        $\downarrow$        $\downarrow$   
 $v_3$      $v_2$      $v_1$      $v_0$

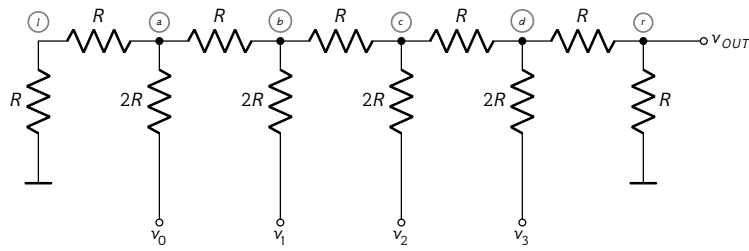
We willen dus de volgende binaire som realiseren:

$$v = 2^3 v_3 + 2^2 v_2 + 2^1 v_1 + 2^0 v_0$$

In theorie kunnen we de versie met willekeurige gewichten nemen met  $G_3 = 2G_2 = 4G_1 = 8G_0$ , wat met  $G_0 = G$  leidt tot:

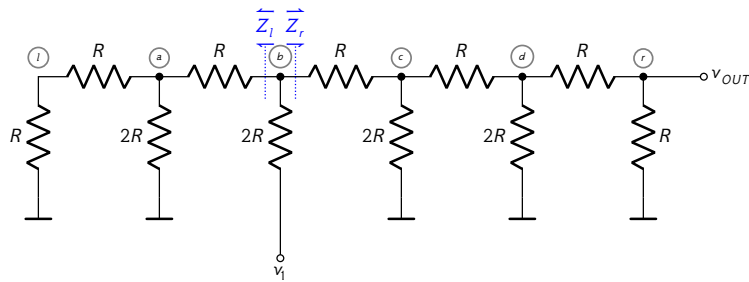
$$v = \frac{8Gv_3 + 4Gv_2 + 2Gv_1 + Gv_0}{15G} = \frac{1}{15} (8v_3 + 4v_2 + 2v_1 + v_0)$$

Er is echter een meer elegante oplossing die maar twee weerstandswaarden nodig heeft: de R/2R ladder:



Om deze structuur te begrijpen, passen we superpositie toe, d.w.z. we beschouwen één van de spanningen  $v_0$  t.e.m.  $v_3$  en zetten de rest op nul.

Dit werd hieronder getekend voor  $v_0 = v_2 = v_3 = 0$  en als enige  $v_1 \neq 0$ :

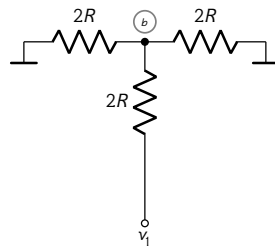


Het geniale van de ladderstructuur zit hem in het feit dat de impedantie die je ziet vanuit het knooppunt  $b$  zowel naar links als naar rechts  $2R$  bedraagt:

$$Z_l = 2R \qquad Z_r = 2R$$

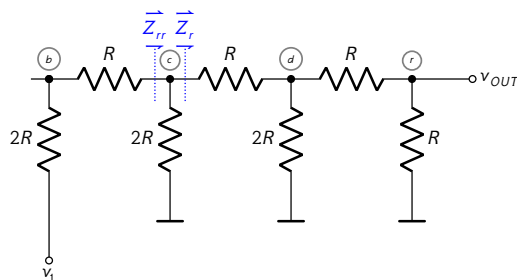
Dit geldt ongeacht de lengte van de ladder naar links en/of rechts!

Als gevolg ziet  $V_2$  een potentiometrische deler:



Hierdoor komt op het knooppunt  $b$  een spanning  $v_1/3$  te staan. Dat geldt ook overigens voor elke andere  $v_i$ . De bijdrage van de betrokken spanningsbron op de knoop erboven bedraagt  $v_i/3$ .

Als we ons nu concentreren op knoop  $b$  en het netwerk rechts van die knoop



dan weten we uit een eerdere berekening dat  $Z_r = 2R$  en bijgevolg  $Z_{rr} = 2R \parallel 2R = R$ . Samen met de weerstand tussen knoop (b) en (c) ontstaat dus een potentiometrische deler die de spanning van  $v_b$  halveert naar  $v_c$ . Dezelfde redenering kan verdergezet worden:  $v_c$  halveert zich weer naar  $v_d$  en nogmaals naar  $v_r$ . De conclusie is dus

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{v_b}{2^3} \\ &= \frac{v_1/3}{2^3} \end{aligned}$$

en meer algemeen

$$v_r = \frac{v_i/3}{2^{4-i}}.$$

Indien we superpositie toepassen (we voegen de analyses voor alle  $v_i$  samen), krijgen we

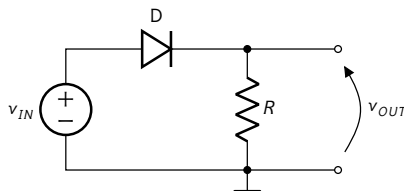
$$v_r = \frac{\frac{v_0}{2^4} + \frac{v_1}{2^3} + \frac{v_2}{2^2} + \frac{v_3}{2^1}}{3} = \frac{8v_3 + 4v_2 + 2v_1 + v_0}{48}$$

wat we weer kunnen veralgemenen voor een N-bit R/2R ladder tot

$$v_r = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} \frac{v_i}{2^{N-i}}}{3}.$$

### 7.1.3 Gelijkrichters

**Enkelzijdige gelijkrichter** Indien we in serie met een verbruiker ( $R$ ) een diode ( $D$ ) schakelen, dan wordt het negatieve deel van de voedingsspanning  $v_{IN}$  weggeknipt. Omdat op die manier maar een zijde van het signaal overblijft, noemen we het een enkelzijdige gelijkrichter.

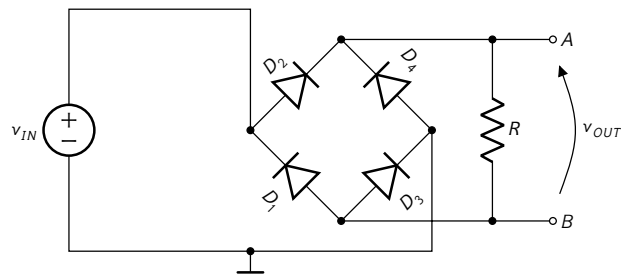


Indien de ingangsspanning positief is, is de diode voorwaarts gepolariseerd en zal ze stroom geleiden, zonder spanningsval over de diode. Indien de ingangsspanning negatief is, is de diode invers gepolariseerd en zal ze de stroom blokkeren. De spanning over de verbruiker ( $R$ ) zal bijgevolg nul blijven, en de volledige (negatieve) ingangsspanning komt over de diode te staan.

Hoewel we deze schakeling heel vaak zullen gebruiken in combinatie met een zuiver sinusvormige wisselspanning, hoeft dat niet het geval te zijn: het kan ook een willekeurig signaal zijn zoals geïllustreerd wordt in Figuur 7.3a.

**Dubbelzijdige gelijkrichter (Graetz brug)** Een ruitvormige opstelling van diodes (die allen met hun pijl van de negatieve gelijkgerichte spanningsklem naar de positieve gericht zijn) knipt niet gewoon het negatieve stuk weg, maar genereert effectief de absolute waarde van de voedingsspanning.

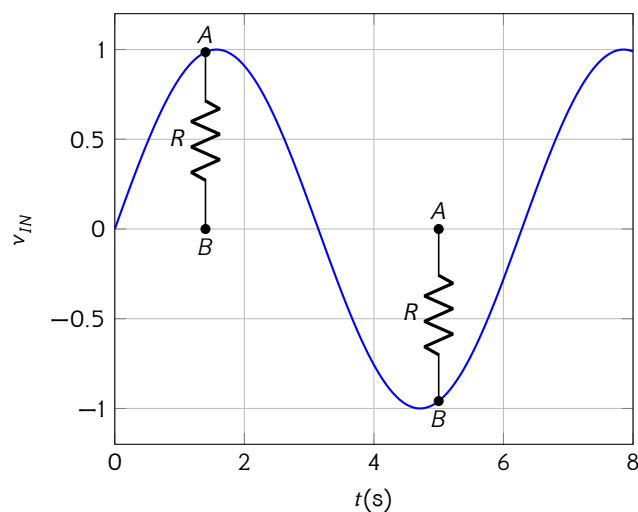
De term brug komt van het feit dat de voedingsspanning twee parallele takken ziet ( $D_1$  in serie met  $D_3$  en  $D_2$  in serie met  $D_4$ ), die centraal overbrugd worden met de belasting  $R$  op de uitgangsklemmen.



Indien de voedingsspanning positief is, gaan  $D_2$  en  $D_3$  voorwaarts gepolariseerd zijn, en  $D_1$  en  $D_4$  invers gepolariseerd zijn. Hierdoor komt deze positieve spanning volledig over  $R$  te staan.

Indien de voedingsspanning negatief is, gaan  $D_2$  en  $D_3$  invers gepolariseerd zijn, en  $D_1$  en  $D_4$  voorwaarts gepolariseerd zijn. Daardoor komt deze negatieve spanning volledig maar omgekeerd over  $R$  te staan. Het netto resultaat is ook in dit geval een positieve spanning  $v_{OUT}$ .

**Waarschuwing** Merk op dat je niet mag veronderstellen dat de onderste klem van de belasting  $R$  op nulpotentiaal blijft (waarop de onderste klem van deingangsspanningsbron zich bevindt). Indien we de bovenste klem  $A$  noemen en de onderste  $B$ , dan geeft de onderstaande grafiek voor twee tijdstippen (links op de positieve alternatie van deingangsspanning en rechts op de negatieve alternatie van deingangsspanning) weer hoe deze klemmen op de potentialen van deingangsspanning worden aangesloten.



Beide uitgangsklemmen bevinden zich dus per definitie niet op een veilig potentiaalniveau.

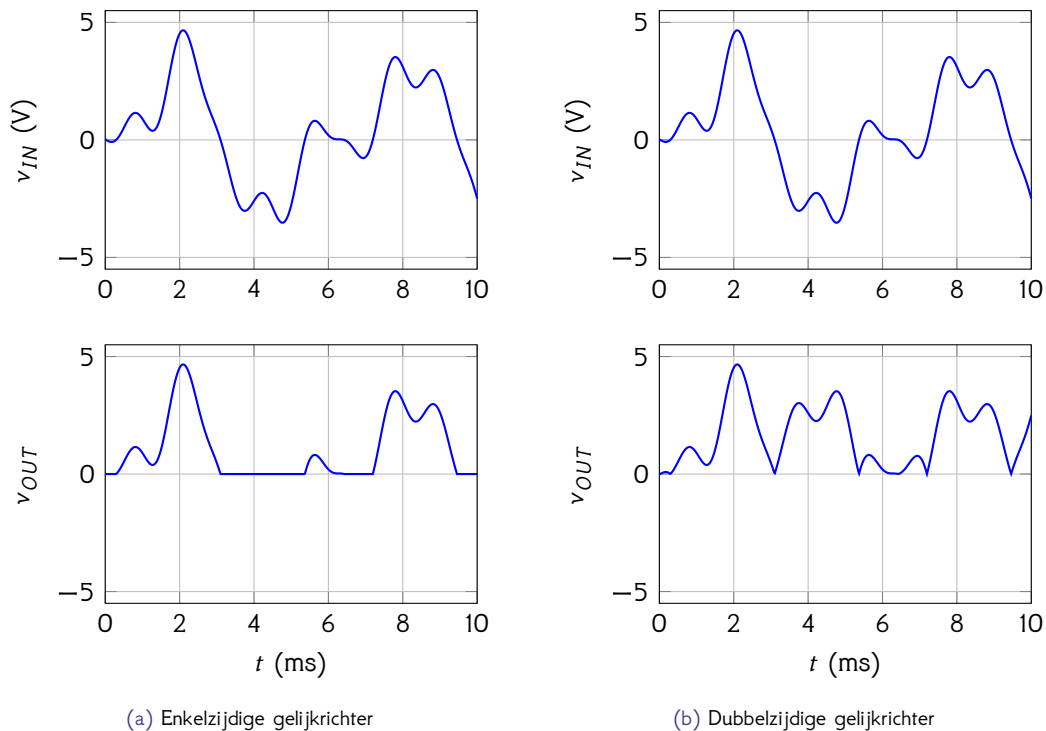
#### 7.1.4 Spanningsvermenigvuldigers

Deze netwerken worden ook wel eens boosters genoemd. Ze vermenigvuldigen echter geen twee spanningen met elkaar<sup>3</sup>, ze genereren enkel een DC spanning die een veelvoud is van een andere spanning.

We onderscheiden twee varianten:

- de spanningsladder

<sup>3</sup>Schakelingen die twee signalen vermenigvuldigen noemen we mixers. Die vormen een van de basisschakelingen van modulatie-technieken in de telecommunicatie.



Figuur 7.3: Illustratie van het tijddomeingedrag van enkelzijdige en dubbelzijdige (ideale) gelijkrichters

- de ladingspomp

De eerste heeft als voordeel dat op geen enkele component meer dan tweemaal de originele spanning komt te staan. De tweede is meer geschikt in geïntegreerde schakelingen waarbij de parasitaire strooicapaciteit inherent aan geïntegreerde schakelingen en de hoge uitgangsweerstand de spanningsladder minder bruikbaar maken.

Laten we maar meteen in de wereld van de ladders en pompen duiken.

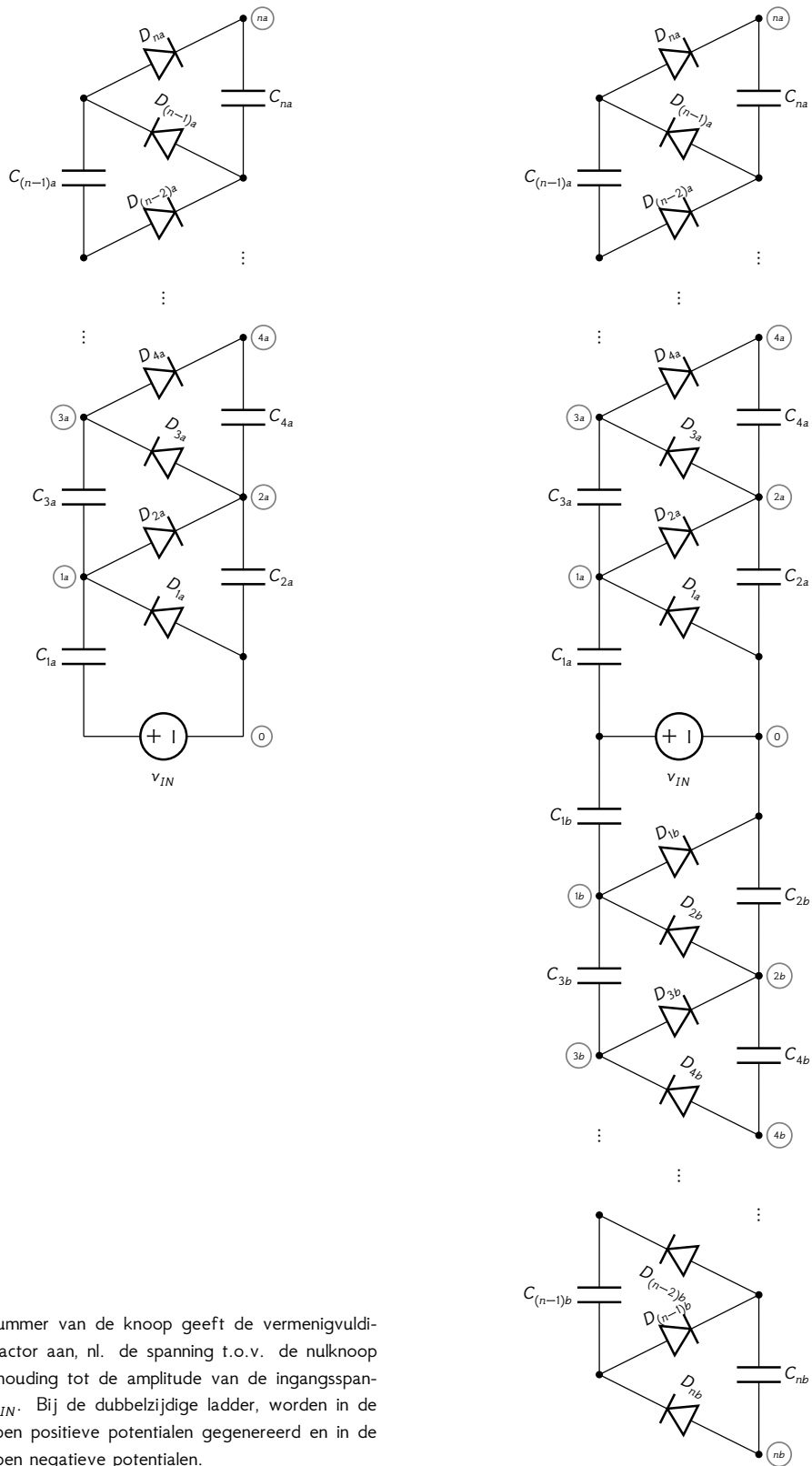
**De spanningsladder** Het algemene schema van de spanningsvermenigvuldigers is de dubbelzijdige ladderstructuur van Figuur 7.4. Indien we enkel beperkte stukken van deze ladderstructuur overhouden, krijgen we bijzondere gevallen waar specifieke wetenschappers hun naam aan hebben verbonden.

Naam	Vermenigvuldiger	Opbouwende Elementen	Uitgang
Villard	2	$D_i, C_i$ met $i = 1a$	1a t.o.v. 0
Delon	4	$D_i, C_i$ met $i = 1a, 1b$	1a t.o.v. 1b
Greinacher	2	$D_i, C_i$ met $i = 1a, 2a$	2a t.o.v. 0
Dubbelzijdige Greinacher	4	$D_i, C_i$ met $i = 1a, 1b, 2a, 2b$	2a t.o.v. 2b

Deze beperkte stukken worden ook wel eens cellen genoemd. Zo spreken we van een Villard-cel, een Delon- en een Greinacher-cel.

We leggen de werking uit, aan de hand van de onderstaande Greinacher cel. We veronderstellen dat de spanningsbron een sinusvormige spanning aflevert,<sup>4</sup> waarbij we op tijdstip  $t = 0$  starten met een negatieve

<sup>4</sup>We kiezen voor de eenvoud een sinusvormige bron, maar het zou ook een blok golf of een zaagtand kunnen zijn.



(a) Enkelzijdige ladder

(b) Dubbelzijdige ladder

Het nummer van de knoop geeft de vermenigvuldigingsfactor aan, nl. de spanning t.o.v. de nulknop in verhouding tot de amplitude van de ingangsspanning  $v_{IN}$ . Bij de dubbelzijdige ladder, worden in de a-knopen positieve potentialen gegenereerd en in de b-knopen negatieve potentialen.

Figuur 7.4: Algemene ladderstructuur van een spanningsvermenigvuldiger.

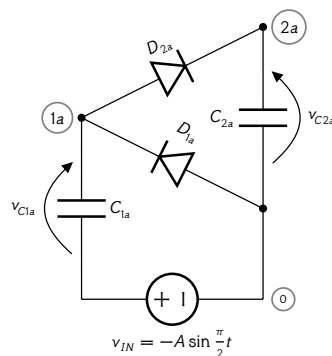
Oorspronkelijke grootheid	Analoge grootheid
lading	water
stroom	water dat vloeit
condensator	cilindrisch glas
potentiaal	absoluut waterniveau
potentiaalverschil over condensator	waterhoogte in het glas
diode	eenwegsklep die opengaat als het absolute waterniveau aan de anodezijde hoger is dan aan de kathodezijde
nulpotentiaal	zeeniveau

Tabel 7.1: Analogie tussen elektrische grootheden en het spelen met waterglazen in de de zee

alternatie. We gebruiken een eenvoudige analogie die wordt samengevat in Tabel 7.1, nl. de favoriete vakantie-activiteit van een gemiddelde elektronicus: met glazen water spelen in de zee.

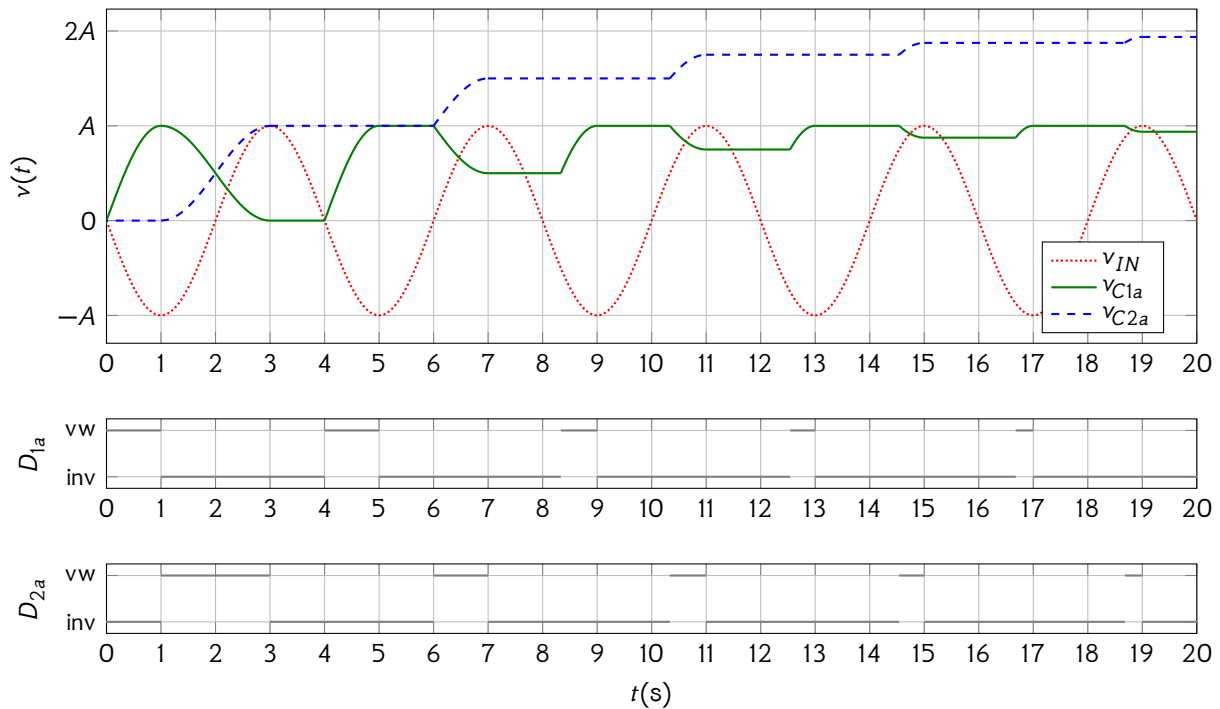
De glazen zijn van een speciale makelij: ze kunnen doorheen hun zijwand vollopen via een eenwegsklep indien het water aan de kathodezijde van de klep hoger staat dan in het glas.

Beschouw nu onderstaande Greinacher cel. Bekijk ook Figuur 7.5. De curves voor  $v_{C1a}$  en  $v_{C2a}$  stellen het waterniveau voor in de glazen van de respectieve condensatoren; de curve  $v_{IN}$  stelt de onderkant van het glas van condensator  $C_{1a}$  voor.



Beeld je in: we bevinden ons in de zee. De onderkant van de glazen bevindt zich op zeeniveau en de glazen zijn leeg op  $t = 0$ .<sup>5</sup> Gedurende het tijdsinterval  $t = 0 \dots 1$  wordt het glas van  $C_{1a}$  onder water getrokken tot een diepte  $A$  (rode curve). Het glas vult zich onmiddellijk via eenwegsklep  $D_{1a}$  die aan de anode het zeeniveau ziet en aan de kathode het waterniveau van het glas dat bij aanvang leeg was. Het glas vult zich tot hoogte  $A$  (groene curve). Vanaf tijdstip  $t = 1$  wordt het glas terug omhooggetild en komt zo met zijn wateroppervlak boven het zeeniveau uit. Het gevolg is dat klep  $D_{1a}$  zich sluit. Maar tegelijkertijd gaat klep  $D_{2a}$  open en het water stroomt van het glas  $C_{1a}$  in het glas  $C_{2a}$ . Op tijdstip  $t = 2$  bevindt het eerste glas zich ter hoogte van het tweede glas (samen op zeeniveau) en de helft van het water van  $C_{1a}$  is al doorgestroomd naar  $C_{2a}$  (de waterniveaus staan dus even hoog in beide glazen). Het eerste glas wordt nog hoger uit het water getild, waardoor de onderkant van het eerste glas zich op de hoogte  $A$  bevindt. Het gevolg is dat alle water van het eerste glas in het tweede glas is beland (waarin de waterhoogte nu  $A$  bedraagt). We trekken nu het eerste glas weer onder water ( $t = 4 \dots 5$ ), waardoor het zich terug vult. Het glas  $C_{1a}$  wordt dan weer omhoog getild. Op  $t = 6$  staat het even hoog als het glas  $C_{2a}$ . De waterniveaus erin zijn ook even hoog. In de seconde die erop volgt wordt het glas  $C_{1a}$  verder omhoog getild, waarbij de waterniveaus zich nivelleren. Dat wil zeggen dat bij

<sup>5</sup>Omwille van de eenvoud vermelden we bij de tijdsaanduidingen de eenheid seconde niet.



Figuur 7.5: Werking van de Greinacher cel vertrekkende van de zerocondities. De grafiek bovenaan geeft de bronspanning en de spanningen over de condensatoren weer. De grafieken onderaan geven aan wanneer de diodes voorwaarts (vw) of invers (inv) gepolariseerd zijn.

$t = 7$  de helft van het water naar  $C_{2a}$  is gevloeid, waar het waterniveau nu op  $1.5A$  staat. Vervolgens gaat het glas  $C_{1a}$  weer naar beneden en vult het zich opnieuw. Wanneer het glas nu terug omhoog getild wordt, duurt het tot de bodem van  $C_{1a}$  zich op  $0.5A$  bevindt eerder de absolute waterniveaus in de glazen weer gelijk staan. Dat gebeurt op  $t = 10.33$ . Het glas  $C_{1a}$  stijgt verder door waardoor een kwart van de inhoud overvloeit in  $C_{2a}$  waar het waterniveau op  $t = 11$  dan op  $1.75A$  staat. Dit proces zet zich steeds Zeno-gewijs<sup>6</sup> verder waardoor:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v_{C2a} = 2A$$

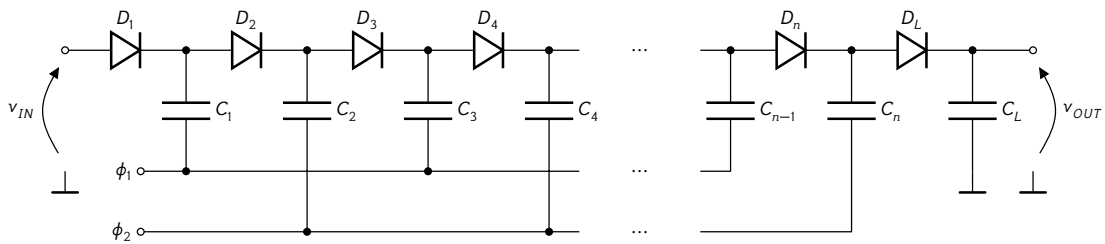
En nu terug met onze voeten op het droge: we zijn er met het bovenstaande proces in geslaagd om de spanning te verdubbelen.

Indien we de Greinacher cel nu uitbreiden met  $C_{3a}$  en  $D_{3a}$  dan kunnen we ook intuïtief begrijpen dat het glas  $C_{2a}$  in staat is om in oneindig veel cycli  $C_{3a}$  op te laden tot  $2A$ . En dat geldt ook voor de cellen van een nog hoger niveau in de algemene ladderstructuur. We krijgen dus op niveau  $2a$  een spanning  $2A$ , op niveau  $4a$  de spanning van  $2a$  plus  $2A$  wat  $4A$  wordt. Merk op dat de spanningen aan de rechterkant van de ladder 'stabiel' zijn t.o.v. de referentiepotentiala, terwijl de spanningen aan de linkerkant op en neer dansen met amplitude  $A$ .

De onderzijde van de dubbelzijdige ladderstructuur werkt op gelijkaardige wijze. Men zou een analogie kunnen uitwerken met omgekeerde glazen die een gas bevatten dat lichter dan lucht is. We laten het plezier om deze analogie uit te werken over aan de enthousiaste lezer.

Het bijzondere aan deze netwerken is dat er geen enkele component is die meer dan tweemaal de voedingsspanningsamplitude over zich krijgt. Het is het samenspel van deze componenten dat een hoge spanning oplevert.

<sup>6</sup>De Griekse filosoof Zeno van Elea beschrijft onder meer een paradox waarbij een loper van  $A$  naar  $B$  moet lopen en dit doet volgens het principe dat hij telkens de helft van de resterende afstand aflegt en een tussenstop maakt. Bij elke tussenstop is de afstand die nog afgelegd moet worden even lang als de afstand die hij zonet na de vorige tussenstop aflegde. Foute conclusie: de loper geraakt nooit in  $B$ . Juiste conclusie: de loper geraakt volgens dit proces niet met een eindig aantal tussenstops in  $B$ .



Figuur 7.6: Algemene structuur van een ladingspomp

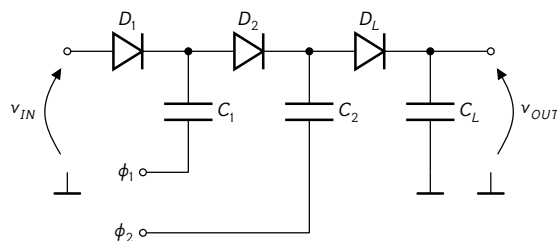
De beschrijving die we hierboven gaven, gaat uit van een onbelaste ladder (die geen stroom moet leveren). De analyse van een belaste ladder houden we voor later.

Deze vermenigvuldigers werden courant gebruikt in schakelingen die een hoge spanning behoeven, zoals kathoedestraalbuizen (CRTs) en de eerste deeltjesversnellers. Ze blijven tot op heden actueel in toepassingen gaande van sensoren die enkel bij hoge spanning werken, tot in je eigen microgolfoven.

**De ladingspomp** De algemene structuur van de ladingspomp (ook wel Dicksonpomp genoemd) vind je in Figuur 7.6. Hetingangssignaal  $v_{IN}$  wordt op voedingsspanningsniveau  $V^+$  gezet indien de pomp in werking moet zijn. Verder hebben we voor de pomp twee kloksignalen nodig,  $\phi_1$  en  $\phi_2$  die oscilleren tussen 0V en de voedingsspanning en die in tegenfase zijn.

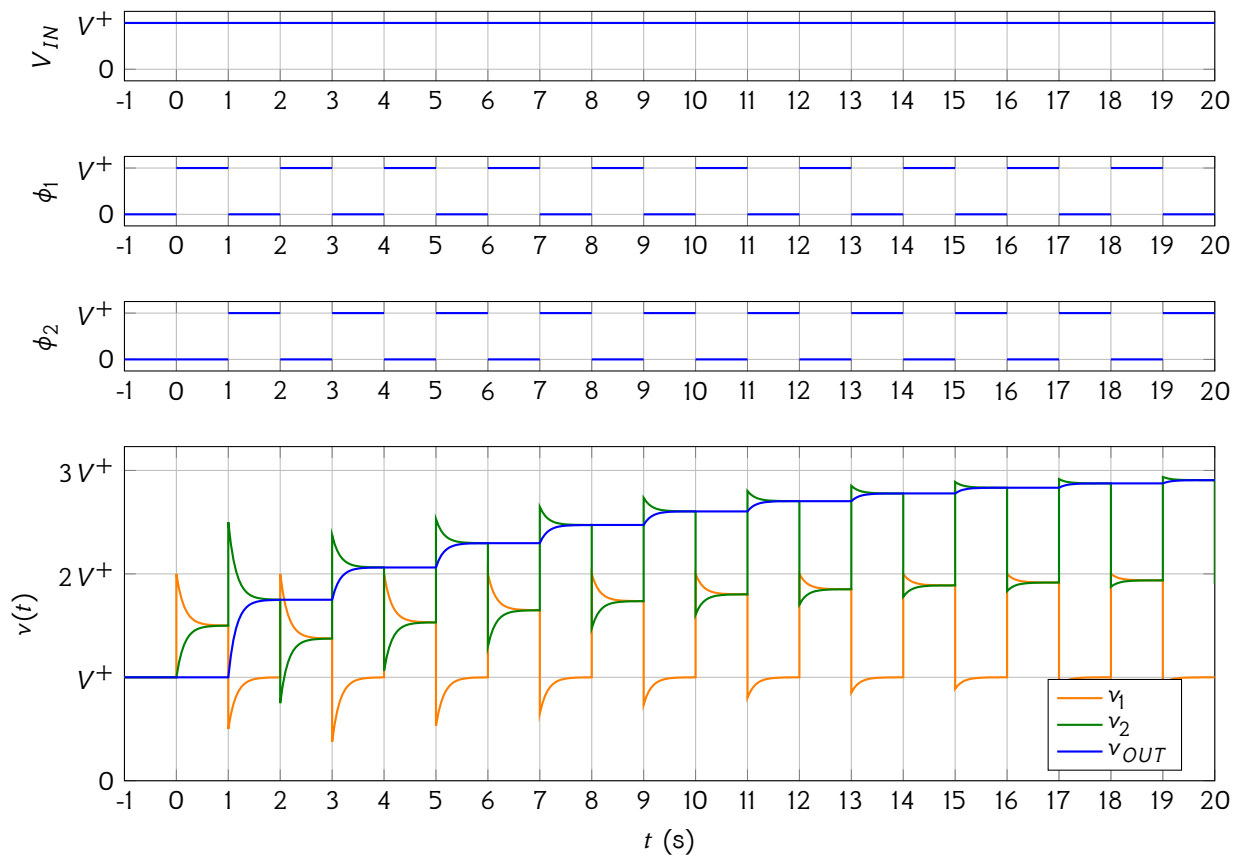
We leggen de werking van de ladingspomp opnieuw uit aan de hand van onze waterglazen-analogie. Bekijk daartoe indien nodig terug Tabel 7.1.

Beschouw onderstaande ladder van minimale lengte. Die is voldoende om het principe te begrijpen. We veronderstellen voor het gemak:  $C_1 = C_2 = C_L$ . Raadpleeg bij het lezen van onderstaande uitleg ook Figuur 7.7.



We veronderstellen dat vóór  $t = 0$  deingangsspanning al geruime tijd opstond op het niveau van de voedingsspanning  $V^+$ , de kloksignalen  $\phi_1$  en  $\phi_2$  beide op nul stonden, waardoor alle waterglazen  $C_1$ ,  $C_2$  en  $C_L$  zich hebben kunnen vullen tot niveau  $V^+$ . Op  $t = 0$  starten we beide kloksignalen in tegenfase. De cyclus start met het omhoogduwen van glas  $C_1$ , waardoor het klep  $D_1$  spert, en  $D_2$  opengaat. Hierdoor kan het waterniveau zich tussen  $C_1$  en  $C_2$  nivelleren tot  $1.5V^+$ . Om de tekening duidelijker te maken veronderstellen we dat dit nivelleren geleidelijk aan gebeurt (vandaar de langzame transitie op de tekening).<sup>7</sup> Op  $t = 1$  wordt het halfvolle glas  $C_1$  abrupt terug naar beneden gehaald.  $D_2$  spert en  $D_L$  opent zich. Het glas  $C_2$  wordt nu omhooggeduwd. In het interval  $t = 1 \dots 2$  kan het niveau van  $C_2$  zich nivelleren met glas  $C_L$  tot op niveau  $1.75V^+$ . Ondertussen heeft glas  $C_1$  zich ook terug volledig kunnen vullen. En dan begint de de cyclus opnieuw met het omhoogduwen van glas  $C_1$ . Langzaam wordt het niveau op  $C_L$  omhooggeduwd tot  $3V^+$ .

<sup>7</sup>Later zullen we zien dat dergelijk verloop vrij realistisch is, als de diode niet ideaal is.



Figuur 7.7

Merk op dat bij deze schakeling de laatste condensator de volledige spanning over zich heen krijgt!

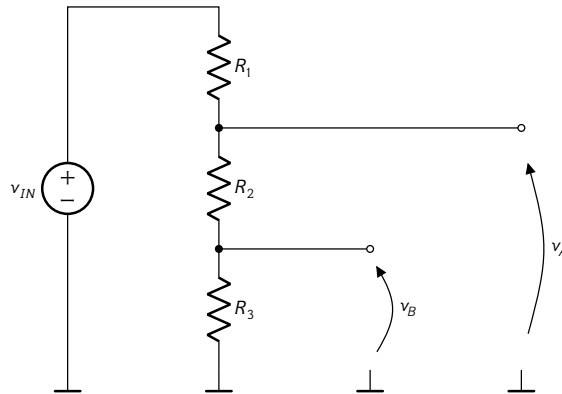
De beschrijving die we hierboven gaven, gaat uit van een onbelaste ladingspomp (die geen stroom moet leveren). De analyse van een belaste pomp houden we voor later.

Deze vermenigvuldigers werden eerst gebruikt om op EEPROM ICs (Electrically Erasable Programmable Read-only Memory Integrated Circuits) de hoge spanning te genereren die nodig is om ze te wissen en te programmeren. Momenteel tref je ze nog aan in driverschakelingen (bv. om een H-brug met MOSFets aan te sturen) om bepaalde transistoren heel goed in geleiding te brengen.

Tot zover de passieve netwerken. Laten we nu kijken wat allemaal mogelijk is indien we ook actieve componenten gebruiken.

## Oefeningen

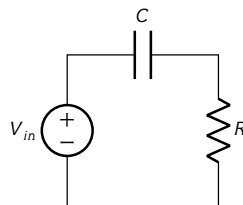
Oefening 7.1.4-1: Bereken de uitdrukkingen voor de twee uitgangsspanningen in de onderstaande 3-ledige deler.



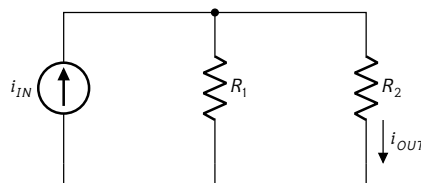
Oefening 7.1.4-2: Vervang in het schema van de vorige oefening de weerstanden door condensatoren en bereken de uitdrukkingen voor de twee uitgangsspanningen.

Oefening 7.1.4-3: Vervang in het schema van de vorige oefening de condensatoren door spoelen en bereken de uitdrukkingen voor de twee uitgangsspanningen.

Oefening 7.1.4-4: Dimensioneer de condensator  $C$  voor de onderstaande capacitive dropper die een ingangsspanning van 240 V RMS bij 50 Hz terugbrengt tot 24 V RMS over de belastingsweerstand  $R = 560 \Omega$ .

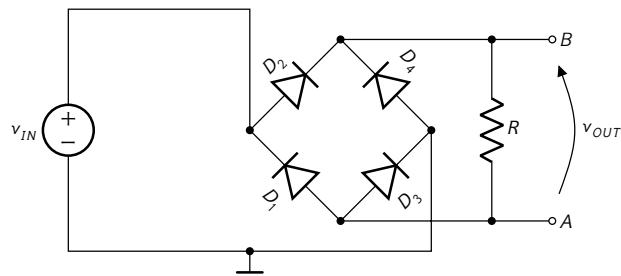


Oefening 7.1.4-5: Naast spanning kunnen we ook stroom delen. Bepaal de stroom door  $R_2$  gegeven de ingangsstroom  $I$ .



Oefening 7.1.4-6: Ontwerp een spanningsomvormer met vier ingangen met als relatieve gewichten: 11, 7, 5, 3.

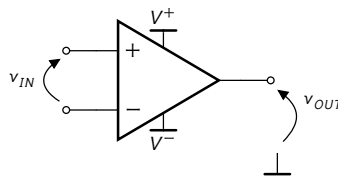
Oefening 7.1.4-7: Beschouw de onderstaande bruggelijkrichter. Veronderstel een sinusvormige bron met RMS waarde gelijk aan 24 V, frequentie  $f = 400$  Hz en een belastingsweerstand  $R = 1 \text{ k}\Omega$ .



1. Welke golfvormen ga je aan de uitgang zien als er één diode stuk is (open keten)? Beschouw de situatie voor de 4 diodes.
2. Welke golfvormen ga je aan de uitgang zien als er één diode stuk is (kortsluiting)? Beschouw de situatie voor de 4 diodes.

## 7.2 Actieve netwerken

We zouden netwerken kunnen bedenken die enkel afhankelijke bronnen als actief element gebruiken. Maar om de link met de realiteit (en de latere schakelingen die we willen bouwen) niet te verliezen, gaan we voor deze afhankelijke bron steeds een operationele versterker gebruiken.

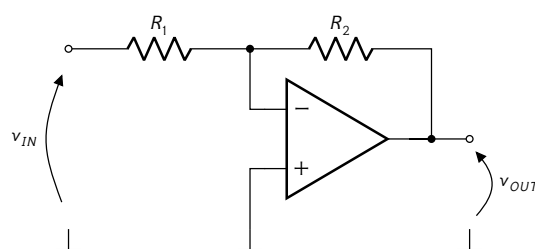


Hoewel we frequent de voedingsspanningsaansluitingen niet tekenen, moeten we er ons wel van bewust zijn dat de uitgangszwaai beperkt is tot de voedingsspanning. We zouden ook hier abstractie van kunnen maken (en de uitgangszwaai van  $-\infty V$  tot  $+\infty V$  laten gaan), maar we maken deze beperking op een handige manier tot opportuniteit in enkele netwerken.

### 7.2.1 Versterkers

#### 7.2.1.1 Inverterende versterker

De volgende opampconfiguratie realiseert een inverterende versterker:



De basisgegevens van deze versterker kunnen als volgt samengevat worden:

$$A_v = -\frac{R_2}{R_1} \qquad Z_i = R_1 \qquad Z_o = 0$$

De vermelde ingangs- en uitgangsimpedanties horen bij het Z-parameter model en zijn bijgevolg de ingangsimpedantie bij open uitgang en de uitgangsimpedantie bij open ingang.

**Versterking** Laten we de spanningsversterking van deze schakeling berekenen.

Indien we de stelling van Millman toepassen op de negatieve klem van de opamp (wetende dat er geen stroom in de ingangsklem vloeit), krijgen we:

$$v_m = \frac{G_1 v_{IN} + G_2 v_{OUT}}{G_1 + G_2} \quad (7.2)$$

met  $G_i = 1/R_i$ .

De opamp met versterking  $A$  en het feit dat de positieve klem aan de referentiepotaiaal (de 'grond') hangt, kan samengevat worden als:

$$\begin{aligned} v_{OUT} &= A(v_p - v_m) \\ v_p &= 0 \end{aligned}$$

We veronderstellen daarbij dat de opamp in zijn lineaire gebied werkt.

Dit levert als conclusie op:

$$v_m = -\frac{v_{OUT}}{A} \quad (7.3)$$

Combinatie van (7.2) en (7.3) leidt tot:

$$\begin{aligned} -\frac{v_{OUT}}{A} &= \frac{G_1 v_{IN} + G_2 v_{OUT}}{G_1 + G_2} \\ \Leftrightarrow v_{OUT}(G_1 + G_2) &= -A(G_1 v_{IN} + G_2 v_{OUT}) \\ \Leftrightarrow v_{OUT}(G_1 + G_2 + AG_2) &= -AG_1 v_{IN} \\ \Leftrightarrow \frac{v_{OUT}}{v_{IN}} &= -\frac{AG_1}{G_1 + G_2 + AG_2} \\ \Leftrightarrow \frac{v_{OUT}}{v_{IN}} &= -\frac{G_1}{\frac{G_1 + G_2}{A} + G_2} \end{aligned}$$

Indien we nu veronderstellen dat  $G_2 \gg (G_1 + G_2)/A$ , wat een redelijke veronderstelling is omdat de versterking van de ideale opamp zeer groot is (veronderstel voor het gemak  $A \rightarrow +\infty$ ), dan kunnen we de spanningsversterking benaderen als:

$$\frac{v_{OUT}}{v_{IN}} = -\frac{G_1}{G_2} = -\frac{R_2}{R_1}$$

Merk op dat een oneindige opampversterking  $A$  in combinatie met (7.3) ons oplevert dat  $v_m = 0$ . De versterking van de opamp houdt de negatieve ingang van de opamp dus op dezelfde potaiaal als de positieve ingang, in dit geval op het grondniveau.

We spreken soms van een virtuele grond die veroorzaakt wordt door negatieve terugkoppeling.<sup>8</sup> Merk op dat enkel de potaiaal gelijkgehouden wordt en dat dit niet betekent dat er een kortsluiting bestaat tussen de twee ingangsklemmen, er kan immers geen stroom lopen. Enkel het potaiaalverschil is nul. Vermijd de term virtuele kortsluiting, het is geen kortsluiting!

Dit leidt ons tot een eenvoudig inzicht in de werking van de inverterende versterker:

1. De negatieve feedback houdt de minklem van de opamp op het grondniveau.

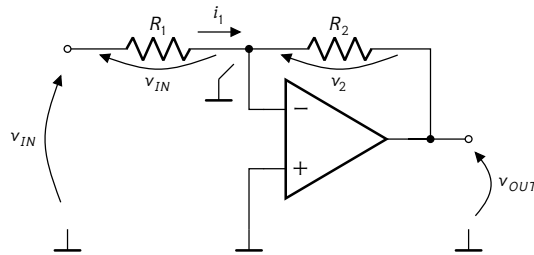
<sup>8</sup>De negatieve terugkoppeling (ook wel negatieve feedback genoemd) ontstaat door het feit dat een kleine toename in potaiaal van  $v_m$  leidt tot een grote afname in de uitgangspotaiaal van de opamp; de weerstand  $R_2$  zal zo een grote negatieve potaiaal aan zijn rechterklem zien en zo de negatieve klem van de opamp weer naar beneden trekken.

2. De volledige ingangsspanning komt dus over  $R_1$  te staan, wat een stroom doorheen deze weerstand oplevert van  $i_1 = v_{IN}/R_1$ .
3. Deze stroom kan niet anders dan volledig doorstromen door  $R_2$ , waar hij een spanning oplevert gelijk aan  $v_2 = R_2 i_1$ .
4. Deze spanning staat antiparallel aan  $v_{OUT}$ .

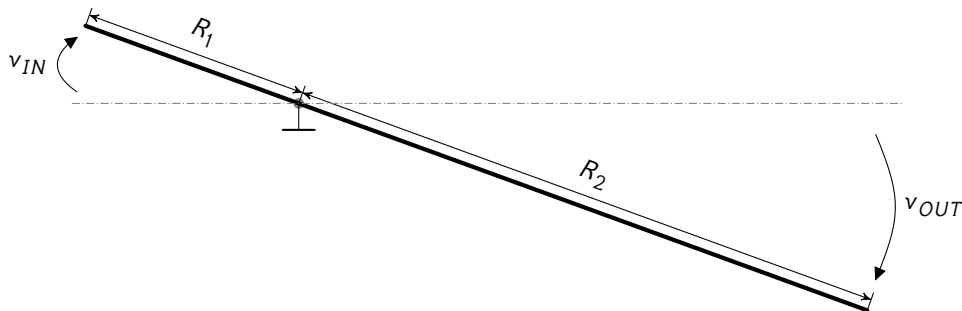
Bijgevolg:

$$v_{OUT} = -v_2 = -R_2 i_1 = -R_2 \frac{v_{IN}}{R_1}$$

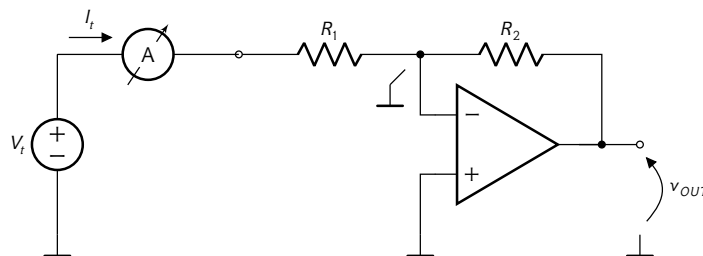
De onderstaande figuur illustreert dit:



We krijgen hier dus een soort hefboom met centraal scharnierpunt, waarbij de lengte van de respectieve delen om het scharnierpunt evenredig zijn met de waarden van  $R_1$  en  $R_2$ :



**Ingangsimpedantie** Om deingangsimpedantie te bepalen, leggen we een test-ingangsspanning  $V_t$  aan en we kijken welke teststroom  $I_t$  er zal vloeien:



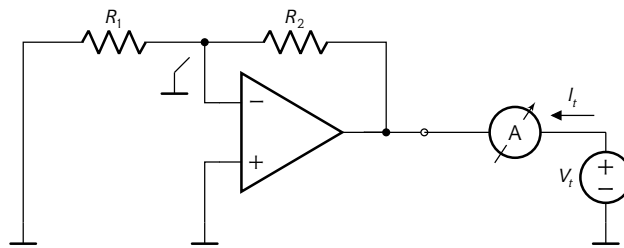
De negatieve feedback maakt van de negatieve klem van de opamp een virtuele grond, waardoor de (test)ingangsspanning  $V_t$  volledig over  $R_1$  komt te staan. Bijgevolg is:

$$I_t = \frac{V_t}{R_1}$$

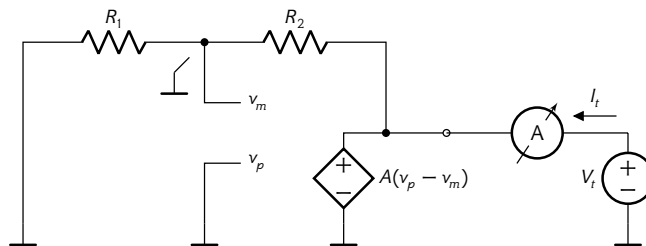
en wordt deingangsimpedantie

$$Z_i = \frac{V_t}{I_t} = R_1$$

**Uitgangsimpedantie** Om de uitgangsimpedantie te bepalen, leggen we opnieuw een test-ingangsspanning  $V_t$  aan en we kijken welke teststroom  $I_t$  er zal vloeien. We brengen wel de ingang in rust, d.w.z. de ingangsspanningsbron wordt een kortsluiting.



De testspanning komt nu over  $R_2$  te staan, maar parallel aan  $R_2$  staat ook de opamp. Indien we de opamp door het zuiver lineaire model vervangen (een spanningsgecontroleerde spanningsbron, kort een VCVS), dan krijgen we:

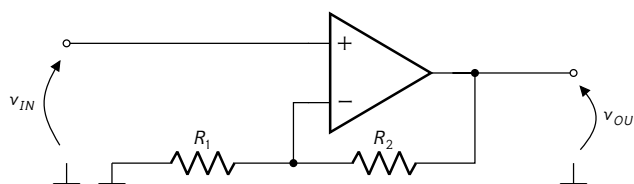


De VCVS is op zich op impedantievlak een kortsluiting. De totale uitgangsimpedantie is dan ook nul.

$$Z_o = R_2 \parallel 0 = 0$$

### 7.2.1.2 Niet-inverterende versterker

De volgende configuratie is een variant van de vorige en levert een niet-inverterende versterker op:



De basisgegevens van deze versterker kunnen samengevat worden als volgt:

$$A_v = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \qquad Z_i = \infty \qquad Z_o = 0$$

Merk op dat we met deze schakeling geen verzwakking kunnen realiseren, waar dat bij de inverterende versterker wel het geval was.

**Versterking** Laten we de spanningsversterking van deze schakeling berekenen.

Indien we de stelling van Millman toepassen op de negatieve klem van de opamp (wetende dat er geen stroom in de ingangsklem vloeit), krijgen we:

$$v_m = \frac{G_2 v_{OUT}}{G_1 + G_2} \quad (7.4)$$

met  $G_i = 1/R_i$ .

De volgende vergelijkingen modelleren de opamp met versterking  $A$  en het feit dat de ingang rechtstreeks aangesloten wordt op de positieve klem:

$$\begin{aligned} v_{OUT} &= A(v_p - v_m) \\ v_p &= v_{IN} \end{aligned}$$

We veronderstellen daarbij dat de opamp in zijn lineaire gebied werkt.

Dit levert als conclusie op:

$$v_{OUT} = A(v_{IN} - v_m) \quad (7.5)$$

Combinatie van (7.4) en (7.5) leidt tot:

$$\begin{aligned} v_{OUT} &= A \left( v_{IN} - \frac{G_2}{G_1 + G_2} v_{OUT} \right) \\ \Leftrightarrow v_{OUT} \left( 1 + A \frac{G_2}{G_1 + G_2} \right) &= A v_{IN} \\ \Leftrightarrow \frac{v_{OUT}}{v_{IN}} &= \frac{A}{1 + A \frac{G_2}{G_1 + G_2}} \\ \Leftrightarrow \frac{v_{OUT}}{v_{IN}} &= \frac{1}{\frac{1}{A} + \frac{G_2}{G_1 + G_2}} \end{aligned}$$

Indien we nu veronderstellen dat  $1/A \ll G_2/(G_1 + G_2)$ , wat een redelijke veronderstelling is omdat de versterking van de ideale opamp zeer groot is (veronderstel voor het gemak  $A \rightarrow +\infty$ ), dan kunnen we de spanningsversterking benaderen als:

$$\frac{v_{OUT}}{v_{IN}} = \frac{G_1 + G_2}{G_2} = \frac{R_2 + R_1}{R_1}$$

Merk op dat een oneindige opampversterking  $A$  in combinatie met (7.5) (waarbij we  $v_{OUT}$  eindig veronderstellen) ons oplevert dat  $v_m = v_p$ . De versterking van de opamp houdt de negatieve ingang van de opamp dus op dezelfde potentiaal als de positieve ingang.

Het is opnieuw de negatieve terugkoppeling die zorgt voor dit equipotentiaaleffect.

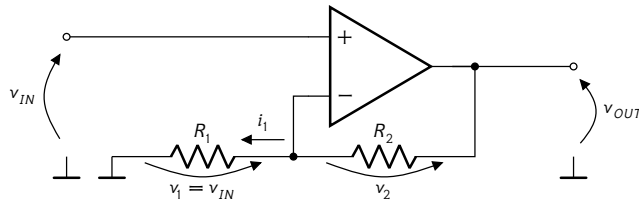
Dit brengt ons tot een eenvoudig inzicht in de werking van de niet-inverterende versterker.

1. De negatieve feedback tilt de minklem van de opamp op tot op het niveau van de ingangspotentiaal.
2. De volledige ingangsspanning komt dus over  $R_1$  te staan ( $v_1 = v_{IN}$ ), wat een stroom doorheen deze weerstand oplevert van  $i_1 = v_{IN}/R_1$ .
3. Deze stroom kan niet anders dan volledig vanuit  $R_2$  komen, waar hij een spanning oplevert gelijk aan  $v_2 = R_2 i_1$ .
4. De som van de spanningen  $v_1$  en  $v_2$  staat nu parallel aan  $v_{OUT}$ ; ze moeten dus gelijk zijn.

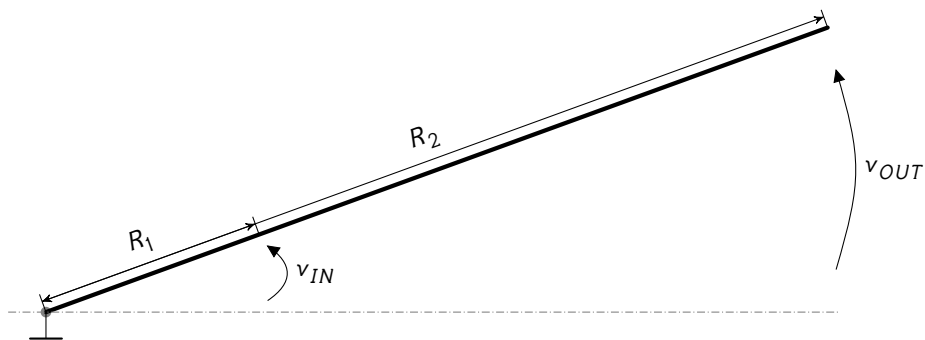
Bijgevolg:

$$v_{OUT} = v_1 + v_2 = (R_1 + R_2)i_1 = (R_1 + R_2)\frac{v_{IN}}{R_1}$$

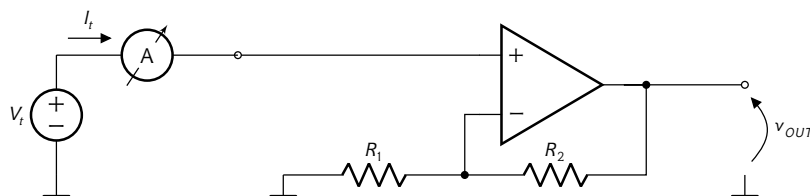
De onderstaande figuur illustreert dit:



We krijgen hier dus opnieuw een soort hefboom met centraal uiterst links en waarbij de ingangsspanning centraal wordt aangelegd. De lengtes van de delen links en rechts van dat punt zijn evenredig zijn met de waarden van  $R_1$  en  $R_2$ :

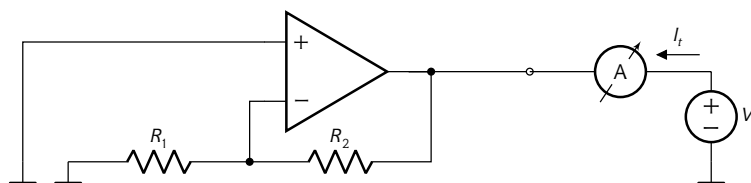


**Ingangsimpedantie** Om deingangsimpedantie te bepalen, leggen we een test-ingangsspanning  $V_t$  aan en we kijken welke teststroom  $I_t$  er zal vloeien:



Er zal duidelijk geen stroom kunnen vloeien. Deingangsimpedantie is bijgevolg oneindig groot.

**Uitgangsimpedantie** Om de uitgangsimpedantie te bepalen, leggen we opnieuw een test-ingangsspanning  $V_t$  aan en we kijken welke teststroom  $I_t$  er zal vloeien. We brengen wel opnieuw de ingang in rust, d.w.z. de ingangsspanningsbron wordt een kortsluiting.



De testspanning komt over de serieschakeling van  $R_1$  en  $R_2$  te staan, maar ook (parallel) over de uitgangsimpedantie van de operationele versterker. De uitgangsimpedantie is bijgevolg gelijk aan 0.

### 7.2.1.3 Spanningsvolger / bufferversterker

De spanningsvolger of buffer is een variant van de niet-inverterende versterker waarbij  $R_1 \rightarrow +\infty$  en  $R_2 \rightarrow 0$ . Waarom doen we dit? De niet-inverterende versterker had als versterking

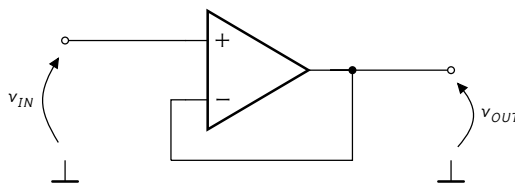
$$\frac{v_{OUT}}{v_{IN}} = \frac{R_1 + R_2}{R_1}$$

Indien we nu  $R_2 = 0$  kiezen (d.w.z. we vervangen de weerstand door een kortsluiting), dan krijgen we:

$$\frac{v_{OUT}}{v_{IN}} = \frac{R_1}{R_1} = 1$$

Hieruit blijkt dat  $R_1$  de versterking niet meer beïnvloedt, zolang  $R_1 \neq 0$ . We mogen  $R_1$  dus niet vervangen door een kortsluiting, maar wel door een open keten, d.w.z.  $R_1 = +\infty$ .

Zo komen we tot de volgende schakeling:



De basisgegevens van deze versterker kunnen dan ook als volgt samengevat worden:

$$A_v = 1$$

$$Z_i = \infty$$

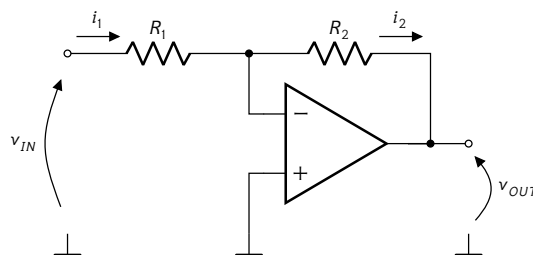
$$Z_o = 0$$

Omdat de volledige uitgangsspanning teruggekoppeld wordt naar de negatieve klem van de opamp, spreken we van eenheidsterugkoppeling.

### 7.2.2 Omzeters

Vanuit de basisconfiguratie van een inverterende versterker kunnen we nu gemakkelijk een stroom-spanning-omzetter en een spanning-stroom-omzetter afleiden.

Laten we terug de configuratie van een inverterende versterker beschouwen:



We weten dat:

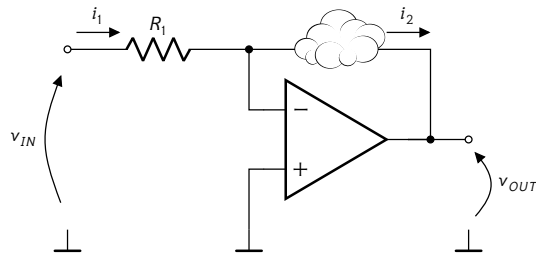
1. de spanning aan de ingang  $v_{IN}$  omgezet wordt in een stroom door  $R_2$ , nl.

$$i_2 = \frac{v_{IN}}{R_1}$$

2. de stroom door  $R_1$  omgezet wordt in een spanning aan de uitgang volgens:

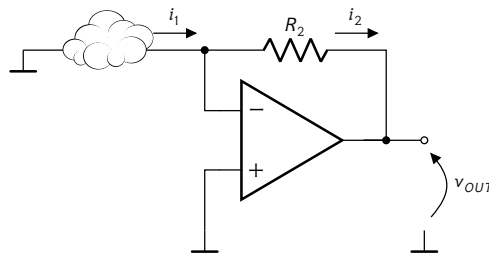
$$v_{OUT} = -R_2 i_1$$

**Spanning-stroom-omzetter** Deze is gebaseerd op de eerste vaststelling. We kunnen immers in de inverterende versterker  $R_2$  vervangen door een willekeurige schakeling waardoor we een zekere stroom willen laten lopen.



Deze techniek werkt natuurlijk enkel indien de opamp niet in saturatie moet om de nodige stroom te sourcen/-sinken.

**Stroom-spanning-omzetter** Deze is gebaseerd op de tweede vaststelling. We kunnen immers in de inverterende versterker  $R_1$  vervangen door een schakeling die een stroom  $i_1$  produceert die moet worden omgezet in een spanning.

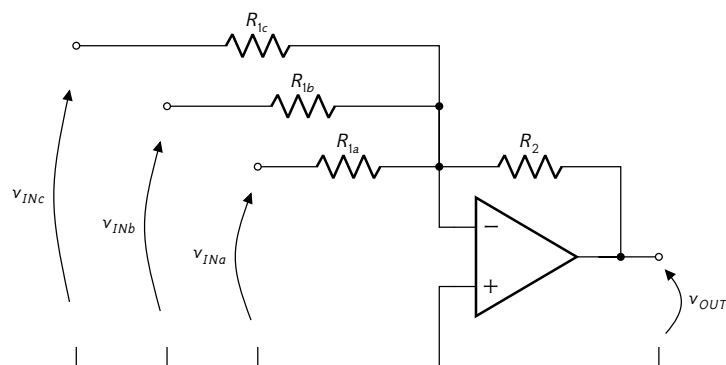


Opnieuw: deze techniek werkt natuurlijk enkel indien de opamp niet in saturatie moet om de nodige stroom in spanning om te zetten.

## 7.2.3 Somversterkers

### 7.2.3.1 Inverterende somversterker

De gewone inverterende versterker kan eenvoudig uitgebreid worden naar een versterker met meerdere ingangen, door voor elke ingang een weerstand te voorzien naar de virtuele grond van de inverterende versterker. Zo wordt de som van deze stromen door  $R_2$  versterkt naar de uitgang. Als voorbeeld nemen we een somversterker met 3 ingangen:



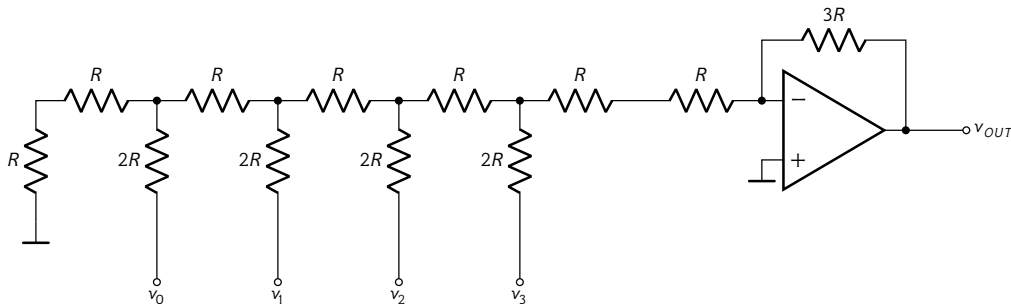
Indien  $R_{1a} = R_{1b} = R_{1c} = R_1$ , dan

$$v_{OUT} = -\frac{R_2}{R_1}(v_{INa} + v_{INb} + v_{INc}) \quad Z_i = R_1 \quad Z_o = 0$$

De ingangsimpedantie van een specifieke ingang gaat uit van het feit dat de andere ingangen kortgesloten zijn met de grond. Kan je de berekening zelf maken? Kan je een formule opstellen voor een versterker met  $N$  ingangen?

Indien we verschillende waarden voor de weerstanden nemen, kunnen we zelfs een gewogen som realiseren. Indien bv.  $R_{1a} = 2R_{1b} = 4R_{1c} = \dots$ , dan kunnen we een 3 bit binaire digitale code met LSB op  $v_{INa}$  en MSB op  $v_{INc}$  van het digitale domein omzetten naar een analogo signaal: we hebben een eenvoudige digitaal-analoog-converter (DAC) gemaakt!

En vermits we het principe van een  $R/2R$ -ladder kennen, kunnen we zelfs nog op een veel slimme manier een Ladder DAC maken. Hieronder eentje voor  $N = 4$ :



Merk op dat de rechterkant van de ladder zich ook mooi op het grondniveau bevindt, dankzij de equipotentiaal-eigenschap van de opamp.

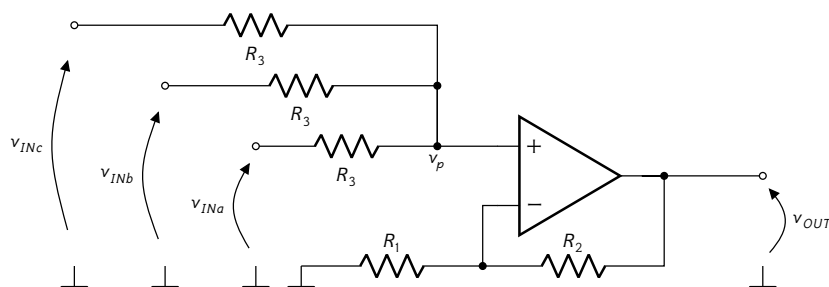
Reken zelf na dat geldt:

$$v_{OUT} = -\left(\frac{v_3}{2} + \frac{v_2}{4} + \frac{v_1}{8} + \frac{v_0}{16}\right)$$

Door de keuze van de versterkingsfactor 3 voor de inverterende versterker is het zo dat als  $v_i$  waarden aanneemt tussen 0 en  $V_H$ , de uitgang (op het restant van Zeno's paradox na) ook een waarde aanneemt tussen 0 en  $-V_H$ .

### 7.2.3.2 Niet-inverterende somversterker

De gewone niet-inverterende versterker kan eenvoudig uitgebreid worden naar een versterker met meerde ingangen, door een passief sommatienetwerk voor de ingang te plaatsen. Als voorbeeld nemen we een somversterker met 3 ingangen:



Met behulp van de stelling van Millman kunnen we  $v_p$  immers eenvoudig schrijven als:

$$v_p = \frac{G_3 v_{INa} + G_3 v_{INb} + G_3 v_{INc}}{3G_3} = \frac{1}{3} (v_{INa} + v_{INb} + v_{INc})$$

met  $G_3 = 1/R_3$ , waardoor

$$v_{OUT} = \frac{R_1 + R_2}{3R_1} (v_{INa} + v_{INb} + v_{INc}) \quad Z_i = \frac{3}{2}R_3 \quad Z_o = 0$$

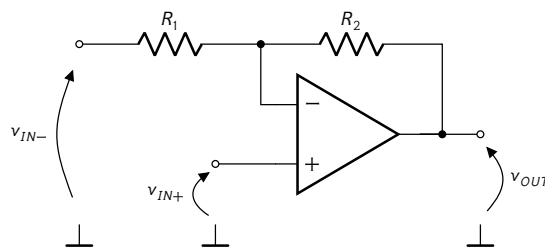
waarbij we bij het bepalen van de ingangsimpedantie weer uitgaan van het kortsluiten van de andere ingangen met de grond. Niets nieuws onder de zon.

### Opmerkingen

1. Je kan vanzelfsprekend ook een inverterende somversterker maken met specifieke gewichten (een gewogen somversterker dus). Reken zelf de versterkingsformule uit door de ingangsweerstanden niet gelijk te veronderstellen, dus:  $R_{1a} \neq R_{1b} \neq \dots$
2. Hetzelfde geldt voor de niet-inverterende somversterker. Doe zelf het rekenwerk. In de oefeningen zal je het kunnen gebruiken!

### 7.2.4 Verschilversterkers

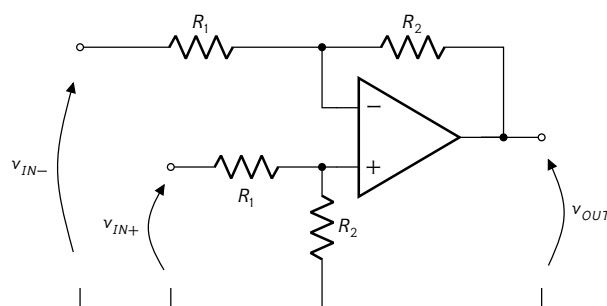
Het combineren van de inverterende en niet-inverterende versterker (door te denken in termen van superpositie), leidt tot de volgende eenvoudige configuratie:



Op basis van superpositie komen we tot de vaststelling:

$$v_{OUT} = \frac{R_2 + R_1}{R_1} v_{IN+} - \frac{R_2}{R_1} v_{IN-}$$

We berekenen duidelijk een verschil, maar de gewichten van de twee termen zijn niet gelijk. De versterking van het positieve signaalpad is groter dan de versterking van het negatieve signaalpad: we kunnen dit oplossen door in die term een extra verzwakking  $\frac{R_2}{R_2+R_1}$  toe te voegen. Dit kan met een potentiometrische deler die we aansluiten op de positieve klem van de opamp, zoals hieronder aangegeven.



We krijgen dan:

$$v_{OUT} = \underbrace{\frac{R_2}{R_1 + R_2}}_{\text{deler}} \frac{R_2 + R_1}{R_1} \cdot v_{IN+} - \frac{R_2}{R_1} v_{IN-} = \frac{R_2}{R_1} (v_{IN+} - v_{IN-})$$

---

## Oefeningen

**Oefening 7.2.4-1:** Ontwerp een inverterende opampversterker met een spanningsversterking van 30 dB en een ingangsimpedantie van minstens 10 k $\Omega$ .

**Oefening 7.2.4-2:** Ontwerp een niet-inverterende opampversterker met een spanningsversterking van 50 dB en een ingangsimpedantie van 75  $\Omega$ .

**Oefening 7.2.4-3:** Ontwerp een inverterende somversterker met gewichten  $-5/4$ ,  $-1/2$  en  $-3$ . Zorg ervoor dat de ingangsimpedantie voor elk van de ingangen minstens 4.7 k $\Omega$  bedraagt.

**Oefening 7.2.4-4:** Ontwerp een niet-inverterende somversterker met gewichten  $3/8$ ,  $5/3$  en  $2$  met als minimale ingangsimpedantie 5 k $\Omega$ .

## 7.2.5 Comparatoren

Comparatoren vergelijken eeningangssignaal met een specifieke waarde. Deze waarde kan een DC-niveau zijn of een signaal dat op zich functie is van de tijd. Voor de eenvoud gaan we hier uit van een DC-niveau.

Comparatoren maken geen gebruik meer van negatieve feedback, waardoor de ingangsklemmen van de opamp niet meer op dezelfde potentiaal gehouden worden. De opamp zal zich dus doorgaans in saturatie bevinden, m.a.w. de uitgang is begrensd door de voedingsspanning van de opamp: hoog  $V^+$  en laag  $V^-$ .

We onderscheiden twee soorten comparatoren:

- zonder hysteresis, d.w.z. zonder beveiliging tegen klapperen
- met hysteresis, d.w.z. met beveiliging tegen klapperen

Klapperen is de prozaïsche term die we gebruiken voor het fenomeen dat optreedt indien kleine veelvuldige passages van het signaal langs het referentieniveau ervoor zorgt dat de uitgang van de comparator snel blijft omklappen.

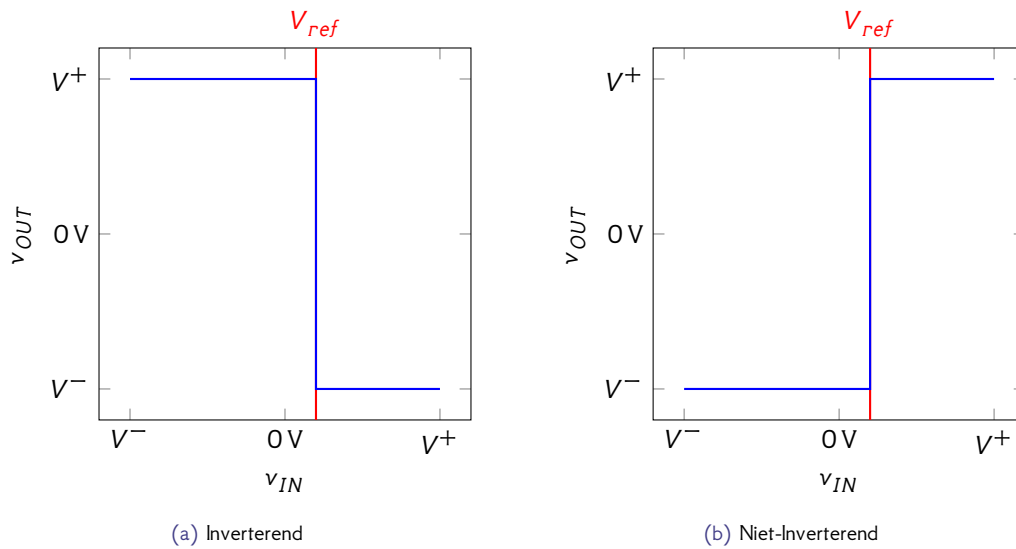
### 7.2.5.1 Zonder hysteresis - triggers

**Inverterende comparator** De meest eenvoudige inverterende comparator is een opamp, waarbij we de positieve klem op het referentieniveau  $V_{ref}$  plaatsen en hetingangssignaal op de negatieve klem (zie Figuur 7.8a). Dit referentieniveau (ook wel klapspanning genoemd) wordt courant van de voedingsspanning afgeleid met een potentiometrische deler. De tijddomeinrelatie van Figuur 7.10a illustreert het gedrag van deze comparator. De uitgangsspanningsniveaus zijn bepaald door de voedingspotentialen van de opamp. We veronderstelden in dit geval  $V^+ = -V^-$ .

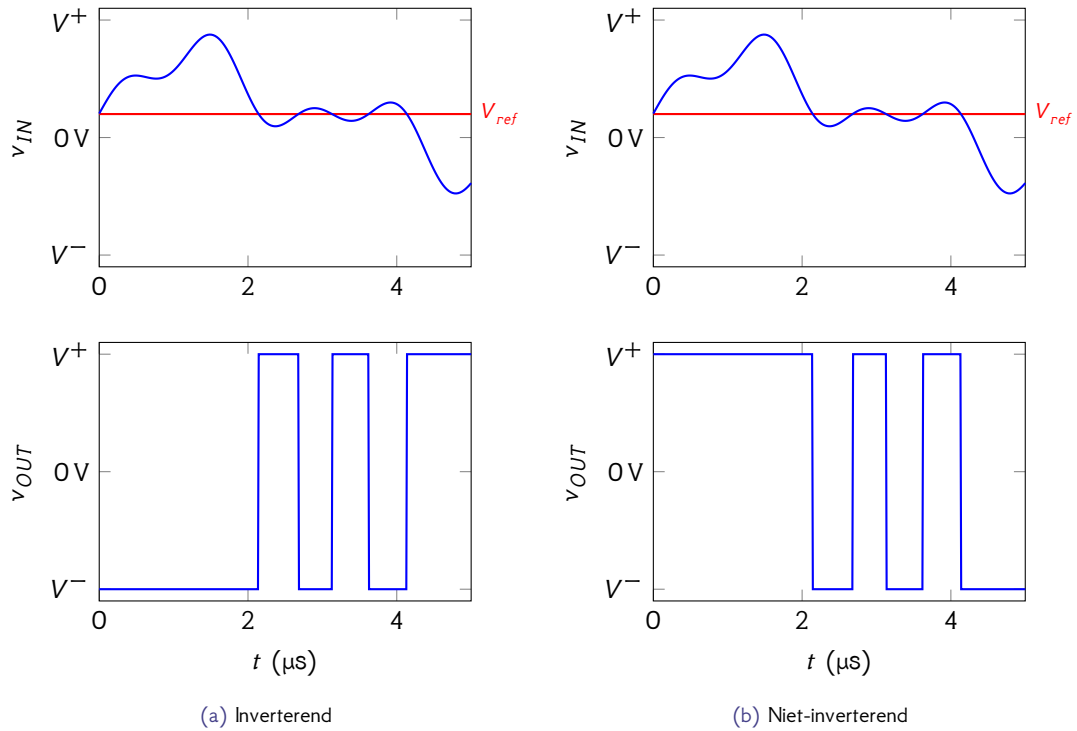
**Niet-inverterende comparator** Door de ingangsklemmen van de opamp om te wisselen, krijgen we een niet-inverterende comparator (zie Figuur 7.8b).



Figuur 7.8: Comparatoren zonder hysteresis



Figuur 7.9: Overdrachtskarakteristieken van comparatoren zonder hysteresis



Figuur 7.10: Illustratie in het tijd domein van comparatoren zonder hysteresis

### 7.2.5.2 Met hysteresis — Schmitt triggers

**Inverterende Schmitt trigger** De meest eenvoudige inverterende comparator met hysteresis is een opamp, waarbij we positieve feedback voorzien naar de positieve klem m.b.v. een sommatoren tussen de uitgang en het referentieniveau.

Op deze manier wordt de spanning op de positieve klem van de opamp mee bepaald door de actuele toestand van de uitgang.

We onderscheiden twee gevallen:

- $v_{OUT} = V^+$ :

$$v_p \stackrel{(MM)}{=} \frac{G_1 V_{ref} + G_2 V^+}{G_1 + G_2} = \frac{R_2 V_{ref} + R_1 V^+}{R_1 + R_2} = \underbrace{\frac{R_2 V_{ref}}{R_1 + R_2}}_{V'_{ref}} + \underbrace{\frac{R_1 V^+}{R_1 + R_2}}_{\Delta^+}$$

- $v_{OUT} = V^-$ :

$$v_p \stackrel{(MM)}{=} \frac{G_1 V_{ref} + G_2 V^-}{G_1 + G_2} = \frac{R_2 V_{ref} + R_1 V^-}{R_1 + R_2} = \underbrace{\frac{R_2 V_{ref}}{R_1 + R_2}}_{V'_{ref}} + \underbrace{\frac{R_1 V^-}{R_1 + R_2}}_{\Delta^-}$$

waarbij we veronderstellen dat  $G_i = 1/R_i$ .

Aangezien deingangsspanning  $v_{IN}$  die op de negatieve klem staat met deze spanning wordt vergeleken, is het ook de klapspanning van de comparator. Merk op dat de klapspanning bij lage output ( $V^-$ ) lager ligt dan bij hoge output ( $V^+$ ). Als vuistregel kunnen we immers doorgaans stellen dat  $V^- = -V^+$ .

Samengevat zijn de klapspanning  $V_L$  (waarbij de uitgang van laag naar hoog gaat) en de klapspanning  $V_H$  (waarbij de uitgang van hoog naar laag gaat) gelijk aan:

$$\begin{aligned} V_L &= V'_{ref} + \Delta^- \\ V_H &= V'_{ref} + \Delta^+ \end{aligned}$$

met

$$\begin{aligned} V'_{ref} &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{ref} \\ \Delta^- &= \frac{R_1}{R_1 + R_2} V^- \\ \Delta^+ &= \frac{R_1}{R_1 + R_2} V^+ \end{aligned}$$

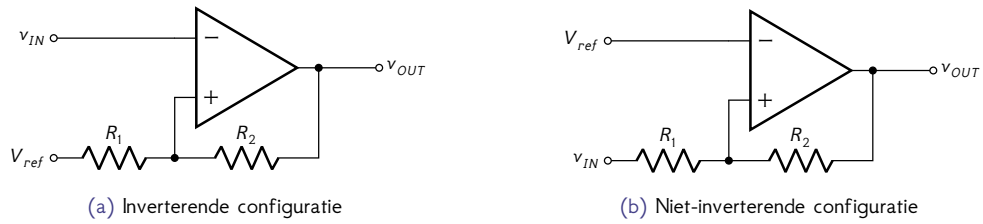
Dat verklaart de overdrachtskarakteristiek van Figuur 7.12a.

**Niet-inverterende Schmitt trigger** Door de rol vaningangsspanning en referentiespanning om te wisselen, krijgen we de niet-inverterende Schmitt-trigger (zie Figuur 7.11b). We voorzien opnieuw positieve feedback naar de positieve ingangsklem van de opamp m.b.v. een sommatoren tussen de uitgang en de ingang.

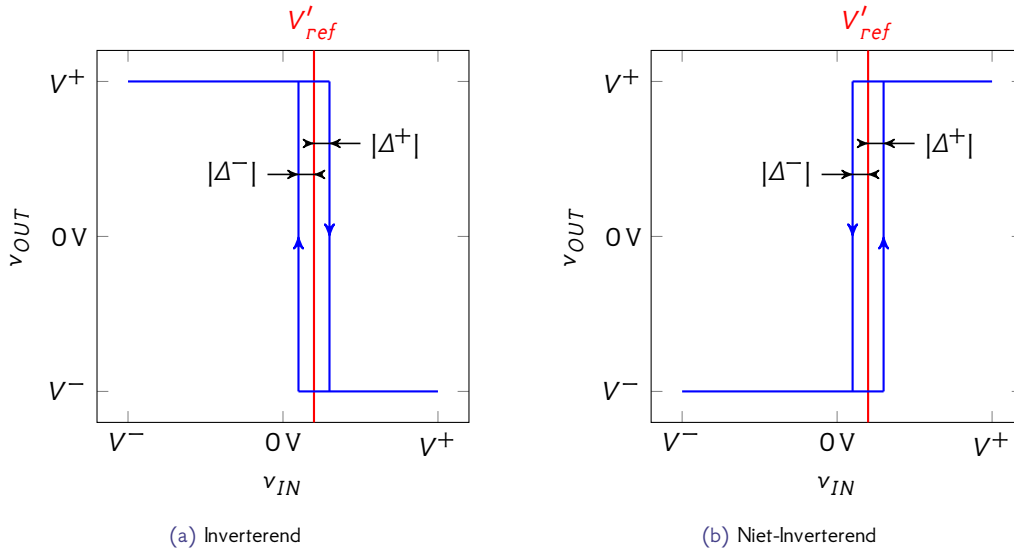
Op de positieve klem van de opamp komt nu een spanning  $v_p$  te staan i.f.v. het actuele uitgangsniveau van de opamp en de actuele ingang:

- $v_{OUT} = V^+$ :

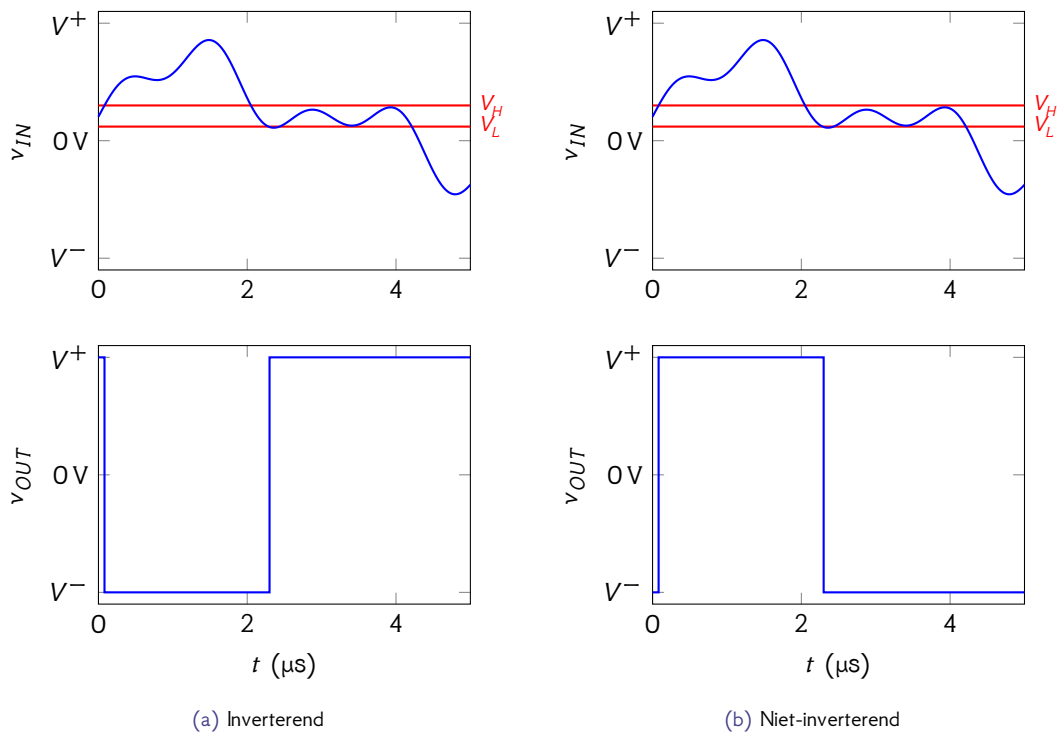
$$v_p \stackrel{(MM)}{=} \frac{G_1 v_{IN} + G_2 V^+}{G_1 + G_2} = \frac{R_2 v_{IN} + R_1 V^+}{R_1 + R_2} = \frac{R_2 v_{IN}}{R_1 + R_2} + \frac{R_1 V^+}{R_1 + R_2}$$



Figuur 7.11: Comparatoren met hysteresis



Figuur 7.12: Overdrachtskarakteristieken van comparatoren met hysteresis



Figuur 7.13: Illustratie in het tijd domein van comparatoren met hysteresis

- $v_{OUT} = V^-$ :

$$v_p \stackrel{(MM)}{=} \frac{G_1 v_{IN} + G_2 V^-}{G_1 + G_2} = \frac{R_2 v_{IN} + R_1 V^-}{R_1 + R_2} = \frac{R_2 v_{IN}}{R_1 + R_2} + \frac{R_1 V^-}{R_1 + R_2}$$

waarbij we veronderstellen  $G_i = 1/R_i$ .

De comparator vergelijkt deze spanning (op zijn positieve klem) met het referentieniveau  $V_{ref}$  (op de negatieve klem). Door  $v_p = V_{ref}$  te stellen kunnen we uit de twee bovenstaande vergelijkingen  $v_{IN}$  oplossen.

We krijgen op die manier ook twee klapspanningen:

$$\begin{aligned} V_L &= V'_{ref} + \Delta^- \\ V_H &= V'_{ref} + \Delta^+ \end{aligned}$$

met

$$\begin{aligned} V'_{ref} &= \frac{R_1 + R_2}{R_2} V_{ref} \\ \Delta^- &= -\frac{R_1}{R_2} V^+ \\ \Delta^+ &= -\frac{R_1}{R_2} V^- \end{aligned}$$

Dat verklaart de overdrachtskarakteristiek van Figuur 7.12b.

### 7.2.6 Integrator en differentiator

Een integrator is een netwerk dat de integraal  $y(t)$  van een signaal  $x(t)$  berekent:

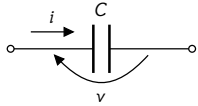
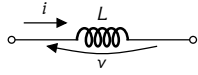
$$y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$$

Een differentiator is een netwerk dat de afgeleide  $y(t)$  van een signaal  $x(t)$  berekent:

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

Laten we veronderstellen dat zowel het ingangs- als uitgangssignaal een spanning is. Het geval waarbij het stromen zijn (of een mengvorm) laten we over aan de enthousiaste lezer.

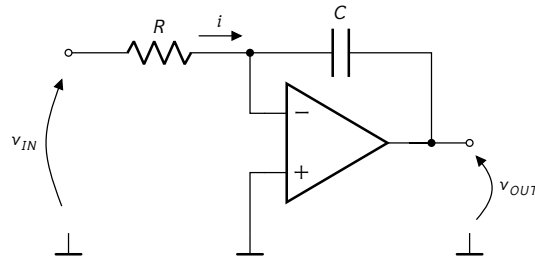
We hebben twee passieve elementen die in hun takrelatie een afgeleide/integraal hebben, nl. de condensator en de spoel:

	
$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$	$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$
$\Downarrow$ $v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + v(0)$	$\Downarrow$ $i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v(\tau) d\tau + i(0)$

Door deze in te passen in een stroom-spannings- of spannings-stroomomzetter (zie sectie 7.2.2), kunnen we verschillende mogelijke integratoren en differentiatoren maken:

## Integrator

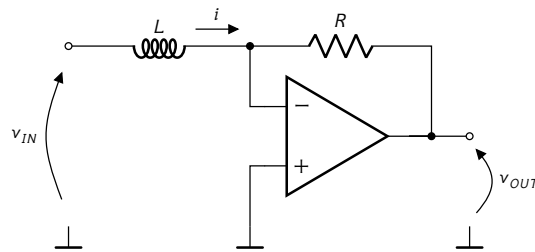
## Met een condensator



Op basis van onze kennis van opamps in negatieve terugkoppeling, concluderen we dat de negatieve klem van de opamp omwille van het equipotentiaaleffect op de referentiepotentiaal staat (zolang de opamp niet gesatureerd is). Dat leidt tot de volgende eenvoudige afleiding:

$$\left. \begin{aligned} i(t) &= \frac{v_{IN}(t)}{R} \\ v_{OUT}(t) &= -\frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_{OUT}(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t v_{IN}(\tau) d\tau$$

## Met een spoel



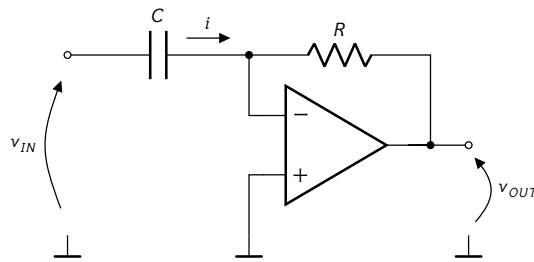
Op gelijkaardige wijze vinden we de uitdrukking:

$$\left. \begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{L} \int_0^t v_{IN}(\tau) d\tau \\ v_{OUT}(t) &= -Ri(t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_{OUT} = -\frac{R}{L} \int_0^t v_{IN}(\tau) d\tau$$

Helaas gaat deze integrator de opamp in verzadiging sturen indien er een kleine DC-offset op de ingangsspanning zit. We lossen dit doorgaans op door parallel over de condensator, of in serie met de spoel een weerstand te plaatsen.

## Differentiator

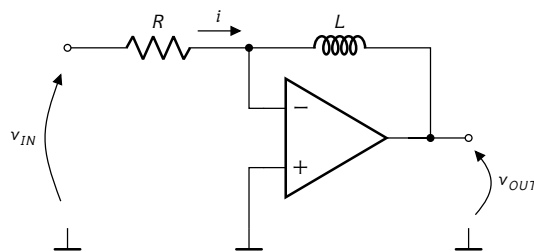
## Met een condensator



Op gelijkaardige wijze vinden we de uitdrukking:

$$\left. \begin{aligned} i(t) &= C \frac{dv_{IN}(t)}{dt} \\ v_{OUT}(t) &= -Ri(t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_{OUT}(t) = -RC \frac{dv_{IN}(t)}{dt}$$

Met een spoel



Op gelijkaardige wijze vinden we de uitdrukking:

$$\left. \begin{aligned} i(t) &= \frac{v_{IN}(t)}{R} \\ v_{OUT}(t) &= -L \frac{di(t)}{dt} \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_{OUT}(t) = -\frac{L}{R} \frac{dv_{IN}(t)}{dt}$$

Doorgaans gebruiken we geen differentiatoren omdat ze de ruis (d.w.z. kleine fluctuaties op een signaal) geweldig versterken. Een integrator heeft als effect dat de ruis wordt uitgemiddeld en geniet daarom de voorkeur.

### Oefeningen

**Oefening 7.2.6-1:** Ontwerp een inverterende comparator met als klapspanning 3 V indien je een voedingsspanning ter beschikking hebt van  $\pm 10$  V. Leid de referentiespanning af van de voedingsspanning m.b.v. een potentiometrische deler.

**Oefening 7.2.6-2:** Ontwerp een niet-inverterende comparator met als klapspanning 2 V indien je een voedingsspanning ter beschikking hebt van  $\pm 5$  V.

Extra: leid de referentiespanning af van de voedingsspanning m.b.v. een potentiometrische deler.

**Oefening 7.2.6-3:** Ontwerp een inverterende comparator met hysteresis met als klapspanningen

$$V_L = 0.25 \text{ V}$$

$$V_H = 1 \text{ V}$$

Ga uit van een voedingsspanning van  $\pm 3$  V.

Leid de referentiespanning af van de voedingsspanning m.b.v. een potentiometrische deler. Zorg ervoor dat de comparator minimaal een ingangsimpedantie heeft van 4.7 k $\Omega$ .

Oefening 7.2.6-4: Ontwerp een niet inverterende comparator met hysteresis met als klapspanningen

$$V_L = 1\text{ V}$$

$$V_H = 2\text{ V}$$

Ga uit van een enkelzijdige voedingsspanning 5 V.

Leid de referentiespanning af van de voedingsspanning m.b.v. een potentiometrische deler. Zorg ervoor dat de comparator minimaal een ingangsimpedantie heeft van 10 k $\Omega$ .

### 7.3 Besluit

In dit hoofdstuk beschreven we heel wat netwerken vanuit het perspectief van het tijddomein. Je zal meer algemeen zien dat het gros van de netwerken uit dit hoofdstuk ook perfect werken voor het frequentiedomein. Vanuit de universele bruikbaarheid loont het de moeite om ze grondig in te studeren. Alle beschrijvingen die we tot nog toe zagen zijn zonder meer ook bruikbaar in frequentiedomeintoepassingen (bv. voor analoge telecommunicatiesystemen). Ze zijn eenvoudigweg niet frequentieselectief.

De uitzondering op deze regel zijn:

- de comparatoren: waarvoor geen eenvoudige frequentiedomeinbeschrijving mogelijk is, omdat ze niet-lineair zijn,
- de integrator en de differentiator: omdat ze wel frequentieselectief zijn.

Met de laatste twee netwerken (de differentiator en de integrator) komen we op de grens met het volgende hoofdstuk. Ze kunnen immers ook in het frequentiedomein beschreven worden. Ze vormen ons aanknopingspunt om in het volgende hoofdstuk filters en oscillatoren te verkennen.



---

## Overzicht

8.1	Inleiding . . . . .	158
8.2	Types filters . . . . .	158
8.3	Frequentie-afhankelijke impedanties . . . . .	161
8.4	Bode-diagrammen schetsen . . . . .	167
8.5	Filtercascades . . . . .	174
8.6	Passieve filters . . . . .	175
8.7	Actieve filters . . . . .	176
8.7.1	Basisprincipe . . . . .	176
8.7.2	Impedantieschaling . . . . .	178
8.7.3	Biquad filters . . . . .	178
8.7.4	Biquad filter met negatieve feedback . . . . .	180
8.7.5	Biquad filter met positieve feedback . . . . .	181
8.7.6	Ontwerpstrategie . . . . .	186
8.8	Besluit . . . . .	191

In dit hoofdstuk bestuderen we het gedrag van filters. We blijven ons beperken tot netwerken met ideale elementen. Aangezien filters erop gericht zijn selectief frequenties te versterken of te verzwakken zal de analyse zich voornamelijk in het frequentiedomein afspelen.

Opnieuw is het zo dat we bij de studie van deze netwerken geen rekening moeten houden met de niet-idealiteiten van reële componenten, wat ons toelaat de analyse eenvoudig te houden en zo tot de essentie van hun werking door te dringen.

Een goed begrip van de ideale werking van deze netwerken is het fundament om later een goed begrip te krijgen van reële schakelingen, waarbij we dan heel duidelijk kunnen zien welke invloed de niet-idealiteiten hebben op het gedrag. Het geeft ons ook een 'baseline', d.w.z. een idee van wat we maximaal uit een reële schakeling kunnen halen.

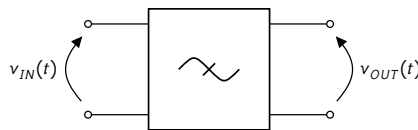
Het feit dat we alle niet-idealiteiten weglaten, zorgt er ook voor dat weinig van de netwerken die we in dit hoofdstuk behandelen zullen werken zoals hier beschreven. In sommige gevallen zullen de overeenkomstige schakelingen zonder de nodige aanpassingen zelfs helemaal niet werken! Enige bescheidenheid is ook na het afronden van dit hoofdstuk dus aan de orde.

## 8.1 Inleiding

Filters zijn netwerken die het frequentiespectrum van een signaal wijzigen, d.w.z. versterken of verzwakken en vertragen, en dat frequentie-afhankelijk. Anders gesteld: we gebruiken filters om specifieke stukken uit het spectrum te selecteren of te onderdrukken. De integrator en differentiator uit de vorige sectie waren eigenlijk al voorbeelden van dergelijke filters. De integrator versterkt lage frequenties meer dan hoge frequenties. De differentiator doet het omgekeerde.

Dit hoofdstuk geeft je een idee hoe je filters analyseert en ontwerpt. Deze eerste kennismaking is een goede basis om je later (wanneer nodig) verder te bekwamen in het analog filterontwerp, bv. aan de hand van [Dar76].

We stellen een algemeen filter voor als een tweepoort:



Aangezien een filter het frequentiespectrum van een signaal wijzigt, heeft het zin deze te beschrijven in het frequentiedomein m.b.v. een frequentie karakteristiek  $H(s)$  waarbij

$$V_{out}(s) = H(s) \cdot V_{in}(s)$$

De veranderlijke  $s$  is opnieuw de verkorte notatie van onze complexe frequentievariabele  $j\omega$ . De bovenstaande uitdrukking betekent dat elke frequentie met een andere versterking wordt omgezet in de uitgang, omdat  $H$  afhangt van de frequentie. We noemen  $H$  ook wel de transferfunctie van het filter. Het frequentiespectrum dat ermee overeenkomt, noemen we vaak de filterkarakteristiek.

Men kan aantonen dat voor lineaire filters die hun gedrag niet wijzigen in de tijd, deze  $H(s)$  kan geschreven worden als een rationale functie van  $s$ , d.w.z. als een verhouding van twee veeltermen in  $s$  (met reële coëfficiënten):

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Deze veeltermen kunnen gefactoriseerd worden door de nulpunten van de teller (die we kort nullen noemen) en de nulpunten van de noemer (die we kort polen noemen) te bepalen. Op die manier kunnen we de filterkarakteristiek als volgt schrijven:

$$H(s) = K \frac{(s - n_1)(s - n_2) \cdots (s - n_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$$

waarbij  $n_i$  de nulpunten zijn en  $p_i$  de polen en  $K$  een reëel getal. Het is eenvoudig aan te tonen dat polen en nullen ofwel reëel zijn of anders in complex toegevoegde paren voorkomen. De essentie van filterontwerp is om deze nullen en polen zo te kiezen dat een specifiek filtereffect bereikt wordt.

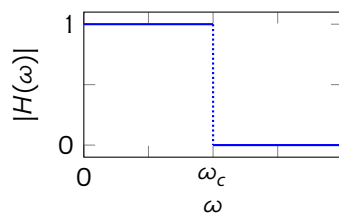
## 8.2 Types filters

We delen de filters in volgens standaard-types. We doen dit eerst in een ideale wereld (zoals we het graag zouden hebben). Helaas zijn onze dromen geen werkelijkheid en moeten we deze ideale filterkarakteristieken benaderen, zo goed als we kunnen. Zo komen we tot reële filters.

### Ideale filters

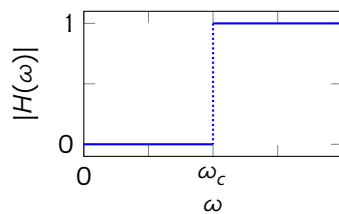
We onderscheiden als basistypes de onderstaande ideale filters:

Laagdoorlaatfilter:



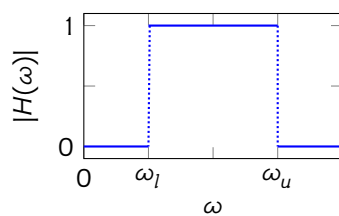
laat lage frequenties ( $\omega \leq \omega_c$ ) ongehinderd door en blokkeert hoge frequenties

Hoogdoorlaatfilter:



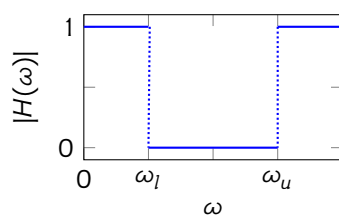
laat hoge frequenties ( $\omega \geq \omega_c$ ) ongehinderd door en blokkeert lage frequenties

Banddoorlaatfilter:



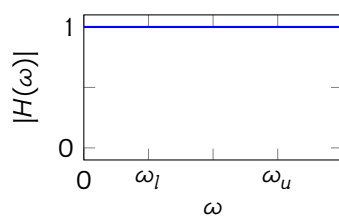
laat enkel de frequenties in een specifiek frequentiebereik ( $[\omega_l, \omega_u]$ ) door en blokkeert alle andere frequenties

Bandstopfilter:



laat alle frequenties door behalve diegene in een specifiek frequentiebereik ( $[\omega_l, \omega_u]$ )

Fasecorrectiefilter:

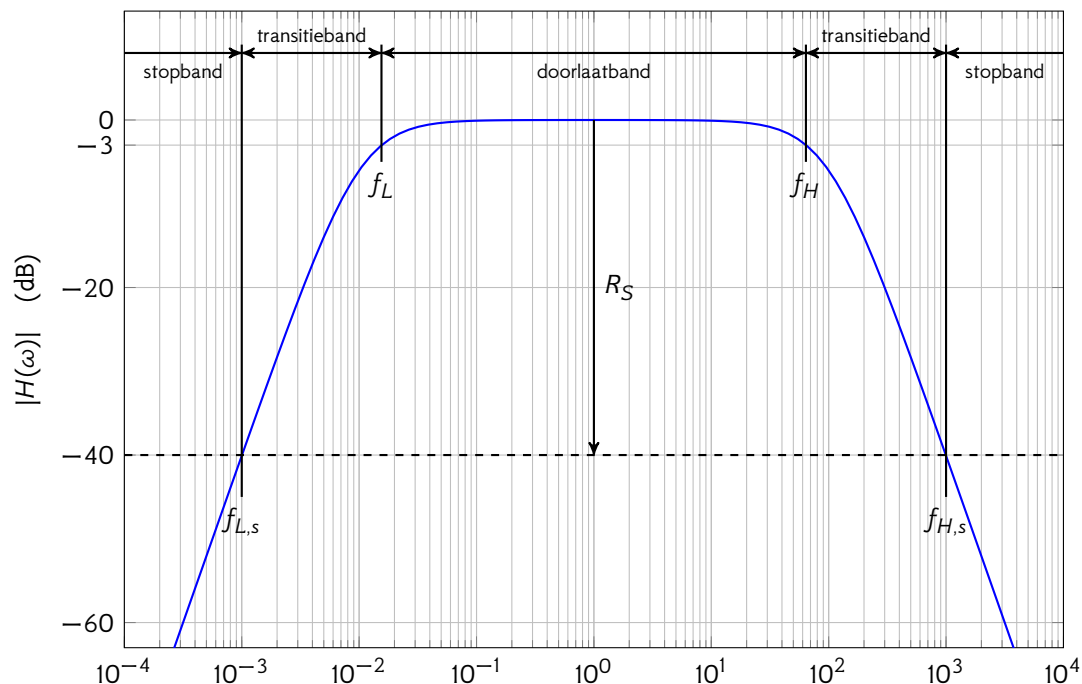


laat alle frequenties door (en beïnvloedt enkel het fasegedrag)

Deze ideale filters zoals hierboven geïllustreerd kunnen we in de praktijk nooit realiseren. De overgang tussen doorlaatband en stopband kan nooit oneindig steil zijn. Het is fysisch enkel mogelijk om een overgang te maken met een zekere helling.

### Reële filters

Als voorbeeld van een reële filterkarakteristiek nemen we de magnitudekarakteristiek van een banddoorlaatfilter. Die laat toe om de belangrijkste begrippen van zo'n filterkarakteristiek te definiëren.



Figuur 8.1: Voorbeeld van een reële filterkarakteristiek met aanduiding van enkele basisbegrippen

De doorlaatband kantel- of hoekfrequenties  $f_L$  en  $f_H$  zijn de frequenties waarbij de versterking exact  $1/\sqrt{2}$  bedraagt (wat overeenkomt met  $-3$  dB) van de maximale versterking in de doorlaatband. We noemen de hoekfrequenties dan ook frequent de  $-3$  dB-frequenties. De doorlaatband is het frequentiebereik tussen deze kantel- of hoekfrequenties, waarin het filter het signaal gewoon doorlaat. De grootte van de doorlaatband (nl.  $f_H - f_L$ ), noemen we de bandbreedte van het filter. De stopband is gedefinieerd i.f.v. een gekozen stopbandonderdrukking  $R_S$  (op de tekening  $-40$  dB)<sup>1</sup> Waar de versterking dit stopbandniveau snijdt, hebben we de stopband kantel- of hoekfrequenties  $f_{L,s}$  en  $f_{H,s}$ , die op hun beurt weer aanleiding geven tot een duidelijke definitie van het begrip stopband: het frequentiebereik waarin de versterking onder de stopbandonderdrukking ligt. De overgang tussen de doorlaatband en de stopband, noemen we de transitieband. De helling van de filterkarakteristiek in die transitieband, noemen we de roll-off. Deze helling ligt voor analoge filters steeds bij een veelvoud van  $\pm 20$  dB/dec of  $\pm 6$  dB/oct. De eenheid dec staat voor decade en wil een factor 10 zeggen. De eenheid oct staat voor een octaaf en wil een factor 2 zeggen. Een helling van  $20$  dB/dec wil dus zeggen dat er per vertienvoudiging van de frequentie  $20$  dB bijkomt. Een helling van  $-6$  dB/oct wil zeggen dat er per verdubbeling van de frequentie  $6$  dB afgaat.

Heel wat wetenschappers (zie Figuur 8.2) hebben bijgedragen tot het opstellen van realiseerbare frequentiekaarakteristieken en gaven hun naam aan de klassieke filtervarianten:

- Butterworth filter: filter met een maximaal vlak magnitudeverloop in de doorlaatband
- Bessel filter: filter met een maximaal lineair faseverloop
- Chebyshev filter: filter met een steilere overgang tussen doorlaatband en stopband, ten koste van rimpel<sup>2</sup> in de doorlaatband (type I) of de stopband (type II)
- Cauer of elliptisch filter: filter met een nog steilere overgang tussen doorlaatband en stopband, ten koste van rimpel in de doorlaatband én de stopband

<sup>1</sup>Soms wordt deze stopbandonderdrukking ook als absolute waarde gespecificeerd ( $40$  dB in het voorbeeld) omdat er meestal weinig verwarring mogelijk is.

<sup>2</sup>Een rimpel wil zeggen dat de magnitude op en neer gaat.

Voor de filters waarbij een rimpel wordt toegelaten, wordt de bandbreedte vaak ook gedefinieerd als het gebied waarbij de versterking niet onder de onderste rimpelgrens gaat.

We gaan niet dieper in op deze filterkarakteristieken. Vele bibliotheken zijn beschikbaar die toelaten hun transferfuncties te berekenen. Enkele voorbeelden:

- De signal processing toolbox van Matlab
- De signal processing package van Octave (open source)
- De scipy.signal package in python (open source)

### 8.3 Frequentie-afhankelijke impedanties

De werkpaarden om frequentieselectiviteit te realiseren, zijn de spoel en de condensator. We zetten de meest elementaire (passieve) netwerken kort op een rijtje:

- RC-netwerken
- RL-netwerken
- LC-netwerken

Het feit dat deze netwerken passief zijn, doet wel eens het misverstand rijzen dat ze geen vermogen verbruiken (omdat ze geen vermogen van de voeding van ons netwerk gebruiken, zoals een (actieve) versterker dat wel zou doen). We mogen echter niet vergeten dat de weerstanden in deze schakeling wel degelijk warmte dissiperen en dus een verlies aan signaalvermogen veroorzaken. Dat verklaart ook meteen waarom LC-netwerken (die geen energie dissiperen) onze bijzondere aandacht verdienen.

#### RC-netwerken

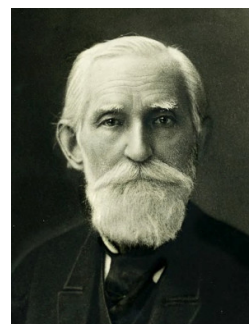
Het meest elementaire RC-netwerk is een serie- of parallelschakeling van een weerstand en een condensator. Het analyseren van de impedantie i.f.v. de frequentie kunnen we gemakkelijk uitvoeren m.b.v. onze rekentechniek met de variabele  $s = j\omega$ . Dit leidt tot het overzicht van Figuur 8.3. Als oefening kan de lezer eens proberen om dezelfde analyse te maken, maar dan voor de admittantie van de schakelingen. Merk op dat we de frequentie-afhankelijke impedantie voorstellen als Bode-diagram, d.w.z. als twee grafieken, nl. magnitude en fase. De frequentie-as is logaritmisch, de magnitude wordt op logaritmische schaal en de fase<sup>3</sup> op lineaire schaal getekend



(a) Stephen Butterworth  
(\*1885–†1958)



(b) Friedrich Bessel  
(\*1784 – †1846)



(c) Pafnuty Chebyshev  
(\*1821–†1894)



(d) Wilhelm Cauer  
(\*1900 – †1945)

Figuur 8.2: De vier grondleggers van de realiseerbare filterkarakteristieken

<sup>3</sup>We gebruiken hier een typische ingenieursnotatie met het hoeksymbool  $\angle Z$  om de fase (het argument) van het complexe getal

(zie Hoofdstuk 5).

Met een netwerk bestaande uit een weerstand met waarde  $R$  en een condensator met waarde  $C$  kunnen we steeds een tijdconstante  $\tau = RC$  associëren (zie ook sectie 4.3.1 op pagina 24). De frequentie horende bij die constante  $\omega_c = 1/RC$  is een cruciaal kantelpunt voor het RC-netwerk.

Voor een serieschakeling:

- $\omega \ll \omega_c$ : de schakeling gedraagt zich in essentie als een condensator met waarde  $C$
- $\omega \gg \omega_c$ : de schakeling gedraagt zich in essentie als een weerstand met waarde  $R$

Voor een parallelschakeling:

- $\omega \ll \omega_c$ : de schakeling gedraagt zich in essentie als een weerstand met waarde  $R$
- $\omega \gg \omega_c$ : de schakeling gedraagt zich in essentie als een condensator met waarde  $C$

**RL-netwerken** Het meest elementaire RL-netwerk is een serie- of parallelschakeling van een weerstand en een spoel. Het analyseren van de impedantie i.f.v. de frequentie kunnen we gemakkelijk uitvoeren m.b.v. onze rekentechniek met de variabele  $s = j\omega$ . Dit leidt tot het overzicht van Figuur 8.4.

Met een netwerk bestaande uit een weerstand met waarde  $R$  en een spoel met waarde  $L$  kunnen we steeds een tijdconstante  $\tau = L/R$  associëren (zie ook sectie 4.3.1 op pagina 24). De frequentie horende bij die constante  $\omega_c = R/L$  is een cruciaal kantelpunt voor het RL-netwerk.

Voor een serieschakeling:

- $\omega \ll \omega_c$ : de schakeling gedraagt zich in essentie als een weerstand met waarde  $R$
- $\omega \gg \omega_c$ : de schakeling gedraagt zich in essentie als een spoel met waarde  $L$

Voor een parallelschakeling:

- $\omega \ll \omega_c$ : de schakeling gedraagt zich in essentie als een spoel met waarde  $L$
- $\omega \gg \omega_c$ : de schakeling gedraagt zich in essentie als een weerstand met waarde  $R$

**LC-netwerken** Het meest elementaire LC-netwerk is een serie- of parallelschakeling van een spoel en een condensator. Het analyseren van de impedantie i.f.v. de frequentie kunnen we gemakkelijk uitvoeren m.b.v. onze rekentechniek met de variabele  $s = j\omega$ . Dit leidt tot het overzicht van Figuur 8.5.

Met een netwerk bestaande uit een spoel met waarde  $L$  en een condensator met waarde  $C$  kunnen we steeds een tijdconstante  $\tau = \sqrt{LC}$  associëren (zie ook sectie 4.3.1 op pagina 24). De frequentie horende bij die constante  $\omega_n = 1/\sqrt{LC}$  is een frequentie waarbij in het netwerk een natuurlijke resonantie optreedt (vandaar het subscript  $n$ ).

Voor een serieschakeling:

- $\omega \ll \omega_n$ : de schakeling gedraagt zich in essentie als een condensator met waarde  $C$
- $\omega \gg \omega_n$ : de schakeling gedraagt zich in essentie als een spoel met waarde  $L$

---

$Z$  aan te duiden, i.p.v.  $\arg Z$ , wat de correcte wiskundige notatie is.

Een bijzondere situatie treedt op bij de natuurlijke frequentie  $\omega_n = 1/\sqrt{LC}$ , want dan wordt de impedantie van de serieschakeling gelijk aan nul, m.a.w. ze gedraagt zich voor die frequentie als een kortsluiting!

$$Z(j\omega_n) = j\omega_n L + \frac{1}{j\omega_n C} = j\sqrt{\frac{L}{C}} + \frac{1}{j\sqrt{\frac{C}{L}}} = 0$$

Voor een parallelschakeling:

- $\omega \ll \omega_n$ : de schakeling gedraagt zich in essentie als een spoel met waarde  $L$
- $\omega \gg \omega_n$ : de schakeling gedraagt zich in essentie als een condensator met waarde  $C$

Opnieuw treedt bij de natuurlijke frequentie  $\omega_n = 1/\sqrt{LC}$  een bijzondere situatie op, want dan wordt de impedantie van de parallelschakeling oneindig, m.a.w. ze gedraagt zich voor die frequentie als een open keten!

$$Z(j\omega_n) = \frac{1}{j\omega_n C + \frac{1}{j\omega_n L}} = \frac{1}{j\sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{1}{j\sqrt{\frac{L}{C}}}} = \infty$$

Merk op dat de magnitudegrafieken van Figuur 8.5 pieken tot  $+\infty\text{dB}$  (rechts) en tot  $-\infty\text{dB}$  (links). De faseovergang is steeds abrupt van  $-90^\circ$  tot  $90^\circ$  en vice versa. In de praktijk is het realiseren van een zuivere LC-schakeling onmogelijk. De spoel zal immers steeds een zekere serieweerstand vertonen, en de condensator een niet-oneindige parallel-lekweerstand.

We bekijken deze situatie in de volgende paragraaf.

**RLC-netwerken** Bij het beschouwen van LC-netwerken met parasitaire weerstand, gaan we uit van het feit dat meestal de parasitaire serieweerstand van de spoel belangrijker is dan de parallelle lekweerstand van de condensator. Indien de lezer de onderstaande uiteenzetting begrijpt, is het een goede oefening om het andere uitgangspunt zelf uit te werken.

We passen opnieuw onze rekentechniek met de variabele  $s = j\omega$  toe, wat leidt tot het overzicht van Figuur 8.6.

Indien we kijken naar de uitdrukkingen voor  $Z$  dan kunnen we die steeds omvormen naar een standaarduitdrukking, die we de normaalvorm noemen:

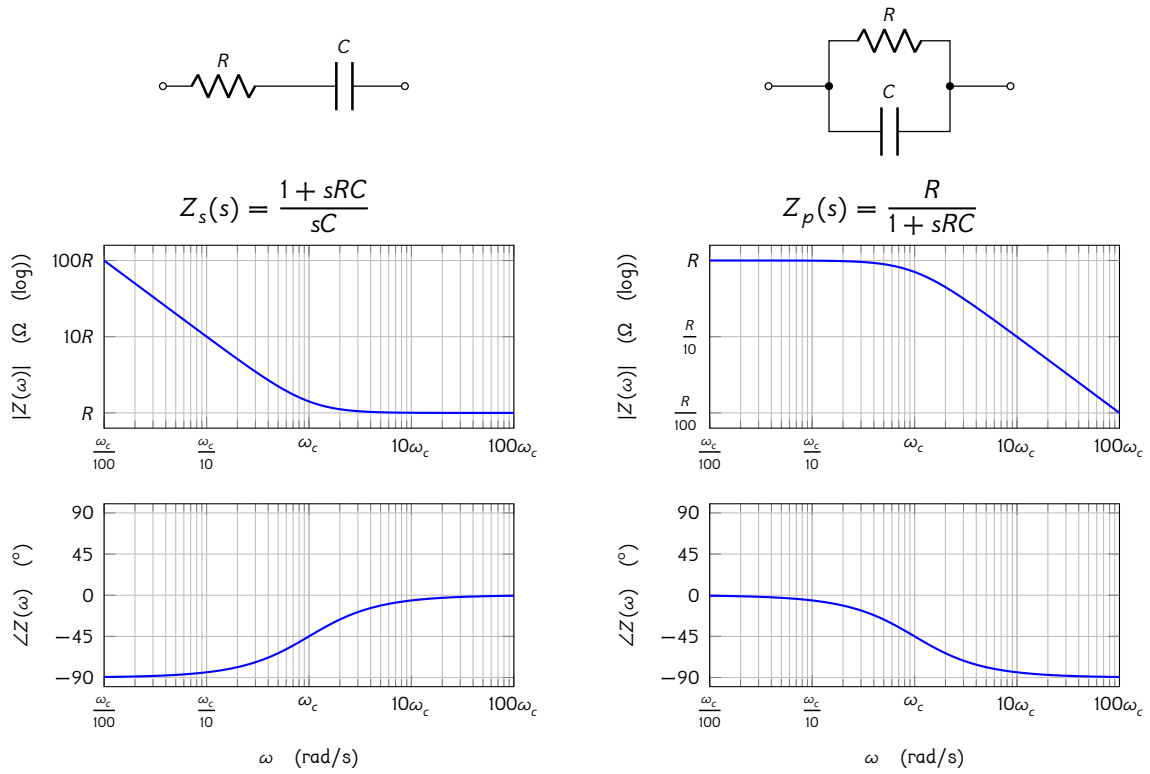
$$Z_s(s) = \frac{1 + sRC + s^2LC}{sC} = \cancel{L} \frac{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}{s\cancel{C}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{s^2 + R\sqrt{\frac{C}{L}} \frac{1}{\sqrt{LC}}s + \frac{1}{LC}}{\frac{1}{\sqrt{LC}}s} = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{s^2 + \frac{\omega_n}{Q}s + \omega_n^2}{\omega_n s}$$

$$Z_p(s) = \frac{R + sL}{1 + sRC + s^2LC} = \frac{1}{\cancel{L}C} \frac{s\cancel{L}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{\frac{s}{\sqrt{LC}}}{s^2 + R\sqrt{\frac{C}{L}} \frac{1}{\sqrt{LC}}s + \frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{\omega_n s}{s^2 + \frac{\omega_n}{Q}s + \omega_n^2}$$

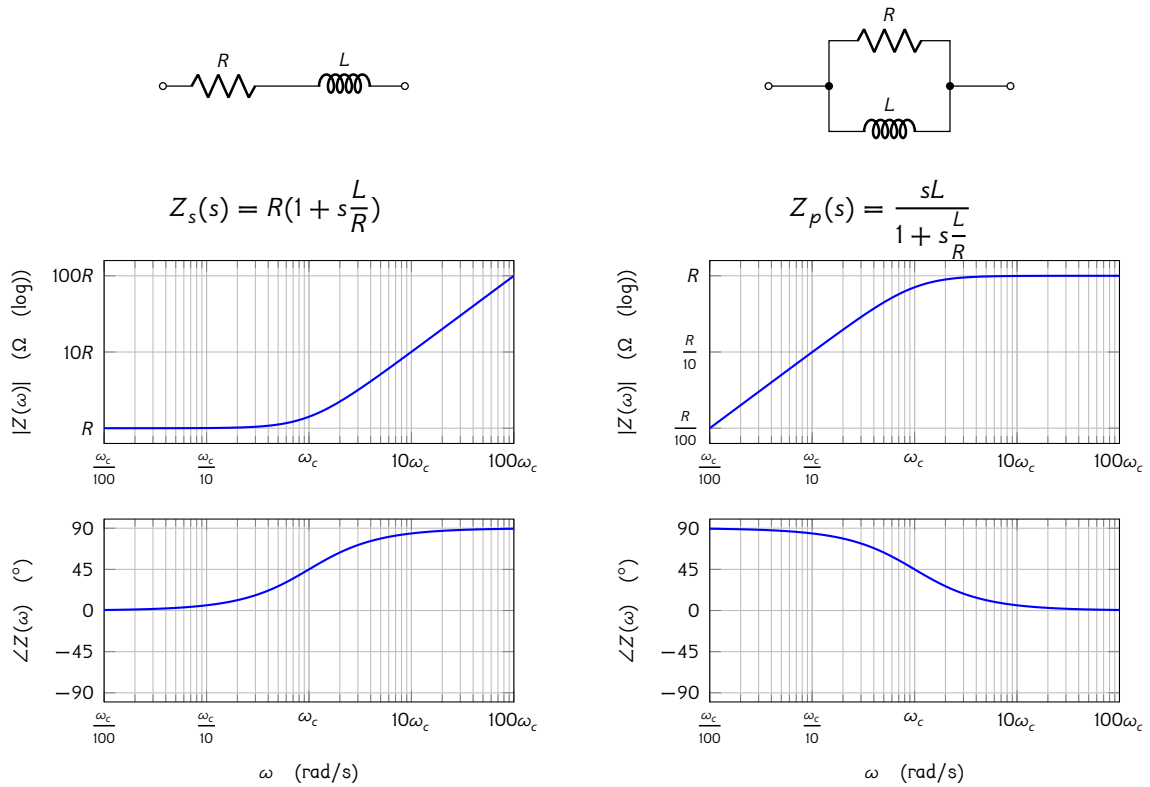
waarbij we veronderstelden dat de parasitaire weerstand  $R$  nooit dominant wordt t.o.v. de spoel met impedantie  $sL$ , m.a.w.  $|R| \ll |j\omega L|$  voor elke relevante  $\omega$ .

In de laatste stap van deze berekeningen, gebruikten we de volgende handige parameters:

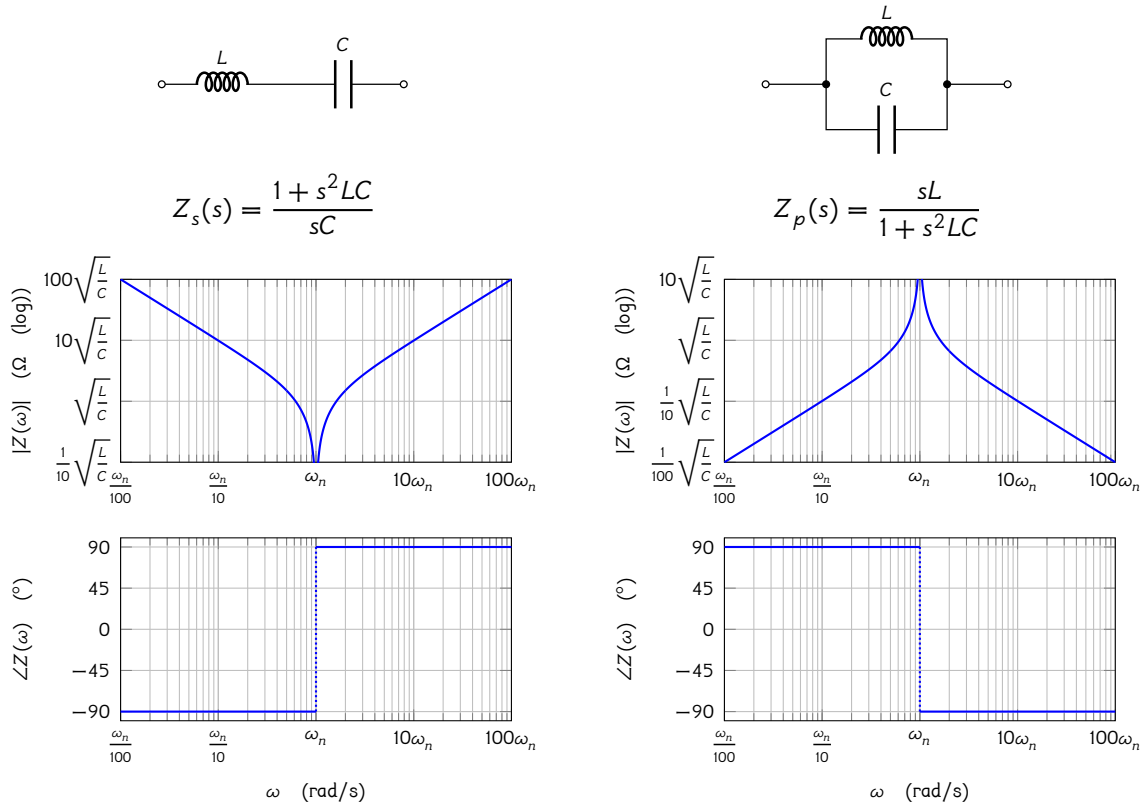
$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$



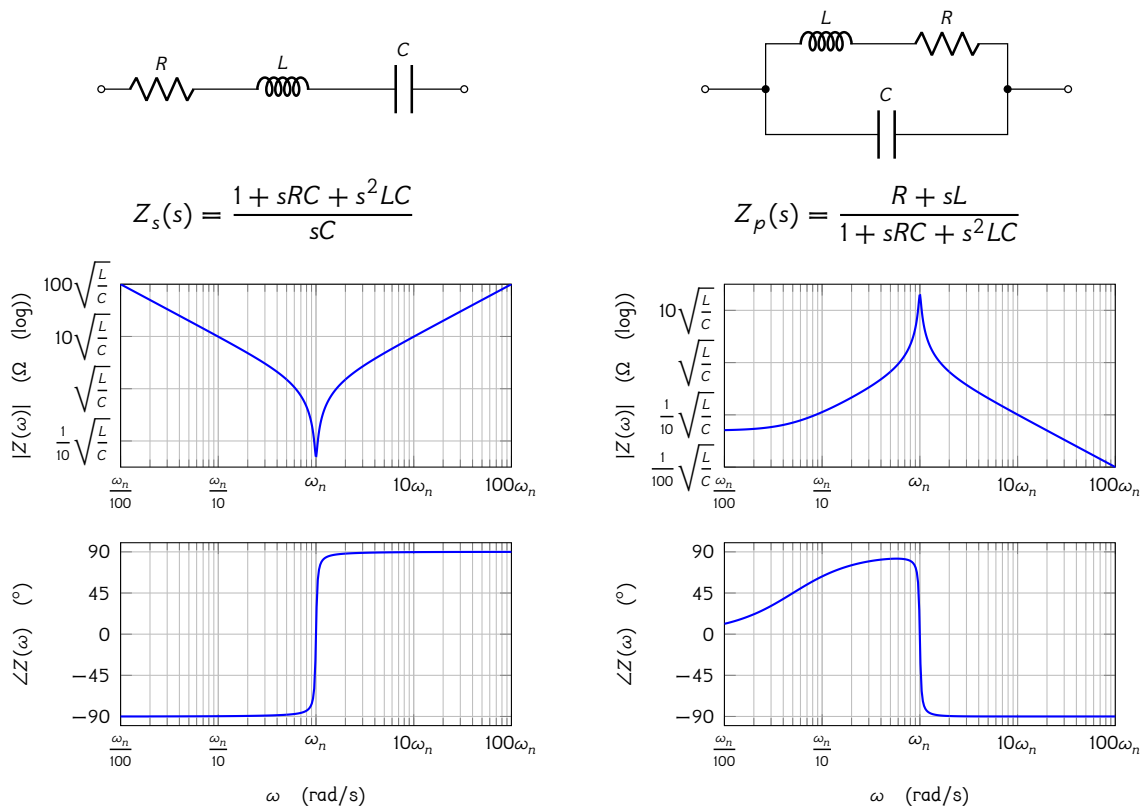
Figuur 8.3: Impedantieoverloop van RC-ketens i.f.v. de frequentie ( $\omega_c = 1/RC$ )



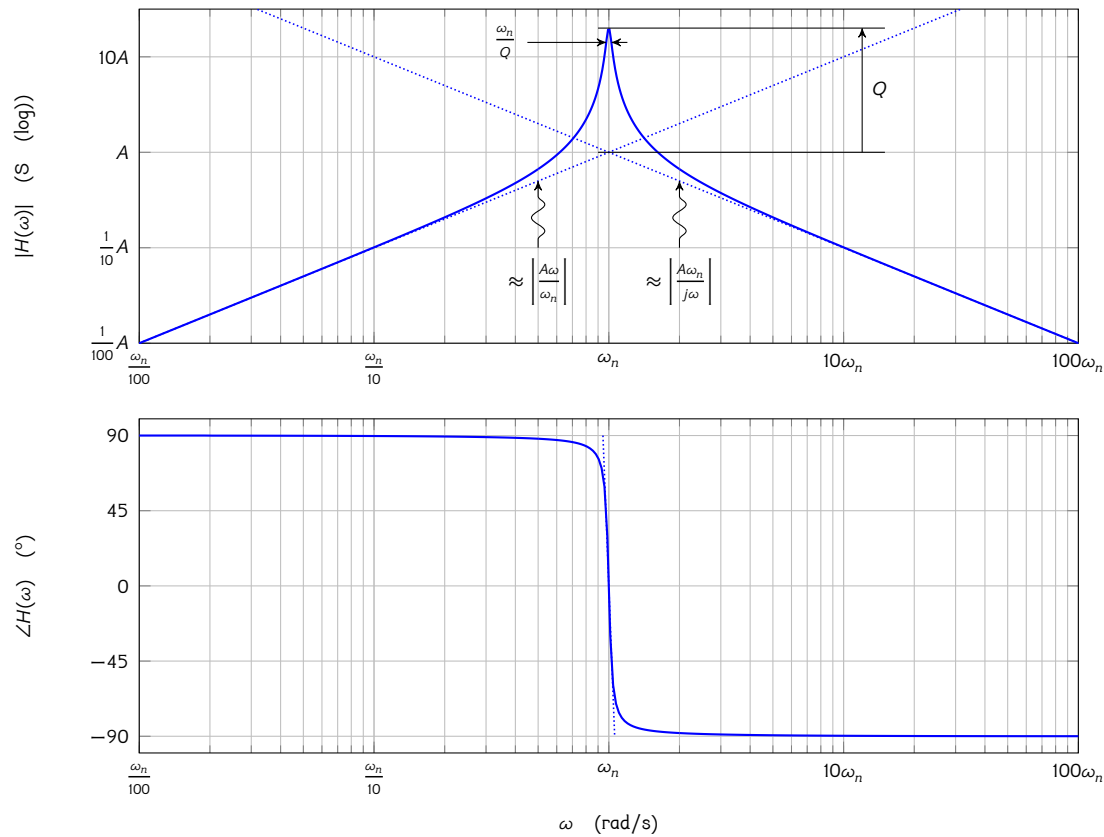
Figuur 8.4: Impedantieoverloop van RL-ketens i.f.v. de frequentie ( $\omega_c = R/L$ )



Figuur 8.5: Impedantieoverloop van LC-ketens i.f.v. de frequentie ( $\omega_c = 1/\sqrt{LC}$ )



Figuur 8.6: Impedantieoverloop van RLC-ketens i.f.v. de frequentie (met  $\omega_c = 1/\sqrt{LC}$  en Bode-diagrammen getekend voor  $Q = 20$  ( $R = \frac{1}{20}\sqrt{\frac{L}{C}}$ ))



Figuur 8.7: Bode-diagram van een parallel RLC-netwerk. De stippellijnen geven de asymptotische benaderingen weer (zie tekst).

We noemen  $\omega_n$  de natuurlijke resonantiefrequentie van de LC tank en  $Q$  de kwaliteitsfactor. Dit getal geeft de kwaliteit van de tank weer. Hoe kleiner de parasitaire weerstand  $R$  hoe beter de kwaliteit van de tank.

De kwaliteitsfactor vertaalt zich rechtstreeks in enkele concrete kenmerken van de impedantie van een LC-tank. We verklaren dit aan de hand van de volgende generische driving point<sup>4</sup> functie

$$H(s) = A \frac{\omega_n s}{s^2 + \frac{\omega_n}{Q} s + \omega_n^2}.$$

Het Bode-diagram van deze functie werd weergegeven in Figuur 8.7.

Je kan eenvoudig (zie oefeningen) de volgende zaken afleiden voor deze driving point functie:

- De twee asymptoten afkomstig van de condensator en de spoel snijden elkaar op de magnitudegrafiek bij  $\omega = \omega_n$  met als magnitude  $A$ .
- De verhouding van de magnitude van de piek t.o.v. de magnitude van het snijpunt van de twee asymptoten afkomstig van de condensator en de spoel, bedraagt exact  $Q$ .
- De bandbreedte van de piek (d.w.z. de afstand tussen de frequenties waarvoor de versterking  $1/\sqrt{2}$  ( $-3$  dB) lager ligt), bedraagt  $\omega_n/Q$ .
- De overgang in de fasegrafiek van  $90^\circ$  naar  $-90^\circ$  kan goed benaderd worden met een rechte met absolute hellingsgraad  $180Q^\circ/\text{dec}$ .

<sup>4</sup>Driving point functies zijn een generische naam voor een impedantie of admittantie.

### Oefeningen

Gebruik voor deze oefeningen je grafische rekenmachine, of beter nog, je favoriete wiskundige software om grafieken te maken (bv. Matlab, Octave, Mathematica, ...). Kies als startwaarden  $R = 1\text{ k}\Omega$ ,  $C = 1\text{ }\mu\text{F}$  en  $L = 1\text{ mH}$  en experimenteer wat verder door andere waarden te kiezen. Probeer het effect ervan te begrijpen (denk aan de de tijdconstanten).

**Oefening 8.3-1:** Bepaal de admittantie van een RC serie en een parallelschakeling en teken de bijhorende Bode-diagrammen.

**Oefening 8.3-2:** Bepaal de admittantie van een RL serie en een parallelschakeling en teken de bijhorende Bode-diagrammen.

**Oefening 8.3-3:** Bepaal de admittantie van een LC serie en een parallelschakeling en teken de bijhorende Bode-diagrammen.

**Oefening 8.3-4:** Bepaal de admittantie van een RLC serie en een parallelschakeling en teken de bijhorende Bode-diagrammen.

## 8.4 Bode-diagrammen schetsen

Het feit dat we de transferfunctie van een filter steeds kunnen schrijven als een product van eerste en tweede-graadsfactoren, laat toe om snel een Bode-diagram te schetsen.

Een Bode-diagram bestaat uit een magnitude en een faseverloop die apart getekend worden. Bijzonder aan deze grafieken zijn

- het feit dat de magnitude logaritmisch (in dB) wordt voorgesteld, en
- het feit dat de frequentie-as logaritmisch is.

Het eerste feit laat toe dat we de magnitude factor per factor tekenen en de resultaten gewoon kunnen optellen. Immers:

$$H(s) = \frac{N_1(s) \cdot N_2(s) \cdot \dots \cdot N_m(s)}{D_1(s) \cdot D_2(s) \cdot \dots \cdot D_n(s)}$$

$$\Leftrightarrow 20 \log(|H(s)|) = 20 \log(|N_1(s)|) + 20 \log(|N_2(s)|) + \dots + 20 \log(|N_m(s)|) \\ - 20 \log(|D_1(s)|) - 20 \log(|D_2(s)|) - \dots - 20 \log(|D_n(s)|)$$

Hetzelfde geldt overigens ook (van nature uit) voor de fase:

$$H(s) = \frac{N_1(s) \cdot N_2(s) \cdot \dots \cdot N_m(s)}{D_1(s) \cdot D_2(s) \cdot \dots \cdot D_n(s)}$$

$$\Leftrightarrow \angle H(s) = \angle N_1(s) + \angle N_2(s) + \dots + \angle N_m(s) \\ - \angle D_1(s) - \angle D_2(s) - \dots - \angle D_n(s)$$

Het tweede feit laat toe om de grafieken te benaderen met rechte lijnen. Dit noemen we 'asymptoten'. Het begrip is vergelijkbaar met wat je leerde kennen als asymptoten in je cursus wiskunde.

We illustreren deze benaderingen voor de verschillende types factoren. We concentreren ons voorlopig alleen op de magnitudegrafieken. De lineaire benaderingen voor de fasegrafieken komen later aan bod in je cursus Systeemtheorie.

Op de zuivere factoren  $s$  in teller of noemer na, schrijven we de factoren steeds in normaalvorm, d.w.z. dat de waarde van de factor voor  $s \rightarrow 0$  gelijk wordt aan 1.

Het is essentieel dat je de transferfunctie eerst zover als mogelijk ontbindt in factoren! Doe je dat niet, dan gaat de techniek die hieronder uit de doeken gedaan wordt, foute resultaten geven.

**Factor  $K$ :**  $F(s) = K$

Deze constante factor komt overeen met een horizontale bijdrage aan de magnitudegrafiek. Een dergelijke factor zal dus de grafiek over  $20 \log |K|$  dB omhoog ( $|K| > 1$ ) of omlaag ( $|K| < 1$ ) schuiven.

Je vindt deze rechte in Figuur 8.8 (op de eerste rij).

**Factor  $s$  in de teller:**  $F(s) = s$

Indien we  $s = j\omega$  substitueren en we berekenen de magnitude in dB, dan krijgen we:

$$20 \log(|F(j\omega)|) = 20 \log \omega$$

Dit is een rechte met helling 20 dB/dec op de magnitudegrafiek (aangezien  $\log \omega$  de variabele op de horizontale as is). Je vindt deze rechte in Figuur 8.8 (op de tweede rij).

**Factor  $s$  in de noemer:**  $F(s) = \frac{1}{s}$

Indien we  $s = j\omega$  substitueren en we berekenen de magnitude in dB, dan krijgen we:

$$20 \log(|F(j\omega)|) = 20 \log \frac{1}{\omega} = -20 \log \omega$$

Dit is een rechte met helling  $-20$  dB/dec op de magnitudegrafiek (aangezien  $\log \omega$  de variabele op de horizontale as is). Je vindt deze rechte in Figuur 8.8 (op de derde rij).

**Eerstegraadsfactor in de teller:**  $F(s) = \tau s + 1$

Indien we  $s = j\omega$  substitueren en we berekenen de magnitude in dB, dan krijgen we:

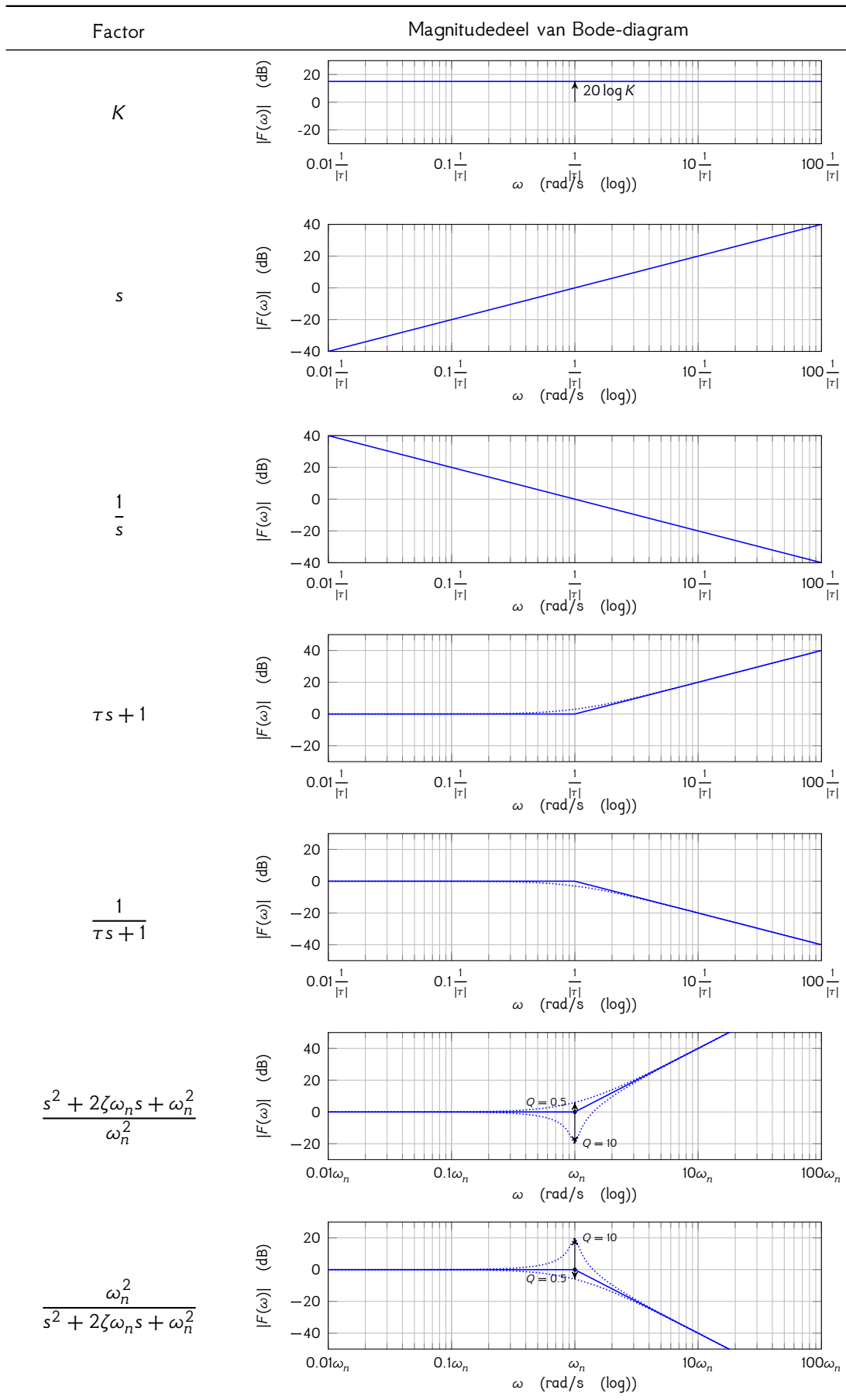
$$20 \log(|F(j\omega)|) = 20 \log \sqrt{(\tau\omega)^2 + 1}$$

De eerste termen onder het wortelteken worden even groot indien  $\omega = 1/|\tau|$ . We noemen deze frequentie de kantel- of breek-frequentie. Op dat ogenblik wordt de magnitude gelijk aan 3 dB (reken dit na!).

We onderzoeken nu deze factor voor frequenties veel kleiner en veel groter dan deze kantelfrequentie:

$$\begin{aligned} \omega \ll \frac{1}{|\tau|} : & \quad 20 \log(|F(j\omega)|) \approx 20 \log \sqrt{\cancel{(\tau\omega)^2} + 1} = 0 \text{ dB} \\ \omega \gg \frac{1}{|\tau|} : & \quad 20 \log(|F(j\omega)|) \approx 20 \log \sqrt{(\tau\omega)^2 + \cancel{1}} = 20 \log |\tau| + 20 \log \omega \end{aligned}$$

Beide benaderingen zijn rechten op de magnitudegrafiek (aangezien  $\log \omega$  de variabele op de horizontale as is). Het eerste stuk is horizontaal (op 0 dB), het tweede stuk stijgt vanaf  $1/|\tau|$  met een helling van 20 dB/dec. Je vindt deze asymptotische benaderingen (in volle lijn) naast de werkelijke grafiek (in stippellijn) in Figuur 8.8 (op de vierde rij).



Figuur 8.8: Magnitudegrafiek van de elementaire factoren van een transferfunctie

Eerstegraadsfactor in de noemer:  $F(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$

Indien we  $s = j\omega$  substitueren en we berekenen de magnitude in dB, dan krijgen we:

$$20 \log(|F(j\omega)|) = 20 \log \frac{1}{\sqrt{(\tau\omega)^2 + 1}}$$

De eerste termen onder het wortelteken worden even groot indien  $\omega = 1/|\tau|$ . We noemen deze frequentie de kantel- of breek-frequentie. Op dat ogenblik wordt de magnitude gelijk aan 3 dB (reken dit na!).

We onderzoeken nu deze factor voor frequenties veel kleiner en veel groter dan deze kantelfrequentie:

$$\begin{aligned} \omega \ll \frac{1}{|\tau|} : \quad & 20 \log(|F(j\omega)|) \approx 20 \log \frac{1}{\sqrt{(\tau\omega)^2 + 1}} = 0 \text{ dB} \\ \omega \gg \frac{1}{|\tau|} : \quad & 20 \log(|F(j\omega)|) \approx 20 \log \frac{1}{\sqrt{(\tau\omega)^2 + 1}} = -20 \log |\tau| - 20 \log \omega \end{aligned}$$

Beide benaderingen zijn rechten op de magnitudegrafiek (aangezien  $\log \omega$  de variabele op de horizontale as is). Het eerste stuk is horizontaal (op 0 dB), het tweede stuk daalt vanaf  $1/|\tau|$  met een helling van  $-20$  dB/dec. Je vindt deze asymptotische benaderingen (in volle lijn) naast de werkelijke grafiek (in stippellijn) in Figuur 8.8 (op de vijfde rij).

Tweedegraadsfactor in de teller:  $F(s) = \frac{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}{\omega_n^2}$

Merk op dat de discriminant van deze factor negatief is. Moest hij positief zijn, dan zouden we hem ontbinden in twee eerstegraadsfactoren.

Indien we  $s = j\omega$  substitueren en we berekenen de magnitude in dB, dan krijgen we:

$$20 \log(|F(j\omega)|) = 20 \log \frac{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}}{\omega_n^2}$$

De eerste term onder het wortelteken valt weg indien  $\omega = \omega_n$ . We noemen deze frequentie de kantel- of breek-frequentie van de tweedegraadsfactor. Op dat ogenblik wordt de magnitude gelijk aan  $20 \log(2|\zeta|)$ . Vaak gebruiken we als parameter de kwaliteitsfactor  $Q$  gedefinieerd als  $Q = 1/(2\zeta)$ , zodanig dat de versterking  $\omega = \omega_n$  gelijk wordt aan  $-20 \log |Q|$ .

We onderzoeken nu deze factor voor frequenties veel kleiner en veel groter dan deze kantelfrequentie:

$$\begin{aligned} \omega \ll \omega_n : \quad & 20 \log(|F(j\omega)|) \approx 20 \log \frac{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}}{\omega_n^2} = 0 \text{ dB} \\ \omega \gg \omega_n : \quad & 20 \log(|F(j\omega)|) \approx 20 \log \frac{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}}{\omega_n^2} = 40 \log \omega - 40 \log \omega_n \end{aligned}$$

Beide benaderingen zijn rechten op de magnitudegrafiek (aangezien  $\log \omega$  de variabele op de horizontale as is). Het eerste stuk is horizontaal (op 0 dB), het tweede stuk stijgt vanaf  $\omega_n$  met een helling van 40 dB/dec. Je vindt deze asymptotische benaderingen (in volle lijn) naast de werkelijke grafiek (in stippellijn) in Figuur 8.8 (op de voorlaatste rij). De werkelijke grafiek werd getekend voor  $\zeta = 1$  ( $Q = 0.5$ ) en  $\zeta = 0.05$  ( $Q = 10$ ).

Tweedegraadsfactor in de noemer:  $F(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

Merk op dat de discriminant van deze factor negatief is. Moest hij positief zijn, dan zouden we hem ontbinden in twee eerstegraadsfactoren.

Indien we  $s = j\omega$  substitueren en we berekenen de magnitude in dB, dan krijgen we:

$$20 \log(|F(j\omega)|) = 20 \log \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}}$$

De eerste term onder het wortelteken valt weg indien  $\omega = \omega_n$ . We noemen deze frequentie de kantel- of breek-frequentie van de tweedegraadsfactor. Op dat ogenblik wordt de magnitude gelijk aan  $20 \log \frac{1}{2|\zeta|}$ . Vaak gebruiken we als parameter de kwaliteitsfactor  $Q$  gedefinieerd als  $Q = 1/(2\zeta)$ , zodanig dat de versterking  $\omega = \omega_n$  gelijk wordt aan  $20 \log |Q|$ .

We onderzoeken nu deze factor voor frequenties veel kleiner en veel groter dan deze kantelfrequentie:

$$\omega \ll \omega_n : \quad 20 \log(|F(j\omega)|) \approx 20 \log \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \cancel{\omega^2})^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}} = 0 \text{ dB}$$

$$\omega \gg \omega_n : \quad 20 \log(|F(j\omega)|) \approx 20 \log \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\cancel{\omega_n^2} - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}} = 40 \log \omega_n - 40 \log \omega$$

Beide benaderingen zijn rechten op de magnitudegrafiek (aangezien  $\log \omega$  de variabele op de horizontale as is). Het eerste stuk is horizontaal (op 0 dB), het tweede stuk daalt vanaf  $\omega_n$  met een helling van  $-40$  dB/dec. Je vindt deze asymptotische benaderingen (in volle lijn) naast de werkelijke grafiek (in stippellijn) in Figuur 8.8 (op de laatste rij). De werkelijke grafiek werd getekend voor  $\zeta = 1$  ( $Q = 0.5$ ) en  $\zeta = 0.05$  ( $Q = 10$ ).

**Voorbeeld 1** Als voorbeeld schetsen we de volgende transferfunctie:

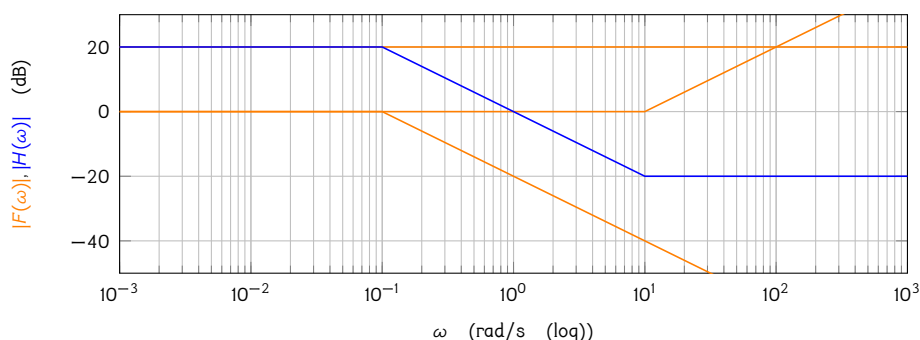
$$H(s) = 10 \cdot \frac{-0.1s + 1}{10s + 1}$$

We onderscheiden eerst de aparte factoren. We hebben:

- een constante factor van 20 dB
- een eerstegraadsfactor in de teller met  $\tau = -0.1$  en dus een kantelfrequentie  $\omega = 1/|\tau| = 10$  rad/s.
- een eerstegraadsfactor in de noemer met  $\tau = 10$  en dus een kantelfrequentie  $\omega = 1/|\tau| = 0.1$  rad/s.

De totale magnitudegrafiek is dan de som van al deze onderdeelgrafieken.

De verschillende onderdelen werden hieronder in oranje getekend. De totale som werd in het blauw getekend:



**Voorbeeld 2** Laten we de volgende transferfunctie schetsen:

$$H(s) = -0.1 \cdot \frac{s - 10}{s + 0.1}$$

We schrijven deze transferfunctie eerst in normaalvorm:

$$\begin{aligned} H(s) &= -0.1 \cdot \frac{-10 \frac{s-10}{-10}}{0.1 \frac{s+0.1}{0.1}} \\ &= -0.1 \cdot (-10) \cdot \frac{1}{0.1} \cdot \frac{-0.1s + 1}{10s + 1} \\ &= 10 \cdot \frac{-0.1s + 1}{10s + 1} \end{aligned}$$

wat overeenkomt met de transferfunctie van het vorige voorbeeld.

**Voorbeeld 3** Beschouw de onderstaande transferfunctie:

$$H(s) = 10^{-2} \cdot s \cdot \frac{s^2 + 10s + 100}{s^2 + 99.9s - 10}$$

De tweedegraadsfactor in de teller heeft een negatieve discriminant, maar die in de noemer niet, die kunnen we verder ontbinden. Dat moeten we dan ook eerst doen:

$$s^2 + 99.9s - 10 = (s - 0.1)(s + 100)$$

We herschrijven deze transferfunctie in normaalvorm:

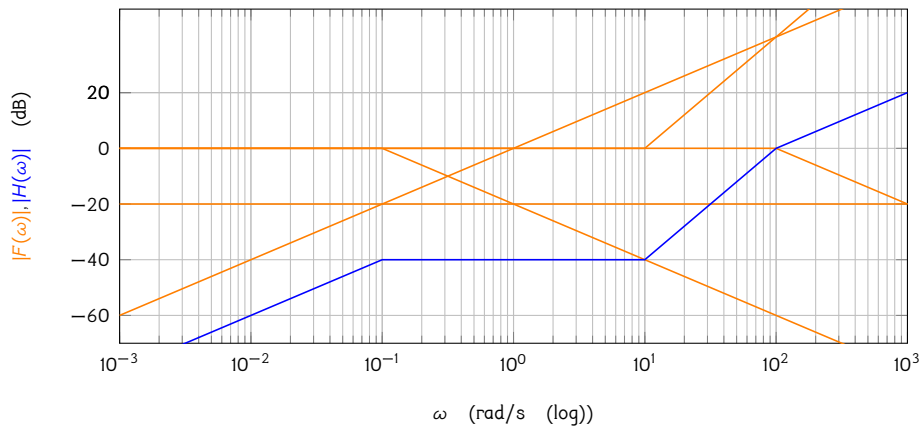
$$\begin{aligned} H(s) &= 10^{-2} \cdot s \cdot \frac{s^2 + 10s + 100}{(s - 0.1)(s + 100)} \\ &= 10^{-2} \cdot s \cdot 100 \cdot \frac{s^2 + 10s + 100}{100} \cdot \frac{-10}{-10s + 1} \cdot \frac{0.01}{0.01s + 1} \\ &= -10^{-1} \cdot s \cdot \frac{s^2 + 10s + 100}{100} \cdot \frac{1}{-10s + 1} \cdot \frac{1}{0.01s + 1} \end{aligned}$$

We hebben:

- een constante factor van  $-20$  dB
- een zuiver lineaire factor  $s$
- een tweedegraadsfactor in de teller met  $\omega_n = 10$  en  $\zeta = 0.5$ , d.w.z.  $Q = 1$
- een eerstegraadsfactor in de noemer met  $\tau = -10$  en dus een kantelfrequentie  $\omega = 1/|\tau| = 0.1$  rad/s
- een eerstegraadsfactor in de noemer met  $\tau = 0.01$  en dus een kantelfrequentie  $\omega = 1/|\tau| = 100$  rad/s

De totale magnitudegrafiek is dan de som van al deze onderdeelgrafieken.

De verschillende onderdelen werden hieronder in oranje getekend. De totale som werd in het blauw getekend:



### Oefeningen

Oefening 8.4-1: Schets het magnitudedeel van de volgende transferfunctie:

$$H(s) = 20 \frac{0.2s + 1}{0.005s + 1}$$

Oefening 8.4-2: Schets het magnitudedeel van de volgende transferfunctie:

$$H(s) = 100 \frac{s(s - 100)}{s + 1000}$$

Oefening 8.4-3: Schets het magnitudedeel van de volgende transferfunctie:

$$H(s) = 0.1(s + 100) \frac{64}{s^2 + 10s + 64}$$

Oefening 8.4-4: Schets het magnitudedeel van de volgende transferfunctie:

$$H(s) = 0.1 \frac{(s - 10)}{s} \frac{1}{s^2 + 4s + 81}$$

Oefening 8.4-5: Schets het magnitudedeel van de volgende transferfunctie:

$$H(s) = 40 \frac{s}{s + 10} \frac{1}{s^2 + 20s + 51}$$

Oefening 8.4-6: Bewijs dat de twee asymptotisch rechte takken in het magnitude-diagram van

$$H(s) = A \frac{\omega_n s}{s^2 + \frac{\omega_n}{Q} s + \omega_n^2}$$

elkaar in  $\omega_n$  snijden met als magnitude  $|A|$ .

Oefening 8.4-7: Bewijs dat de versterking van

$$H(s) = A \frac{\omega_n s}{s^2 + \frac{\omega_n}{Q} s + \omega_n^2}$$

bij  $\omega_n$  gelijk is aan  $|A| \cdot |Q|$ .

Oefening 8.4-8: Bewijs dat voor  $|Q| \gg 1$  de  $-3$  dB-bandbreedte van

$$H(s) = A \frac{\omega_n s}{s^2 + \frac{\omega_n}{Q} s + \omega_n^2}$$

gelijk is aan  $\omega_n/|Q|$ .

Tip: schrijf de voorwaarde  $|H(j\omega)| = \frac{|AQ|}{\sqrt{2}}$  uit en los deze op voor  $\omega$ . Hieruit volgt een vergelijking in  $\omega^2$  waaruit je een uitdrukking voor  $\omega^2$  i.f.v.  $\omega_n$  kan bepalen. Benader de term onder het wortelteken en gebruik  $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$  indien  $x$  klein is.

## 8.5 Filtercascades

Veeleisende filterspecificaties kunnen aanleiding geven tot transferfuncties met veeltermen in teller en noemer die een hoge graad hebben. Indien we die hoge graden willen realiseren met passieve elementen (weerstand, condensatoren en spoelen), dan blijkt gauw dat we heel wat elementen en een relatief complex netwerk nodig hebben om dit te realiseren.

Een secundair effect dat speelt, is dat de sensitiviteit van de filterkarakteristiek t.o.v. de waarden van de elementen groot wordt indien we hier geen bijzondere aandacht aan schenken. Het ontwerp wordt daarmee onbetrouwbaar indien bepaalde elementen een grote variantie in hun waarde vertonen, of omwille van veroudering een zich langzaam wijzigende waarde hebben. Het zou daarom wenselijk zijn, moesten we het probleem kunnen opdelen in stukken.

Dat doen we door de noemer en de teller van de te realiseren filtertransferfunctie  $H(s)$  te ontbinden in factoren: op die manier kunnen we

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

omvormen tot

$$H(s) = K \frac{(s - n_1)(s - n_2) \dots (s - n_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

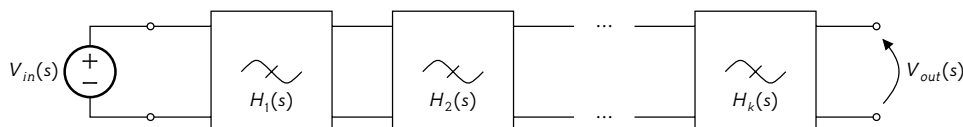
Door kleine groepjes polen en nullen samen te nemen kunnen we nu de transferfunctie als geheel ontbinden in factoren, waarbij elke factor een aparte filter voorstelt. We kunnen op die manier een filter met veel nullen en polen vereenvoudigen tot een cascade van kleine filters, die veel minder sensitief zijn aan afwijkingen op de elementen.

In formulevorm:

$$H(s) = K \cdot H_1(s) \cdot H_2(s) \cdot \dots \cdot H_k(s)$$

waarbij bv.  $H_1(s) = (s - n_1)/(s - p_1)$ ,  $H_2(s) = (s - n_2)(s - n_3)/(s - p_2)$ , enz.

Als netwerk wordt dit:



Op deze manier kunnen we een groot filter opdelen in meerdere kleine filters die minder gevoelig zijn aan parametervariaties.

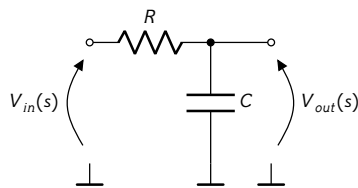
Bij de implementatie van filters kunnen we kiezen voor

- een volledig passieve variant (met enkel weerstanden, spoelen en condensatoren),
- een actieve variant (met opamps).

Laten we deze opties verder in detail verkennen.

## 8.6 Passieve filters

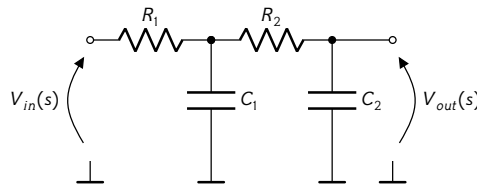
Passieve filters ontwerpen is geen eenvoudige taak. Het probleem bij een cascade-strategie, zoals uiteengezet in de vorige sectie, is dat een volgende filter de vorige belast en daardoor diens gedrag wijzigt. Beschouw bijvoorbeeld het volgende laagdoorlaatfilter:



Dit netwerk heeft als filterkarakteristiek:

$$H(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{1}{1 + sRC}$$

De cascade van twee dergelijke filterblokken



levert echter niet als transferfunctie

$$T_{fout}(s) = \frac{1}{1 + sR_1C_1} \cdot \frac{1}{1 + sR_2C_2} = \frac{1}{1 + s(R_1C_1 + R_2C_2) + s^2R_1R_2C_1C_2}$$

op, maar wel (reken dit zelf na!):

$$T_{goed}(s) = \frac{1}{1 + s(R_1C_1 + (R_1 + R_2)C_2) + s^2R_1R_2C_1C_2}$$

Bij passieve filters is dat interactie-effect niet te vermijden (in tegenstelling tot bij actieve filters). Om die reden moeten we een passief filter als geheel ontwerpen, daarbij ook rekening houdend met de bronimpedantie en de lastimpedantie.

Op basis van een gestructureerde zero-shifting methode kan men LC-ladders bouwen die dergelijke filters realiseren [Dar76]. We kiezen daarbij voor LC-ladders omdat die geen energie verbruiken en – indien goed ontworpen – een lage sensitiviteit vertonen t.o.v. de gebruikte componenten. Helaas is de theorie die nodig is om de methode te begrijpen en toe te passen niet zo eenvoudig. Dit valt buiten het bereik van deze cursus.

We gaan dan ook niet verder in op passieve filters, maar concentreren ons ineens op actieve filters.

## 8.7 Actieve filters

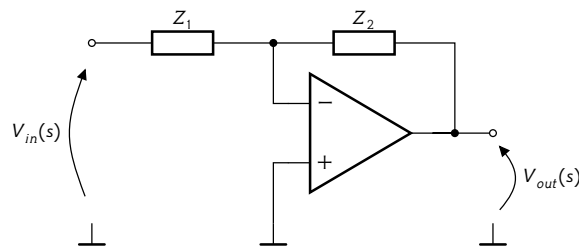
Door een opamp te gebruiken om een deelfilter te realiseren, kunnen we zorgen voor een lage uitgangsimpedantie, zodat (als we deingangsimpedantie van de volgende sectie groot genoeg houden) die uitgang niet door de knieën gaat omwille van de belasting die komt van de volgende sectie.

### 8.7.1 Basisprincipe

Met een inverterende versterkerconfiguratie Beschouw als voorbeeld de volgende filterkarakteristiek waarvoor we een filter moeten ontwerpen:

$$H(s) = -2 \frac{s+3}{s+5} \quad (8.1)$$

Indien we deze formule vergelijken met de spanningsversterking van een inverterende opampversterker:



waarvan we weten dat

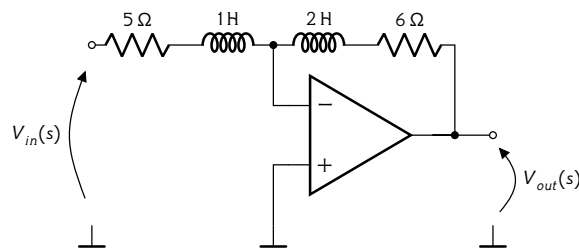
$$\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = -\frac{Z_2}{Z_1},$$

dan kunnen we gewoon de twee uitdrukking matchen. M.a.w.

$$Z_2 = 2s + 6$$

$$Z_1 = s + 5$$

Beide impedanties kunnen gerealiseerd worden met een serieschakeling van een spoel en een weerstand, zoals hieronder weergegeven:



We kunnen ook naar parallelschakelingen van impedanties toewerken door de spanningsversterking van de inverterende opampversterker wat om te werken:

$$\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{1}{\frac{1}{Z_2}}$$

We doen dit ook met (8.1):

$$H(s) = -\frac{\frac{1}{\frac{s+5}{2} + \frac{5}{2}}}{\frac{1}{s+3}}$$

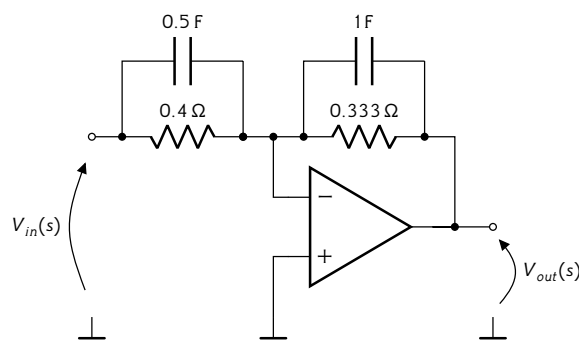
Aangezien voor een parallelschakeling van twee impedanties  $Z_a$  en  $Z_b$  geldt:

$$\frac{1}{Z_{a\parallel b}} = \frac{1}{Z_a} + \frac{1}{Z_b}$$

kunnen we opnieuw de twee uitdrukkingen matchen, wat leidt tot:

$$\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{2}s + \frac{5}{2} \qquad \frac{1}{Z_2} = s + 3$$

Dat levert het volgende schema op met parallelschakelingen van een condensator en een weerstand:



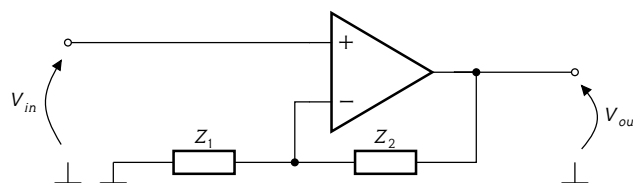
De waarden in deze schema's zijn in de praktijk niet haalbaar. Impedantieschaling (zie sectie 8.7.2) zal toelaten tot meer realistische waarden te komen.

We zouden deze methode verder kunnen uitbreiden door steeds complexere impedanties te matchen, of door RC- of LC-impedantienetwerken te synthetiseren m.b.v. de methodes van Foster en Cauer [Dar76], maar dat is zelden nodig in het licht van het feit dat filters doorgaans gestandaardiseerd worden als biquad-secties. Voor dit type filter bestaan standaard ontwerpmethodes.

**Met een niet-inverterende versterkerconfiguratie** Beschouw als voorbeeld de volgende filterkarakteristiek waarvoor we een filter moeten ontwerpen:

$$H(s) = \frac{s + 12}{s + 7} \qquad (8.2)$$

De formule voor een niet-inverterende opamp-versterker is eenvoudig af te leiden uit het onderstaande netwerk:



We weten hiervoor dat:

$$H(s) = 1 + \frac{Z_2}{Z_1}$$

We werken nu (8.2) om naar deze vorm:

$$H(s) = \frac{s + 12}{s + 7} = 1 + \frac{5}{s + 7}$$

We zien nu duidelijk:

$$Z_1 = s + 7$$

$$Z_2 = 5$$

De eerste is een serieschakeling van een spoel van 1 H en een weerstand van  $7 \Omega$ . De tweede is een weerstand van  $5 \Omega$ .

Het omwerken naar een parallelschakeling is gelijkaardig aan wat we zagen voor de inverterende versterker en laten we aan de lezer.

### 8.7.2 Impedantieschaling

Indien we terugblikken op de filters die we tot nu toe zagen, dan worden de kantelfrequenties allemaal bepaald door eenvoudige tijdconstanten:  $RC$ ,  $L/R$ ,  $\sqrt{LC}$ .

Deze tijdconstanten blijven gelijk, indien we de impedanties gelijk schalen, d.w.z.

- alle weerstanden  $K$  maal groter nemen
- alle spoelen  $K$  maal groter nemen
- alle condensatoren  $K$  maal kleiner nemen

Bijgevolg gaat impedantieschaling de filterkarakteristiek niet wijzigen wat betreft de kantelfrequenties, enkel wat betreft de totale versterking (de magnitude).

### 8.7.3 Biquad filters

We starten opnieuw van onze filtertransferfunctie

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_m s^n + a_{m-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

en van het idee om een filter op te delen in een cascade van deelfilters.

Laten we nu veronderstellen dat onze transferfunctie  $m_r$  reële nullen en  $m_c$  paren complex toegevoegde nullen heeft (met  $m_r + 2m_c = m$ ) en  $n_r$  reële polen en  $n_c$  paren complex toegevoegde polen (met  $n_r + 2n_c = n$ ). Dan kunnen we onze transferfunctie herschrijven als:

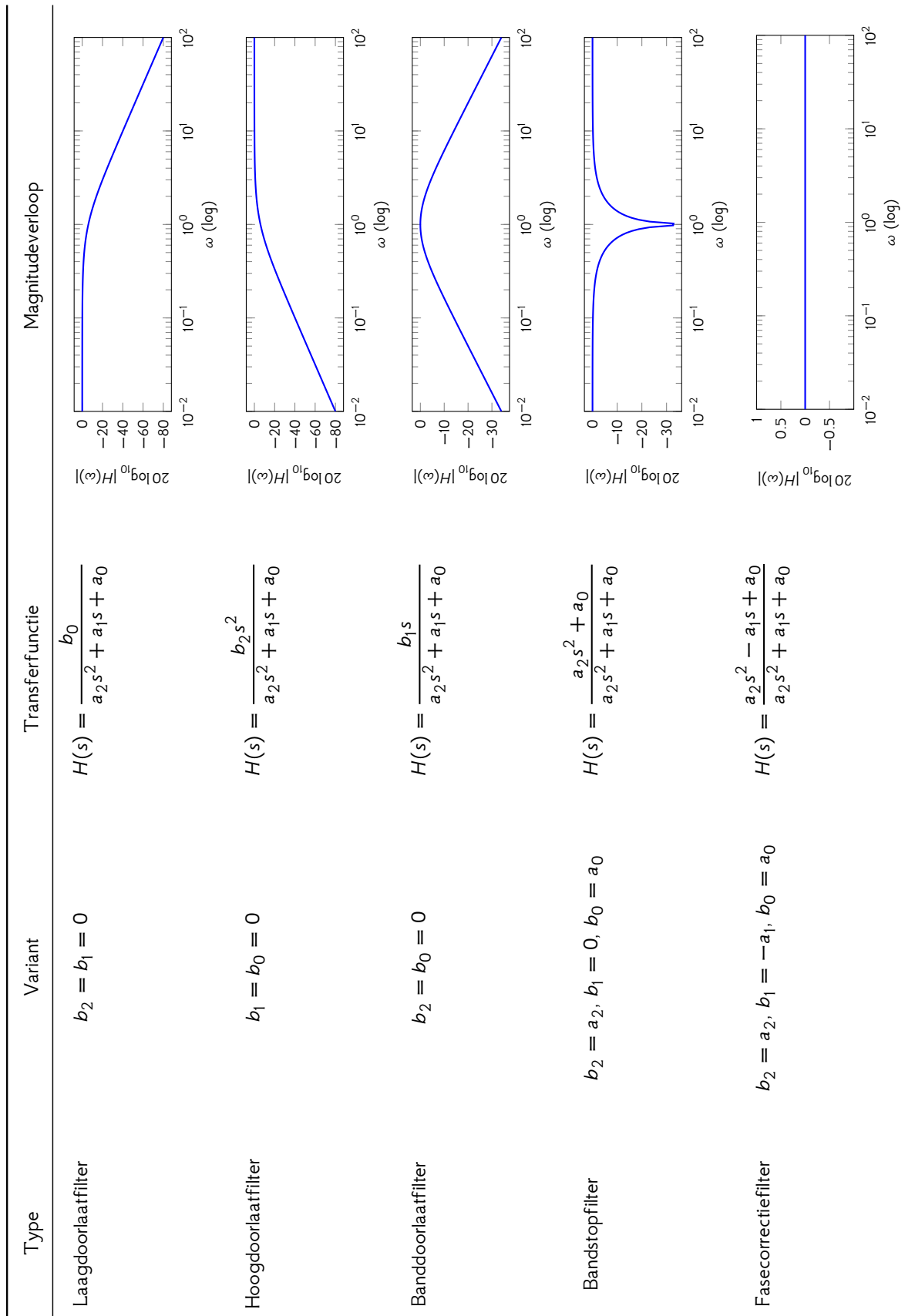
$$H(s) = K \frac{\prod_{i=1}^{m_r} (s - n_i) \cdot \prod_{i=1}^{m_c} (s^2 + a_i s + b_i)}{\prod_{i=1}^{n_r} (s - p_i) \cdot \prod_{i=1}^{n_c} (s^2 + c_i s + d_i)}$$

Het is een standaard praktijk om steeds één of twee nullen en één of twee polen samen te nemen in een deelfilter. We noemen zo'n deelfilter een biquad-sectie (bi omwille van het feit dat je zowel nullen als polen opneemt, en quad omdat zo'n reëel of complex nullen/polen-paar een kwadratische veelterm in de teller/noemer oplevert). Algemeen gesteld:

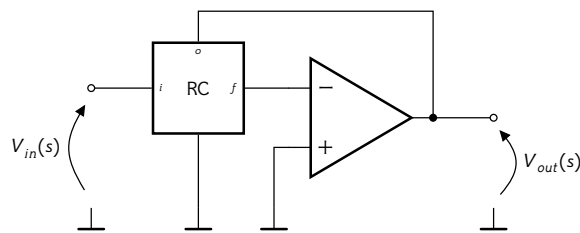
$$H_{biquad}(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

De verschillende varianten van deze biquad filterfunctie realiseren de basisfiltertypes die je vindt in Figuur 8.9. Vanzelfsprekend hoeven we ons niet te beperken tot deze basistypes en kan ook een willekeurig nullen- en polenpaar samengenomen worden.

Dergelijke biquad-secties worden volgens standaard schema's geïmplementeerd:



Figuur 8.9: Biquad filtersecties die de basisfiltertypes implementeren



Figuur 8.10: Biquad filter met negatieve feedback

- in negatieve feedbackconfiguratie (met 1 opamp)
- in positieve feedbackconfiguratie (met 1 opamp)
- als state-space filter (met 3 opamps)
- met gyratoren

We behandelen hier de eerste twee.

#### 8.7.4 Biquad filter met negatieve feedback

We gebruiken een opamp in een negatieve feedbackconfiguratie, waarbij we via een RC-netwerk een pad voorzien van de ingang en van de uitgang naar de negatieve ingangsklem van de opamp. Dit kan je zien in Figuur 8.10.

Het RC-netwerk kan beschouwd worden als een lineair netwerk dat hetingangssignaal (op poort  $i$ ) filtert op zijn weg naar de negatieve klem van de opamp (op poort  $f$ ) en het uitgangssignaal (op poort  $o$ ) filtert op zijn terugkoppelweg naar de negatieve klem van de opamp (op poort  $f$ ). Die actie kan beschreven worden als de superpositie van twee aparte bijdragen aan de negatieve ingangsklem van de opamp:

$$\begin{aligned} V_m(s) &= V_{ff}(s) + V_{fb}(s) \\ &= H_{ff}(s) \cdot V_{in}(s) + H_{fb}(s) \cdot V_{out}(s) \end{aligned} \quad (8.3)$$

waarbij  $ff$  staat voor 'feed forward' en  $fb$  staat voor feedback.

Vermits het RC-netwerk lineair is, zijn de transferfuncties  $H_{ff}$  en  $H_{fb}$  rationale functies, d.w.z. breuken van twee veeltermen in  $s$ :

$$H_{ff}(s) = \frac{N_{ff}(s)}{D_{ff}(s)} \qquad H_{fb}(s) = \frac{N_{fb}(s)}{D_{fb}(s)}$$

Bijkomend: omdat ze horen bij hetzelfde netwerk, hebben ze dezelfde noemer, m.a.w.  $D_{ff}(s) = D_{fb}(s)$ .

Het verband tussen  $V_{in}(s)$  en  $V_{out}(s)$  kunnen we nu eenvoudig bepalen door de twee bovenstaande vergelijkingen te combineren met de opampvergelijking:

$$V_{out}(s) = -A \cdot V_m(s)$$

Indien we nu (8.3) invullen in deze vergelijking krijgen we:

$$V_{out}(s) = -A (H_{ff}(s) \cdot V_{in}(s) + H_{fb}(s) \cdot V_{out}(s))$$

waaruit we gemakkelijk  $V_{out}(s)$  kunnen bepalen

$$V_{out}(s) = -\frac{AH_{ff}(s) \cdot V_{in}(s)}{1 + AH_{fb}(s)}$$

wat leidt tot de totale spanningsversterking:

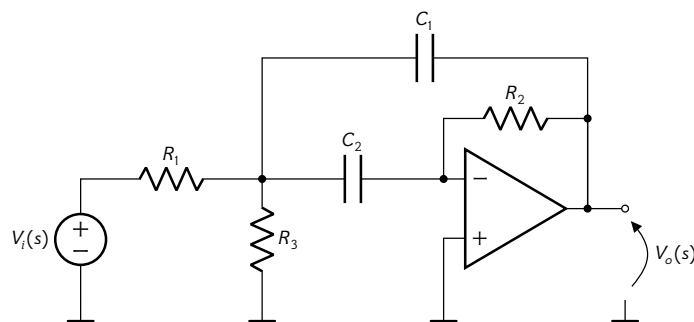
$$H(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = -\frac{AH_{ff}(s)}{1 + AH_{fb}(s)}$$

Normaal is de opampversterking  $A$  zo groot dat  $|AH_{fb}(s)| \gg 1$  voor alle relevante frequenties, waardoor we verder kunnen vereenvoudigen tot:

$$H(s) = -\frac{AH_{ff}(s)}{1 + AH_{fb}(s)} = -\frac{AH_{ff}(s)}{AH_{fb}(s)} = -\frac{H_{ff}(s)}{H_{fb}(s)} = -\frac{N_{ff}(s)}{N_{fb}(s)} \quad (8.4)$$

De laatste stap konden we zetten omwille van het feit dat:  $D_{ff}(s) = D_{fb}(s)$ . Dit wil zeggen dat de totale spanningsversterking enkel bepaald wordt door de nulpunten horende bij de twee paden door het RC-netwerk.

**Voorbeeld** Indien we nu als feedback netwerk het netwerk van voorbeeld 5 op pagina 81 nemen, dan krijgen we een klassiek banddoorlaatfilter, dat ook gekend is onder de naam multiple feedback (MFB) filter.



We weten uit eerdere analyse van het feedbacknetwerk dat:

$$H_{ff}(s) = \frac{N_{ff}(s)}{D_{ff}(s)} = \frac{sR_2R_3C_2}{R_1 + R_3 + s(R_1R_3C_1 + (R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1)C_2) + s^2R_1R_2R_3C_1C_2}$$

en

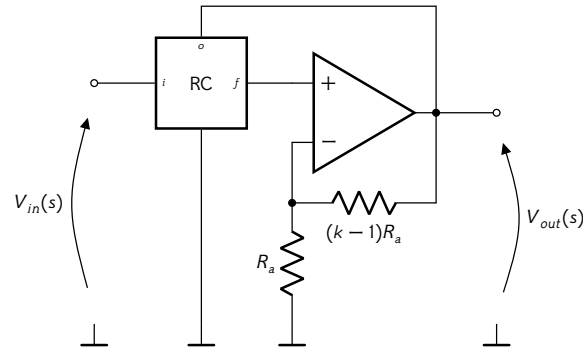
$$H_{fb}(s) = \frac{N_{fb}(s)}{D_{fb}(s)} = \frac{R_1 + R_3 + sR_1R_3(C_1 + C_2) + s^2R_1R_2R_3C_1C_2}{R_1 + R_3 + s(R_1R_3C_1 + (R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1)C_2) + s^2R_1R_2R_3C_1C_2}$$

In combinatie met (8.4) levert dit op:

$$H(s) = -\frac{N_{ff}(s)}{N_{fb}(s)} = -\frac{sR_2R_3C_2}{R_1 + R_3 + sR_1R_3(C_1 + C_2) + s^2R_1R_2R_3C_1C_2}$$

### 8.7.5 Biquad filter met positieve feedback

We gebruiken nu een opamp met de filterelementen in het positieve feedbackpad. Het geheel wordt stabiel dankzij een tweede resistief feedbackpad naar de negatieve ingangsklem van de opamp.



Figuur 8.11: Biquad filter met positieve feedback

Opnieuw kan het RC-netwerk beschouwd worden als een lineair netwerk dat hetingangssignaal (op poort  $i$ ) filtert op zijn weg naar de negatieve klem van de opamp (op poort  $f$ ) en het uitgangssignaal (op poort  $o$ ) filtert op zijn terugkoppelweg naar de negatieve klem van de opamp (op poort  $f$ ):

$$\begin{aligned} V_m(s) &= V_{ff}(s) + V_{fb}(s) \\ &= H_{ff}(s) \cdot V_{in}(s) + H_{fb}(s) \cdot V_{out}(s) \end{aligned} \quad (8.5)$$

waarbij  $ff$  staat voor 'feed forward' en  $fb$  staat voor feedback.

Vermits het RC-netwerk lineair is, zijn de transferfuncties  $H_{ff}$  en  $H_{fb}$  rationale functies, d.w.z. breuken van twee veeltermen in  $s$ :

$$H_{ff}(s) = \frac{N_{ff}(s)}{D_{ff}(s)} \qquad H_{fb}(s) = \frac{N_{fb}(s)}{D_{fb}(s)}$$

Bijkomend: omdat ze horen bij hetzelfde netwerk, hebben ze dezelfde noemer, m.a.w.  $D_{ff}(s) = D_{fb}(s)$ .

Er is echter ook het negatieve feedbackpad, wat aanleiding geeft tot:

$$V_p(s) = \frac{R_a}{R_a + (k-1)R_a} V_{out}(s) = \frac{1}{k} V_{out}(s) \quad (8.6)$$

In combinatie met de opampvergelijking

$$V_{out}(s) = A(V_p(s) - V_m(s)) \quad (8.7)$$

kunnen we  $V_p(s)$  en  $V_m(s)$  uit het probleem elimineren door (8.5) en (8.6) in te vullen in (8.7), wat leidt tot:

$$V_{out}(s) = A(H_{ff}(s) \cdot V_{in}(s) + H_{fb}(s) \cdot V_{out}(s) - \frac{1}{k} V_{out}(s))$$

We kunnen hieruit  $V_{out}(s)$  oplossen:

$$V_{out}(s) = \frac{AH_{ff}(s)}{1 + A\left(\frac{1}{k} - H_{fb}(s)\right)} V_{in}(s)$$

wat leidt tot de totale spanningsversterking:

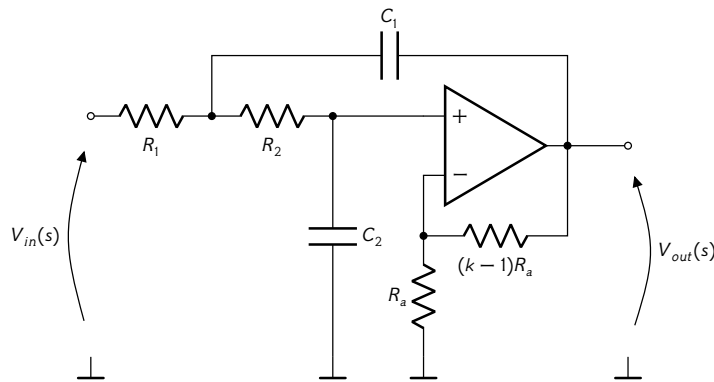
$$H(s) = \frac{AH_{ff}(s)}{1 + A\left(\frac{1}{k} - H_{fb}(s)\right)}$$

Normaal is de opampversterking  $A$  zo groot dat  $|A(\frac{1}{k} - H_{fb}(s))| \gg 1$  voor alle relevante frequenties, waardoor we verder kunnen vereenvoudigen tot:

$$H(s) = \frac{AH_{ff}(s)}{1 + A(\frac{1}{k} - H_{fb}(s))} = \frac{AH_{ff}(s)}{A(\frac{1}{k} - H_{fb}(s))} = \frac{kH_{ff}(s)}{1 - kH_{fb}(s)} = \frac{kN_{ff}(s)}{D(s) - kN_{fb}(s)} \quad (8.8)$$

De laatste stap konden we zetten omwille van het feit dat:  $D_{ff}(s) = D_{fb}(s) = D(s)$ .

**Voorbeeld** Indien we nu als feedback netwerk het netwerk van voorbeeld 4 op pagina 79 nemen, dan krijgen we een laagdoorlaat Sallen-Key filter:



We weten uit de eerdere analyse van het feedbacknetwerk, dat:

$$H_{ff}(s) = \frac{N_{ff}(s)}{D(s)} = \frac{1}{1 + s((R_1 + R_2)C_2 + R_1C_1) + s^2R_1R_2C_1C_2}$$

en

$$H_{fb}(s) = \frac{N_{fb}(s)}{D(s)} = \frac{sR_1C_1}{1 + s((R_1 + R_2)C_2 + R_1C_1) + s^2R_1R_2C_1C_2}$$

In combinatie met (8.8) komen we op die manier tot:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{k}{1 + s((R_1 + R_2)C_2 + R_1C_1) + s^2R_1R_2C_1C_2 - ksR_1C_1} \\ &= \frac{k}{1 + s((R_1 + R_2)C_2 + (1 - k)R_1C_1) + s^2R_1R_2C_1C_2} \end{aligned}$$

Frequent nemen we  $R_1 = R_2$  en  $C_1 = C_2$ , zodat we de bovenstaande vergelijking kunnen vereenvoudigen:

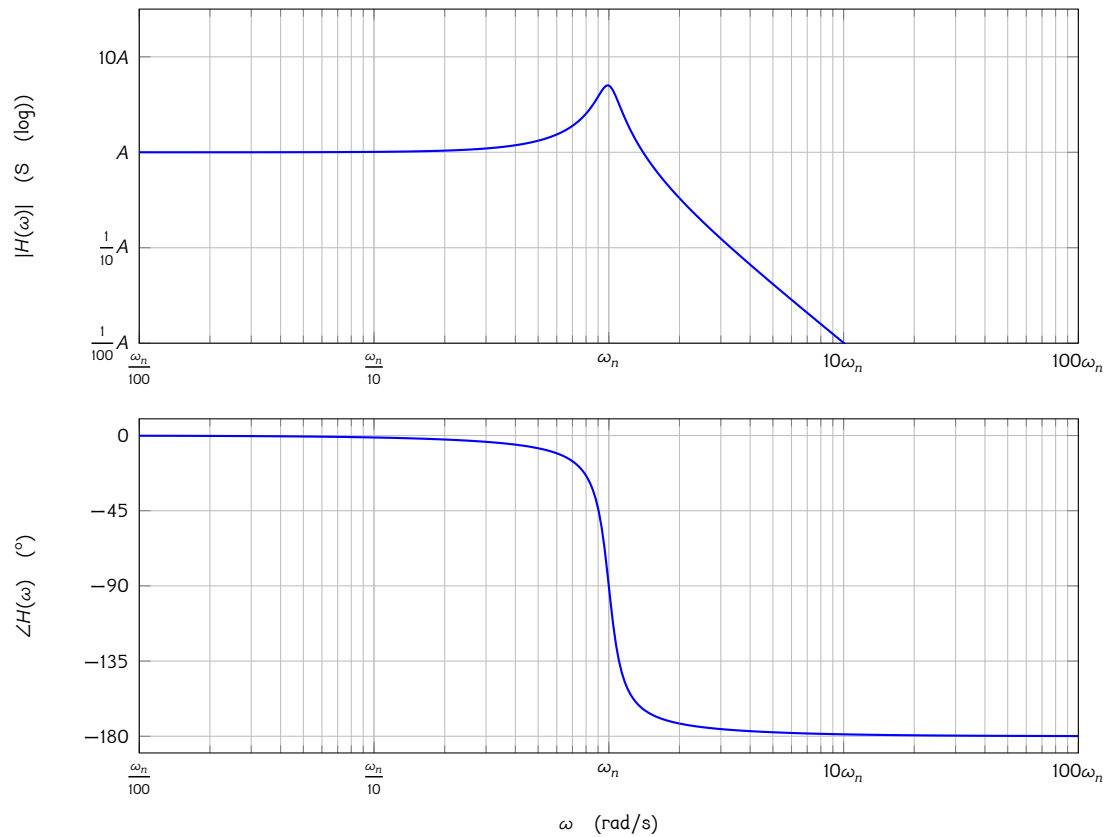
$$H(s) = \frac{k}{1 + s((3 - k)RC) + s^2R^2C^2}$$

We kunnen deze vergelijking verder omwerken tot de normaalvorm:

$$H(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

met

$$\begin{aligned} \omega_n &= \frac{1}{RC} \\ \zeta &= \frac{3 - k}{2} \end{aligned}$$



Figuur 8.12: Filterkarakteristiek van een Sallen-Key laagdoorlaatfilter met centerfrequentie  $\omega_n$  en  $\zeta = 0.1$

De kwaliteitsfactor  $Q$  van het filter kan gemakkelijk berekend worden i.f.v.  $\zeta$ :

$$Q = \frac{1}{2\zeta}$$

De filterkarakteristiek voor  $\zeta = 0.1$  (d.w.z.  $Q = 5$ ) werd weergegeven in Figuur 8.12. Voor een zinvol laagdoorlaatfilter, houden we best  $Q < \sqrt{2}/2$ . Hierdoor treedt geen piek op in het frequentiedomein.

---

## Oefeningen

**Oefening 8.7.5-1:** Maak een actief filter met een inverterende versterker met als transferfunctie:

$$H(s) = -10 \cdot \frac{s + 10000}{s + 63000}$$

Schets eerst het Bode-diagram van deze transferfunctie.

Maak een filter dat een

1. serieschakelingen van impedanties gebruikt.
2. parallelschakelingen van impedanties gebruikt.

Voer impedantieschaling uit, zodat de spoelen niet groter zijn dan 1 mH en de condensatoren niet groter dan 1  $\mu$ F.

**Oefening 8.7.5-2:** Maak een actief filter met een niet-inverterende versterker met als transferfunctie:

$$H(s) = 50 \cdot \frac{s + 630000}{s + 10000}$$

Schets eerst het Bode-diagram van deze transferfunctie.

Maak een filter dat een

1. serieschakelingen van impedanties gebruikt.
2. parallelschakelingen van impedanties gebruikt.

Voer impedantieschaling uit, zodat de spoelen niet groter zijn dan 1 mH en de condensatoren niet groter dan 1  $\mu$ F.

**Oefening 8.7.5-3:** Teken zelf een high-pass Sallen-Key filter waarbij je gebruik maakt van het feedbacknetwerk van Oefening 5.5-5.

- Bepaal de transferfunctie van dit negatieve feedbackfilter.
- Bepaal de kantelfrequentie  $f_0$  en de dempingsfactor van dit filter.
- Kies waarden voor de elementen uit dit filter om de volgende specificaties te halen:

$$f_0 = 1 \text{ kHz} \qquad \zeta = 0.9$$

Maak jezelf het leven gemakkelijk en kies  $R_1 = R_2$  en  $C_1 = C_2$ .

- Teken een Bode-diagram.

**Oefening 8.7.5-4:** Teken zelf een multiple feedback low-pass filter waarbij je gebruik maakt van het feedbacknetwerk van Oefening 5.5-6.

- Bepaal de transferfunctie van dit negatieve feedbackfilter.
- Bepaal de kantelfrequentie en de dempingsfactor van dit filter.
- Kies waarden voor de elementen uit dit filter om de volgende specificaties te halen:

$$f_0 = 100 \text{ kHz} \qquad \zeta = 0.8$$

Maak jezelf het leven gemakkelijk en kies  $C_1 = C_2$ .

- Teken een Bode-diagram.

**Oefening 8.7.5-5:** Teken zelf een multiple feedback high-pass filter waarbij je gebruik maakt van het feedbacknetwerk van Oefening 5.5-7.

- Bepaal de transferfunctie van dit negatieve feedbackfilter.
- Bepaal de kantelfrequentie en de dempingsfactor van dit filter.
- Kies waarden voor de elementen uit dit filter om de volgende specificaties te halen:

$$f_0 = 100 \text{ Hz} \qquad \zeta = 1$$

Maak jezelf het leven gemakkelijk en kies  $C_1 = C_2$ .

- Teken een Bode-diagram.

### 8.7.6 Ontwerpstrategie

De elementen waaruit een filter bestaat ( $R$ ,  $L$  en  $C$ ) bepaalt de filterkarakteristiek: de filter is een functie van de elementwaarden. Het ontwerp van een filter komt in die zin overeen met het inverteren van deze functie.

We kunnen deze inversie uitvoeren op 2 manieren:

1. met de hand, of
2. met de computer (m.b.v. een optimizer of exhaustief (brute force), d.w.z. door alle mogelijkheden uit te rekenen en de beste te nemen).

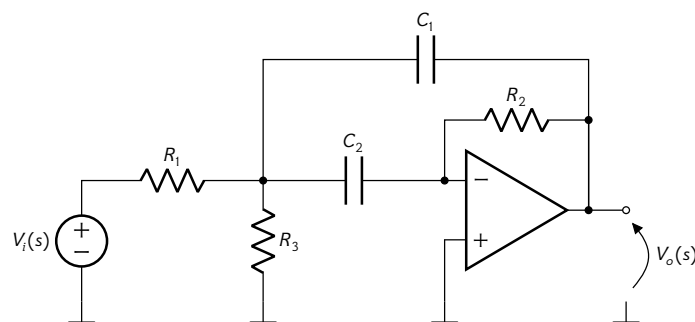
#### 8.7.6.1 Met de hand

Een goede handmatige strategie bestaat uit 4 stappen:

1. het bepalen van de gepaste specificatieparameters van het filter, d.w.z. versterkingsniveaus, kantelfrequenties en dempingsfactoren,
2. het schrijven van deze parameters in termen van tijdconstanten ( $RC$ ,  $L/R$ ,  $\sqrt{LC}$ ) en verhoudingsgrootheden (verhoudingen van weerstanden, condensatoren en spoelen),
3. het bepalen van deze tijdconstanten en verhoudingsgrootheden m.b.v. een invloedsdiagram,
4. het vertalen van de tijdconstanten en verhoudingsgrootheden in concrete elementwaarden ( $R$ ,  $L$ ,  $C$ ) waarbij je extra voorwaarden m.b.t. impedanties kan opleggen.

We illustreren dit m.b.v. twee voorbeelden:

**Ontwerp van een MFB banddoorlaatfilter** Beschouw het onderstaande filter:



We bepalen reeds eerder de bijhorende transferfunctie:

$$H(s) = -\frac{N_{ff}(s)}{N_{fb}(s)} = -\frac{sR_2R_3C_2}{R_1 + R_3 + sR_1R_3(C_1 + C_2) + s^2R_1R_2R_3C_1C_2}$$

We vormen deze transferkarakteristiek om naar de normaalvorm:

$$\begin{aligned} H(s) &= -\frac{1}{R_1 C_1} \frac{s}{s^2 + s \frac{1}{R_2} \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} + \frac{R_1 + R_3}{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2}} \\ &= -K \frac{s R_2 C_2 \cdot \omega_n^2}{s^2 + s \frac{\omega_n}{Q} + \omega_n^2} \end{aligned}$$

met:

$$\begin{aligned} \omega_n &= \sqrt{\frac{R_1 + R_3}{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2}} = \sqrt{\frac{1}{R_2 (R_1 \parallel R_3) C_1 C_2}} \\ Q &= R_2 \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \omega_n = R_2 (C_1 \parallel C_2) \omega_n \\ K &= \frac{R_3}{R_1 + R_3} \end{aligned}$$

De opdracht is om dit filter te ontwerpen rekening houdend met de volgende specificaties:

- $\omega_n = 2\pi \cdot 10 \text{ kHz}$ ,
- zonder piek d.w.z.  $Q = 1$ ,
- bij  $\omega_n$  een versterking hebben van 10 dB.

d.w.z.

$$\left\{ \begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{R_2 (R_1 \parallel R_3) C_1 C_2}} &= 2\pi \cdot 10 \text{ kHz} \\ R_2 (C_1 \parallel C_2) &= \frac{1}{2\pi \cdot 10 \text{ kHz}} \\ \frac{R_3}{R_1 + R_3} R_2 C_2 &= \frac{10^{\frac{10}{20}}}{2\pi \cdot 10 \text{ kHz}} \end{aligned} \right.$$

We herkennen hierin enkele clusters van parameters die steeds terugkomen:

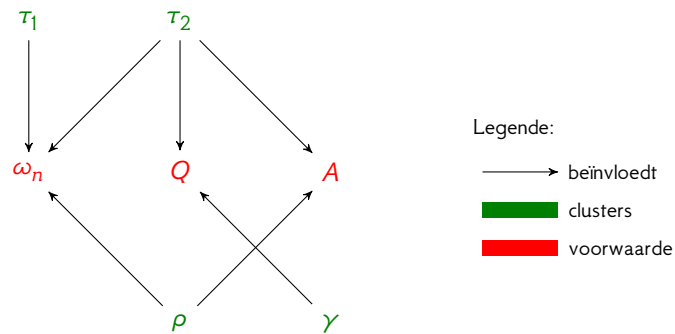
$$\tau_1 = R_1 C_1 \quad \tau_2 = R_2 C_2 \quad \rho = \frac{R_3}{R_1 + R_3} \quad \gamma = \frac{C_1}{C_1 + C_2}$$

Dit laat toe de vergelijkingen te herschrijven:

$$\left\{ \begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{\tau_1 \tau_2 \rho}} &= 2\pi \cdot 10 \text{ kHz} \\ \tau_2 \gamma &= \frac{1}{2\pi \cdot 10 \text{ kHz}} \\ \rho \tau_2 &= \frac{10^{\frac{10}{20}}}{2\pi \cdot 10 \text{ kHz}} \end{aligned} \right.$$

waarbij we weten  $\tau_1 > 0$ ,  $\tau_2 > 0$ ,  $0 < \rho \leq 1$ ,  $0 < \gamma \leq 1$ .

Het verband tussen deze tijdconstanten en verhoudingsfactoren en de specificatieparameters kunnen we weer-geven in een invloedsdiagram:



We noemen de hoeveelheid voorwaarden waarin een cluster betrokken is de invloedsgraad.

Op basis van dit begrip kunnen we een prioriteitsvolgorde opstellen voor de berekeningen:

1. geef absolute voorrang aan voorwaarden die maar door 1 cluster worden bepaald.
2. orden de clusters van hoge invloedsgraad naar lage en geef daarbij als tweede prioriteitscriterium voorrang aan verhoudingsclusters (die zijn immers beperkt in waarde).
3. voor de eerste parameters die je vastlegt, ga je redelijke waarden moeten kiezen; vaak kan dat op basis van extra (impedantie)voorwaarden.

Concreet wil dit zeggen dat we in dit geval eerst  $\tau_2$  zullen vastleggen, dan  $\rho$  en tot slot  $\tau_1$  en  $\gamma$ .

Dit leidt tot de volgende ketting:

1. We starten met  $\tau_2$  en zoeken een redelijke startwaarde: bv.  $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $C_2 = 1 \text{ nF} \Rightarrow \tau_2 = R_2 C_2 = 10 \mu\text{s}$
2. Uit de voorwaarde m.b.t.  $A$  volgt:

$$\rho = \frac{10^{\frac{10}{20}}}{2\pi \cdot 10 \text{ kHz} \cdot \tau_2} = 5.0329$$

Dit is onmogelijk, want  $\rho$  moet kleiner zijn dan 1.

We lossen dit op door  $\tau_2$  bv. 10× groter te nemen.

3. Poging 2:  $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $C_2 = 10 \text{ nF} \Rightarrow \tau_2 = R_2 C_2 = 100 \mu\text{s}$
4. Uit de voorwaarde m.b.t.  $A$  volgt nu:

$$\rho = \frac{10^{\frac{10}{20}}}{2\pi \cdot 10 \text{ kHz} \cdot \tau_2} = 0.50329$$

OK!

5. We bepalen vervolgens eerst  $\gamma$  uit de voorwaarde m.b.t.  $Q$ :

$$\gamma = \frac{1}{\omega_n \tau_2} = 0.1592$$

OK, deze is haalbaar.

6. Tot slot bepalen we  $\tau_1$  uit de voorwaarde voor  $\omega_n$ :

$$\tau_1 = \frac{1}{\tau_2 \rho (2\pi \cdot 10 \text{ kHz})^2} = 5.0329 \mu\text{s}$$

Samengevat levert dit het volgende stelsel op:

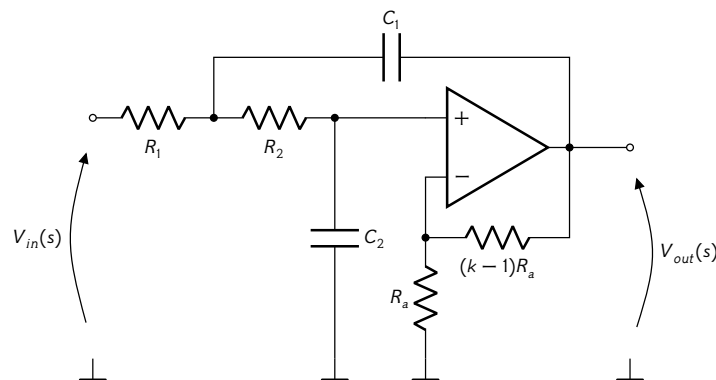
$$\begin{cases} R_1 C_1 = 5.0329 \mu\text{s} \\ R_2 C_2 = 100 \mu\text{s} \\ \frac{R_3}{R_1 + R_3} = 0.50329 \\ \frac{C_1}{C_1 + C_2} = 0.1592 \end{cases}$$

Dit is een stelsel met 5 parameters en 4 vergelijkingen, d.w.z. één vrijheidsgraad. Laten we  $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$  kiezen om voldoende ingangsimpedantie te realiseren.

Het niet lineaire stelsel valt nu gemakkelijk als een ketting van domino-stenen op te lossen:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{5.0329 \mu\text{s}}{R_1} = 503.29 \text{ pF} \\ C_2 &= \frac{1 - 0.1592}{0.1592} 503.29 \text{ pF} = 2.659 \text{ nF} \\ R_2 &= \frac{100 \mu\text{s}}{C_2} = 37.608 \text{ k}\Omega \\ R_3 &= \frac{0.50329}{1 - 0.50329} R_1 = 10.132 \text{ k}\Omega \end{aligned}$$

Ontwerpen van een Sallen-Key laagdoorlaatfilter Beschouw het onderstaande filter:



We bepalen reeds eerder de bijhorende transferfunctie:

$$H(s) = \frac{k}{1 + s((R_1 + R_2)C_2 + (1 - k)R_1C_1) + s^2 R_1 R_2 C_1 C_2}$$

We vormen deze transferkarakteristiek om naar de normaalvorm:

$$\begin{aligned} H(s) &= k \frac{\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}{s^2 + s \frac{(R_1 + R_2)C_2 + (1 - k)R_1 C_1}{R_1 R_2 C_1 C_2} + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \\ &= K \frac{\omega_n^2}{s^2 + \frac{\omega_n}{Q} s + \omega_n^2} \end{aligned}$$

met:

$$\begin{aligned} \omega_n &= \sqrt{\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \\ Q &= \frac{R_1 R_2 C_1 C_2}{(R_1 + R_2)C_2 + (1 - k)R_1 C_1} \omega_n \end{aligned}$$

De opdracht is om dit filter te ontwerpen rekening houdend met de volgende specificaties:

- $\omega_n = 2\pi \cdot 20 \text{ kHz}$
- met een kleine piek, d.w.z.  $Q = 2$ ,
- een laagfrequentversterking van 40 dB

d.w.z.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}} = 2\pi \cdot 20 \text{ kHz} \\ \frac{1}{\frac{1}{(R_1 \parallel R_2) C_1} + \frac{1-k}{R_2 C_2}} = \frac{2}{2\pi \cdot 20 \text{ kHz}} \\ k = 10^{\frac{40}{20}} \end{array} \right.$$

We herkennen enkele clusters van parameters die steeds terugkomen:

$$\tau_1 = R_1 C_1 \qquad \tau_2 = R_2 C_2 \qquad \tau_3 = (R_1 \parallel R_2) C_1$$

Dit laat toe de vergelijkingen te herschrijven:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\frac{1}{\tau_1 \tau_2}} = 2\pi \cdot 20 \text{ kHz} \\ \frac{1}{\frac{1}{\tau_3} + \frac{1-k}{\tau_2}} = \frac{2}{2\pi \cdot 20 \text{ kHz}} \\ k = 10^{\frac{40}{20}} \end{array} \right.$$

waarbij we weten  $\tau_1 > 0$ ,  $\tau_2 > 0$ ,  $\tau_3 > 0$ ,  $k > 1$

Het verband tussen deze tijdconstanten en verhoudingsfactoren en de specificatieparameters kunnen we weergeven in een invloedsdiagram: Op basis van dit diagram hanteren we als volgorde om de clusters vast te leggen:  $k$ ,  $\tau_2$ ,  $\tau_1$  en tot slot  $\tau_3$ .

Dit leidt tot de volgende ketting:

1. Uit de voorwaarde m.b.t.  $A$  volgt:

$$k = 100$$

2. Vervolgens kiezen we  $\tau_2$  als een realistische waarde:

$$\tau_2 = 1 \mu\text{s}$$

3. Uit de voorwaarde voor  $\omega_n$  volgt dan:

$$\tau_1 = \frac{1}{(2\pi \cdot 20 \text{ kHz})^2 \tau_2} = 63.326 \mu\text{s}$$

4. Uit de voorwaarde m.b.t.  $Q$ :

$$\tau_3 = \frac{1}{2\pi \cdot 10 \text{ kHz} - \frac{1-k}{\tau_2}} = 10.095 \text{ ns}$$

Samengevat levert dit het volgende stelsel op:

$$\left\{ \begin{array}{l} k = 100 \\ R_1 C_1 = 63.326 \mu\text{s} \\ R_2 C_2 = 1 \mu\text{s} \\ (R_1 \parallel R_2) C_1 = 10.095 \text{ ns} \end{array} \right.$$

Dit is een stelsel met 5 parameters en 4 vergelijkingen, d.w.z. één vrijheidsgraad. Laten we  $R_1 = 100 \text{ k}\Omega$  kiezen om voldoende ingangsimpedantie te hebben. Het niet lineaire stelsel valt nu gemakkelijk als een ketting van domino-stenen op te lossen:

$$\begin{aligned} k &= 100 \\ C_1 &= \frac{63.326 \mu\text{s}}{R_1} = 633.26 \text{ pF} \\ R_2 &= \frac{1}{\frac{C_1}{1 \mu\text{s}} + \frac{1}{R_1}} = 15.939 \Omega \\ C_2 &= \frac{1 \mu\text{s}}{R_2} = 62.740 \text{ nF} \end{aligned}$$

### 8.7.6.2 Met een optimizer

Deze methode vermijdt het expliciet inverteren van de karakteristieke parameters van de filterfunctie. De strategie bestaat er dan in de zoekruimte (voor een optimizer, of exhaustief) te beperken tot de haalbare waarden van de elementen/componenten die gebruikt worden. Vervolgens kan voor elk van de te onderzoeken combinaties (voorgesteld door de optimizer, of exhaustief) de performantie uitgerekend worden en vergeleken met de gewenste waarden.

Probeer zelf eens een script te schrijven in je favoriete programmeertaal om dit te doen!

Voor het eerste voorbeeld zou dit uitgaande van de gangbare E12 waarden<sup>5</sup> voor weerstanden (tussen  $100 \Omega$  en  $100 \text{ k}\Omega$  en condensatoren (tussen  $1 \text{ pF}$  en  $1 \text{ mF}$ ) de volgende waarden opleveren:

$$\begin{array}{ll} R_1 = 2.7 \text{ k}\Omega & C_1 = 1.8 \text{ nF} \\ R_2 = 12 \text{ k}\Omega & C_2 = 4.7 \text{ nF} \\ R_3 = 22 \text{ k}\Omega \text{ of } 27 \text{ k}\Omega \text{ of } 33 \text{ k}\Omega & \end{array}$$

Voor het tweede voorbeeld levert dit uitgaande van de gangbare E24 waarden voor de weerstanden (tussen  $100 \Omega$  en  $1 \text{ M}\Omega$ ) en E12 waarden voor de condensatoren (tussen  $1 \text{ pF}$  en  $1 \text{ mF}$ ) de volgende waarden op:

$$\begin{array}{lll} R_1 = 240 \Omega & R_3 = 680 \Omega & C_1 = 3.3 \text{ nF} \\ R_2 = 12 \text{ k}\Omega & R_4 = 68 \text{ k}\Omega & C_2 = 6.8 \text{ nF} \end{array}$$

## 8.8 Besluit

In dit hoofdstuk zagen we dat we zowel actieve als passieve filters kunnen gebruiken.

Bij de passieve filters is vermogenverlies doorgaans een belangrijke factor, waardoor we ons meestal beperken tot LC-ladders. Bijkomend kunnen we passieve filters niet opsplitsen als een cascade van deelfilters. Het ontwerp ervan moet dus in zijn geheel gebeuren, wat doorgaans niet zo eenvoudig is.

<sup>5</sup>Zoek online op wat deze E-waarden zijn, of raadpleeg de vervolgcursus.

Bij actieve filters kunnen we wel een niet-triviale filterfunctie opdelen in een cascade van biquad-filters. We zagen een aantal manieren om deze filters te ontwerpen, gaande van een eenvoudige matching van impedanties/admittanties gevolgd door een gepaste schaling tot het ontwerp van standaard biquad-configuraties met positieve of negatieve feedback.

Tot slot gingen we in op een gepaste strategie voor het ontwerp van dergelijke filters.

Filters zijn een courant onderdeel van quasi elk elektronicasysteem. Zelfs klassieke digitale signaalverwerkings-systemen hebben filters nodig bij de bemonstering of de reconstructie van analoge signalen. Je leert er later alles over in je cursus Digitale Signaalverwerking (DSP). Je weet nu alvast hoe je met ideale elementen een dergelijk filter kan opbouwen, analyseren en ontwerpen.

## Overzicht

9.1	Inleiding . . . . .	194
9.2	Relaxatie-oscillatoren . . . . .	194
9.3	Harmonische oscillatoren . . . . .	196
9.3.1	Basisprincipes . . . . .	197
9.3.2	Oscillatoren met een eenvoudig banddoorlaatfilter: de Wienbrugoscillator . . . . .	198
9.3.3	Oscillatoren met een LC-tank . . . . .	200
9.4	Besluit . . . . .	217

In dit hoofdstuk bestuderen we het gedrag van oscillatoren, opnieuw op basis van netwerken met ideale elementen. De analyse situeert zich opnieuw voornamelijk in het frequentiedomein.

Door bij deze studie geen rekening houden met de niet-idealiteiten van reële componenten, kunnen we de analyse eenvoudig houden en zo tot de essentie van hun werking doordringen.

Een goed begrip van de ideale werking van deze netwerken is het fundament om later een goed begrip te krijgen van reële schakelingen, waarbij we dan heel duidelijk kunnen zien welke invloed de niet-idealiteiten hebben op het gedrag. Het geeft ons ook een 'baseline', d.w.z. een idee van wat we maximaal uit een reële schakeling kunnen halen.

Het feit dat we alle niet-idealiteiten weglaten, zorgt er ook voor dat weinig van de netwerken die we in dit hoofdstuk behandelen zullen werken zoals hier beschreven. In sommige gevallen zullen de overeenkomstige schakelingen zonder de nodige aanpassingen zelfs helemaal niet werken! Enige bescheidenheid is dus opnieuw aan de orde na het afronden van dit hoofdstuk.

## 9.1 Inleiding

De essentie van oscillatoren is dat ze periodieke signalen opwekken (die we dan kunnen gebruiken als testsignaal (in een generator), als draaggolf (in een analoge telecom-applicatie) of als kloksignaal (in een digitale applicatie)).

Tot nu toe had elk netwerk dat we hebben leren kennen een ingang en een uitgang. Oscillatoren passen niet in dat rijtje. Ze hebben geen ingang maar produceren autonoom een uitgang die met de nodige regelmaat op en neer gaat, m.a.w. oscilleert.

De tijdsduur van een dergelijke op-en-neer-gang noemen we de periode  $T$  van de oscillator, en  $f = 1/T$  de frequentie van de oscillator.

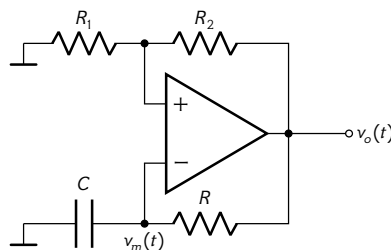
We onderscheiden twee types oscillatoren:

Relaxatie-oscillatoren: dit zijn netwerken waarin een niet-lineair element (typisch een Schmitt trigger) een energiehoudend element oplaadt tot een bepaald maximumniveau en dan weer ontlaaft tot een bepaald minimumniveau waarna de cyclus opnieuw start; dit soort oscillatoren genereert doorgaans een niet-sinusoidaal signaal (driehoeksgolf, blokgolf, zaagtand, ...).

Harmonische oscillatoren: dit zijn netwerken waarin een resonantie wordt opgebouwd (en onderhouden) net zoals de slinger van een klok in gang gehouden wordt door bij elke slag wat energie aan de beweging toe te voegen; dit soort oscillatoren produceert doorgaans een sinusgolf.

## 9.2 Relaxatie-oscillatoren

De basis voor een relaxatie-oscillator is een inverterende Schmitt trigger waarvan de uitgang een condensator aan de ingang op- en ontlaaft.

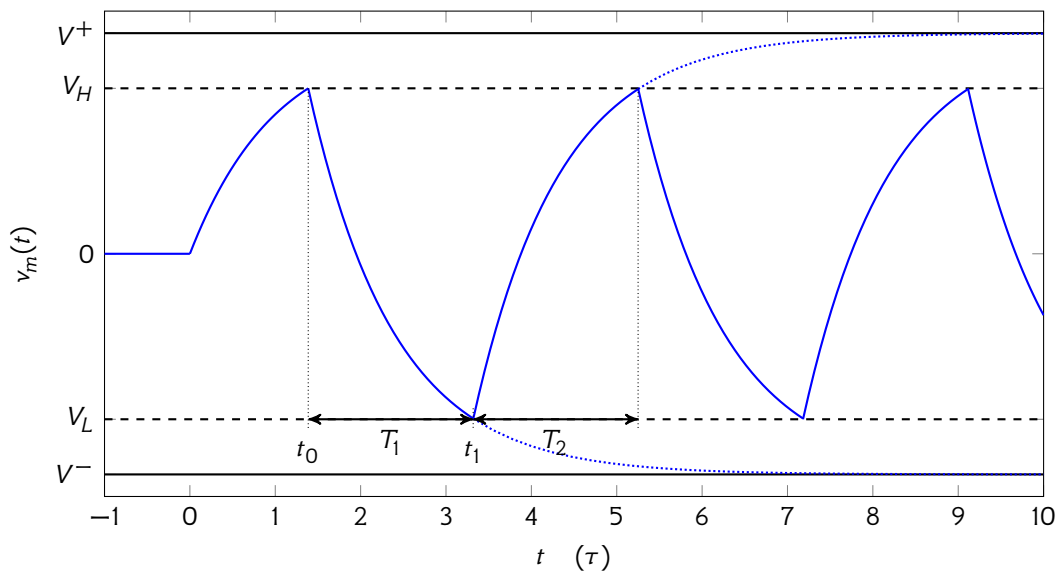


De omklapspanningen van deze Schmitt trigger kunnen gemakkelijk bepaald worden als:

$$V_L = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V^-$$

$$V_H = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V^+$$

Laten we veronderstellen dat bij  $t = 0$  de condensator geen lading draagt. De schakeling start op de onbalans van de opamp (en zelfs indien er geen onbalans moest zijn, op de ruis aanwezig op de ingangsklemmen van de opamp). Als gevolg gaat de uitgang van de opamp in saturatie richting positieve of negatieve voedingsspanning, laten we veronderstellen de positieve voedingsspanning. Als gevolg daarvan wordt de condensator langzaam



Figuur 9.1: Werking van de relaxatie-oscillator in het tijd domein

opgeladen, tot de potentiaal op de negatieve klem van de opamp de hoge klapspanning ( $V_H$ ) bereikt, waardoor de trigger omklapt. Als gevolg hiervan gaat de condensator ontladen worden, totdat de potentiaal op de negatieve klem van de opamp de lage klapspanning ( $V_L$ ) bereikt. Als gevolg hiervan klapt de trigger weer om en begint de cyclus opnieuw.

Het laden en ontladen van de condensator gebeurt met tijdconstante  $\tau = RC$ .

Deze cyclus werd weergegeven in Figuur 9.1.

De opgaande curve in regimetoestand kan beschreven worden als:

$$v_{m,op}(t) = V_L + (V^+ - V_L)(1 - e^{-\frac{t-t_1}{\tau}})$$

waarbij  $t_1$  de tijd is waarop de opgaande curve start. De neergaande curve kan beschreven worden als:

$$v_{m,neer}(t) = V_H + (V^- - V_H)(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\tau}})$$

waarbij  $t_0$  de tijd is waarop de neergaande curve start.

Hieruit kan op eenvoudige wijze de periode van de oscillator bepaald worden:

$$T = \underbrace{\tau \ln \frac{V^- - V_H}{V^- - V_L}}_{T_1} + \underbrace{\tau \ln \frac{V^+ - V_L}{V^+ - V_H}}_{T_2}$$

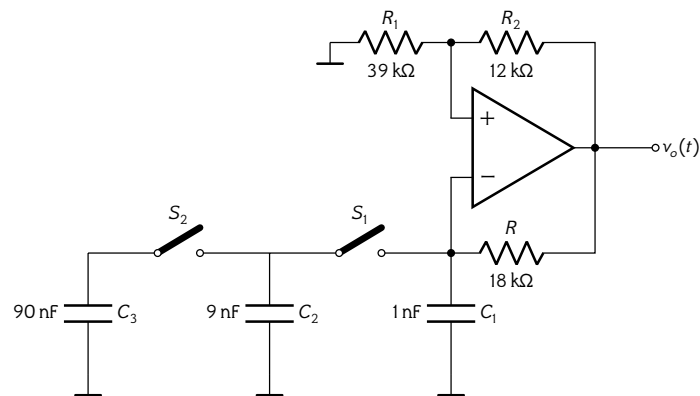
De uitgang van de opamp  $v_o(t)$  levert een blokgolf op met dezelfde periode. Kan je hem tekenen op Figuur 9.1?

De duty cycle (of symmetrie) van deze golven kan geregeld worden door een offset op te tellen bij de klapspanningen. De periode/frequentie kan regelbaar gemaakt worden door  $R$  te vervangen door een variabele weerstand.

---

## Oefeningen

Oefening 9.2-1: Beschouw de onderstaande oscillator, gevoed met  $\pm 5\text{ V}$ .



Bereken de frequentie van de oscillator voor alle mogelijke standen van de schakelaars. Teken de uitgangsspanning en de spanning op de negatieve klem van de opamp.

Oefening 9.2-2: Beschouw de oscillator van vorige oefening. Tussen welke waarde moet je de weerstand  $R$  regelbaar maken om telkens een bereik te hebben van  $10^n$  tot  $10^{n+1}$  hertz?

### 9.3 Harmonische oscillatoren

Harmonische oscillatoren zijn gemakkelijker te maken dan je denkt. Elke ontwerpingenieur die ooit een systeem met feedback heeft moeten ontwerpen (bv. een opamp of een regelkring) kan je in geuren en kleuren vertellen hoe elk ontwerp steeds een uitstekende oscillator bleek te zijn in plaats van een versterker of een regelaar. Nu, dergelijke verhalen zijn duidelijk aangedikt, want het adjectief 'uitstekend' mag je gerust weglaten. De oscillatoren die je per toeval maakt zijn doorgaans slechte oscillatoren: je weet niet op voorhand welke frequentie ze zullen hebben en ze zijn helemaal niet stabiel.

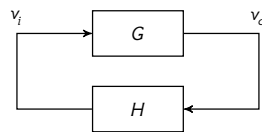
Om een oscillator zover te krijgen dat hij stabiel (bij een vooraf bepaalde frequentie) oscilleert, heb je naast feedback ook een element nodig dat de frequentie stabiel maakt. Dat element is een filter (vaak onder de vorm van een resonantiekring, wat een netwerk is dat niets liever doet dan trillen bij een welbepaalde frequentie). We duiken in de wereld van de feedback, de filters en de LC-tanks.

### 9.3.1 Basisprincipes

#### Oscillatie door feedback

Feedback zou het onderwerp van een op zich staande cursus kunnen zijn (en dat staat je ook nog te wachten wanneer je regeltechniek zal bestuderen). Voorlopig is ons doel echter om een ruw (intuïtief) beeld te krijgen dat net voldoende is om oscillatoren te begrijpen.

Beschouw het onderstaande blokdiagram van een teruggekoppeld elektronisch systeem. Signalen (d.w.z. spanningen in eenheid Volt) worden aangegeven met pijlen, bewerkingen op de signalen met blokjes. De bewerkingen  $G$  en  $H$  stellen een (frequentieafhankelijke) versterking voor.



We kunnen de volgende vergelijking schrijven bij het bovenstaande blokdiagram. We werken ineens in het frequentiedomein (m.a.w. we veronderstellen dat de signalen sinusvormig zijn), waarbij we veronderstellen dat de versterkingen  $G$  en  $H$  ook frequentie-afhankelijk kunnen zijn. Om de notatie leesbaar te houden schrijven we dit effect niet expliciet als  $G(\omega)$  en  $H(\omega)$ . De signalen  $v_i$  en  $v_o$  worden dus voorgesteld door (frequentie-afhankelijke) complexe getallen  $V_i$  en  $V_o$  waarvan de magnitude van het getal de magnitude van de sinus weergeeft en het argument van het complexe getal de fase van de sinus (zoals we geleerd hebben in Hoofdstuk 5).

$$\begin{cases} V_o = G V_i \\ V_i = H V_o \end{cases}$$

De combinatie van beide vergelijking leidt tot:

$$\begin{aligned} V_o &= G H V_o \\ V_o(1 - GH) &= 0 \end{aligned} \tag{9.1}$$

Deze vergelijking kan enkel correct zijn indien  $V_o = 0$  of indien  $GH = 1$ . De eerste situatie is niet interessant. De tweede wel, want die houdt in dat er een sinusvormig signaal met complexe voorstelling  $V_o$  kan ontstaan dat niet nul is en waarbij het systeem dit signaal in stand houdt.

Op basis daarvan kunnen we het volgende oscillatiecriterium formuleren:

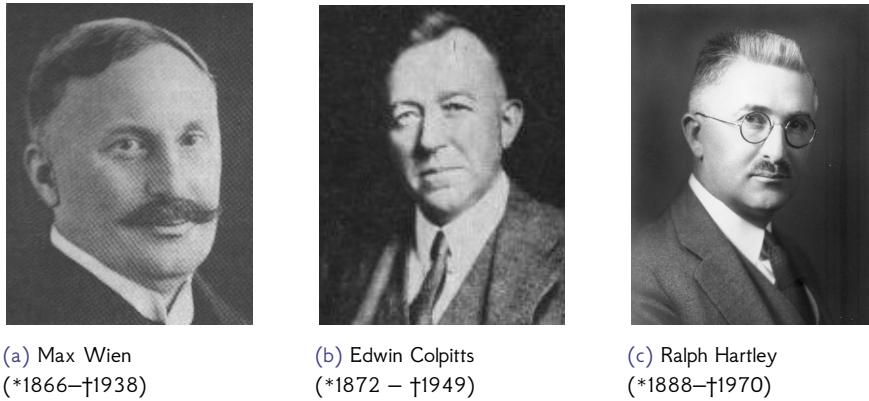
#### Barkhausen criterium voor oscillatie

De nodige voorwaarde voor oscillatie in een teruggekoppeld lineair systeem, met voorwaartse versterking  $G$  en terugkoppelversterking  $H$  is:

$$GH = 1 \angle k2\pi$$

#### Opmerkingen

- Merk op dat het rechterlid gelijk is aan 1, maar heel expliciet stelt dat  $|GH| = 1$  en dat de fasevertraging die de cascade  $GH$  realiseert een veelvoud van  $2\pi$  moet zijn, zodat de teruggekoppelde sinus exact in fase weer aan de ingang van het systeem verschijnt.
- Het criterium vermeldt 'nodige' voorwaarde, wat wil zeggen dat deze voorwaarde geen 'voldoende' voorwaarde is. Nog even geduld: in je cursus regeltechniek leer je daar alles over.



Figuur 9.2: De drie grondleggers van de harmonische oscillatoren

- Merk op dat het Barkhausen criterium het mogelijk maakt dat in (9.1) een  $V_o$  ontstaat verschillend van nul, maar dat de grootte van  $V_o$  er niet door vastgelegd wordt. Daarom is het belangrijk dat bij de start van de oscillator de lusversterking (tijdelijk) groter is dan 1 en zakt naar de waarde 1 van zodra een redelijke grootte van  $V_o$  bereikt wordt.

Indien deze versterking onvoldoende zakt, dan zal  $V_o$  zo groot worden dat er clipping tegen de voedingsspanning ontstaat. Op zich is dat geen ramp, maar het creëert onnodige harmonischen die dan weer moeten weggefilterd worden door het filter dat de oscillatiefrequentie vastlegt. Dat kost onnodig vermogen en genereert ongewenste hoogfrequentstoringen.

#### Frequentieregeling m.b.v. een filter

Het is essentieel voor een goede oscillator, dat deze voorwaarde enkel geldt voor een welgedefinieerde frequentie. Om die reden hebben we een  $H$  nodig die ervoor zorgt dat het criterium maar voldaan is voor een welbepaalde frequentie. Daarvoor gebruiken we een banddoorlaatfilter of een LC-tank.

De grondleggers van de harmonische oscillatoren zijn Wien, Colpitts en Hartley (zie Figuur 9.2).

We onderzoeken hun werk in de volgende secties.

#### 9.3.2 Oscillatoren met een eenvoudig banddoorlaatfilter: de Wienbrugoscillator

De combinatie van een niet-inverterende versterker (zie Figuur 9.3a) met een passief banddoorlaatfilter (zie Figuur 9.3b) leidt tot een Wienbrugoscillator (zie Figuur 9.3c). De versterking van de niet-inverterende versterker bedraagt:

$$G = \frac{R_1 + R_2}{R_2}$$

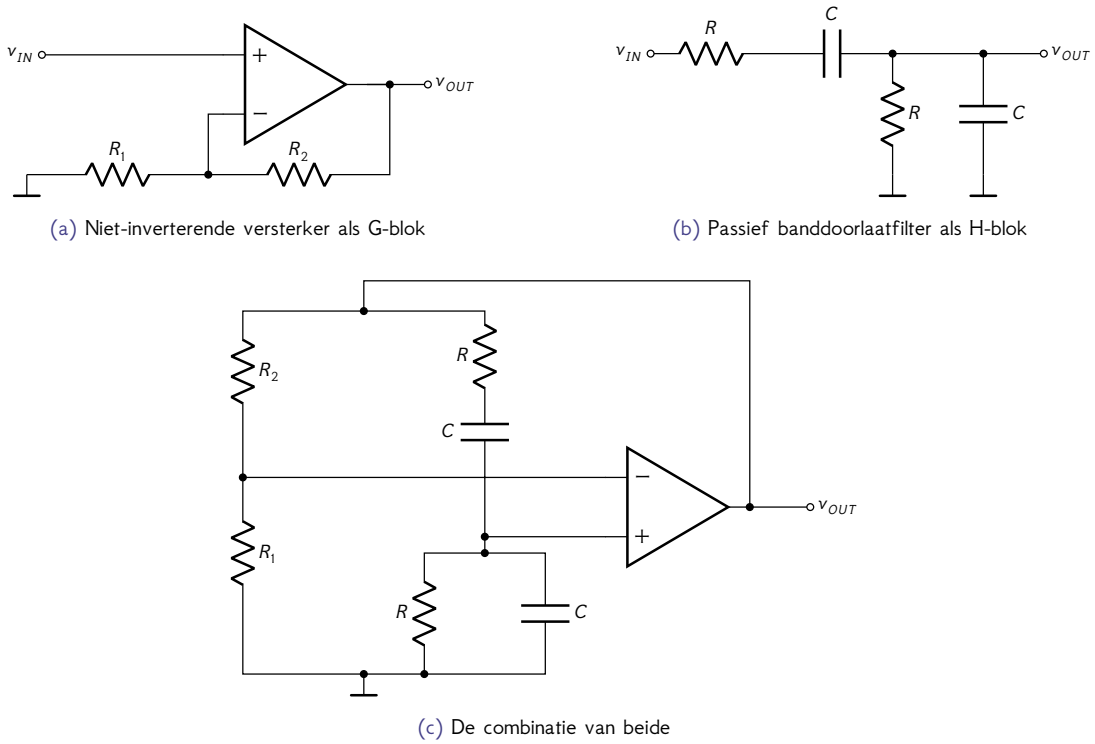
Indien we het passieve banddoorlaatfilter uitrekenen in het frequentiedomein (met de handige variabele  $s$ ), krijgen we:

$$H = \frac{V_{OUT}}{V_{IN}} = \frac{sRC}{(RC)^2 s^2 + 3RCs + 1}$$

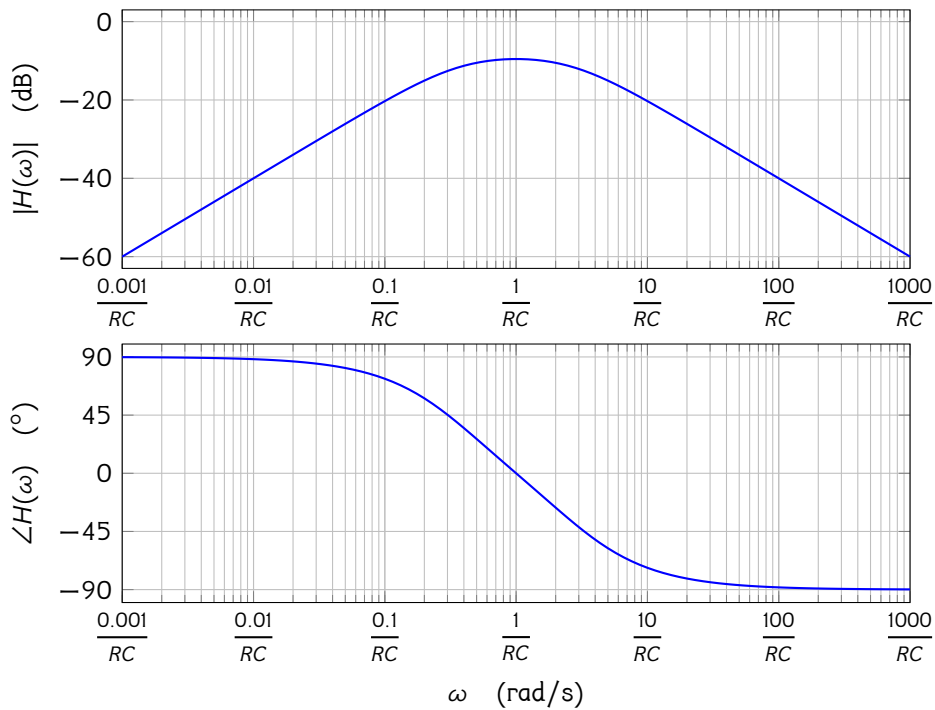
We vervangen  $s$  door  $j\omega$  en kunnen op deze manier een Bode-diagram maken van dit filter (zie Figuur 9.4).

Het is duidelijk een banddoorlaatfilter met als piekfrequentie  $\omega = \frac{1}{RC}$  en een maximale versterking van  $1/3$  (wat overeenkomt met ongeveer  $-9.5$  dB).

Indien we de niet-inverterende versterker een versterking van 3 geven (door bv.  $R_1 = 2R_2$ ), dan zal die de verzwakking van het filter perfect compenseren. De totale lusversterking wordt dan gelijk aan 1 zonder



Figuur 9.3: De Wienbrugoscillator



Figuur 9.4: Bode-diagram van het passieve filter van een Wienbrugoscillator

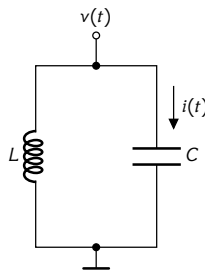
fasedraaiing. Hierdoor is het Barkhausen criterium voldaan. Bijkomend, van zodra  $\omega$  afwijkt van  $1/RC$ , zal de totale lusversterking ontoereikend zijn om een oscillatie in stand te houden. De oscillator zal dus een welgedefinieerde frequentie voortbrengen.

In de praktijk voorzien we voor weerstand  $R_1$  een weerstand die bij de start van de oscillator een iets kleinere weerstand heeft dan in regime, zodat de oscillator kan starten met een lusversterking net groter dan 1. Dit kan met een lamp met koolstoffilament, of met een FET die gepast geschakeld wordt als regelbare weerstand. Dat soort trucs ontdekken we later, als we het theoretische speelveld van de ideale netwerken verlaten om het veld van de reële schakelingen te verkennen.

De Wienbrugoscillator is een mooi voorbeeld van een harmonische oscillator. Het enige nadeel is dat de bandbreedte van het filterblok nog vrij groot is (in de ordegrrootte van een volledige decade). Dat moet beter kunnen. Welkom in de wereld van de LC-tanks.

### 9.3.3 Oscillatoren met een LC-tank

We onderzochten al eerder de frequentie-afhankelijke impedantie van een LC-tank. Laat ons dat nogmaals doen, maar op een andere manier. Beschouw de volgende parallelschakeling van een spoel en een condensator:



Het gedrag van deze tank in het tijddomein wordt beschreven m.b.v. de volgende vergelijkingen:

$$\begin{cases} i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \\ v(t) = -L \frac{di(t)}{dt} \end{cases}$$

Eliminatie van  $i(t)$  uit dit stelsel levert via

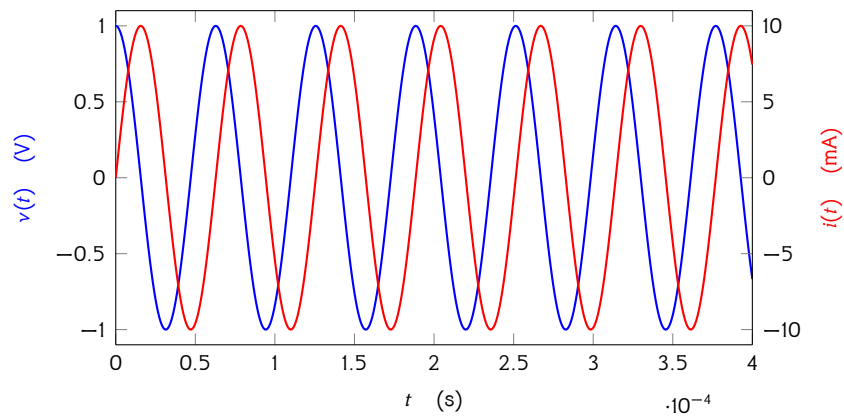
$$\begin{aligned} v(t) &= -L \frac{dC \frac{dv(t)}{dt}}{dt} \\ &= -LC \frac{d^2v(t)}{dt^2} \end{aligned}$$

de volgende differentiaalvergelijking op:

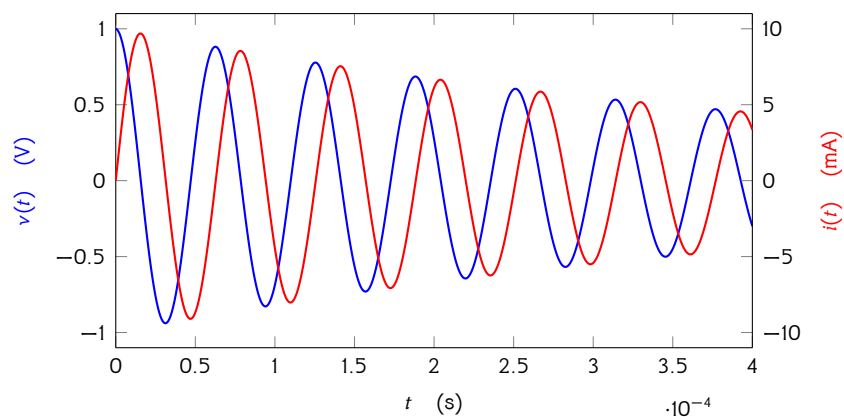
$$LC \frac{d^2v(t)}{dt^2} + v(t) = 0$$

De functie  $v(t) = A \sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right)$  is duidelijk een oplossing van deze vergelijking. In mensentaal: deze schakeling trilt graag volgens een sinusvormig patroon met een frequentie  $\omega = 1/\sqrt{LC}$ .

Deze trilling is in mensentaal als volgt te begrijpen. Veronderstel dat er zich op tijdstip  $t = 0$  een lading  $q$  op de condensator bevindt, en dat bij de start  $i(0) = 0$ . Deze lading  $q$  vormt een hoeveelheid energie die



Figuur 9.5: Verloop van stroom en spanning in een LC-tank zonder demping met  $L = 1 \text{ mH}$ ,  $C = 100 \text{ nF}$  en  $q(0) = 100 \text{ nC}$



Figuur 9.6: Verloop van stroom en spanning in een LC-tank met demping met  $L = 1 \text{ mH}$ ,  $C = 100 \text{ nF}$ ,  $R = 4 \Omega$  en  $q(0) = 100 \text{ nC}$

in de condensator opgeslagen zit. Deze lading komt overeen met een condensatorspanning  $v = q/C$  die een stroom  $i$  door de spoel zal veroorzaken. Hierdoor ontwikkelt de spoel een magnetisch veld dat de energie van de condensator overneemt, tot diens spanning nul is. Op dat ogenblik zal de stroom door de spoel maximaal zijn. Het magnetische veld van de spoel zal dan zijn energie weer afgeven door de stroom op gang te houden, waardoor de condensator een negatieve spanning ontwikkelt. Die negatieve spanning wordt maximaal in absolute waarde op het moment dat alle energie uit de spoel is verdwenen (d.w.z. wanneer  $i = 0$ ). De condensator zal nu zijn energie terug aan de spoel doorgeven door een tegengestelde stroom te veroorzaken. Dit pingpongspel kan oneindig lang blijven doorgaan. Deze situatie wordt geïllustreerd in Figuur 9.5.

Maar, helaas is dit sprookje te mooi om waar te zijn: er zit immers een parasitaire weerstand in de spoel (en - minder belangrijk maar toch - ook in de condensator). Die weerstand zal per cyclus een stukje energie uit de kring omzetten in warmte, waardoor de oscillatie uitdempt zoals weergegeven in Figuur 9.6.

We gaan de oscillatie dus in stand moeten houden door telkens wat energie terug toe te voegen aan de tank, net zoals de slinger van een oude klok telkens wat extra energie krijgt via het echappement dat zijn energie haalt uit de potentiële energie van een gewicht dat aan een koord hangt.

Hoe bouwen we nu met zo'n tank een filter? Voor we zien hoe, gaan we nog een idee bijvoegen, en dat is dat we de tank op een bijzondere manier kunnen schakelen zodat hij ook ineens een extra  $180^\circ$  fasedraaiing realiseert. Dat heeft als voordeel dat we een inverterende (i.p.v. een niet-inverterende) versterker kunnen gebruiken, die we (zoals we zullen zien in het vervolgdeel van deze cursus) kunnen realiseren met één transistor.

Het idee is dat we de ofwel de capaciteit, ofwel de spoel in twee kunnen delen en zo komen we tot de twee schakelingen die hieronder geschetst worden. Ze geven aanleiding tot de twee basisoscillatoren gebaseerd op een LC-tank:

- met gesplitste capaciteit: de Colpitts oscillator (zie Figuur 9.7a)
- met gesplitste spoel: de Hartley oscillator (zie Figuur 9.7b)



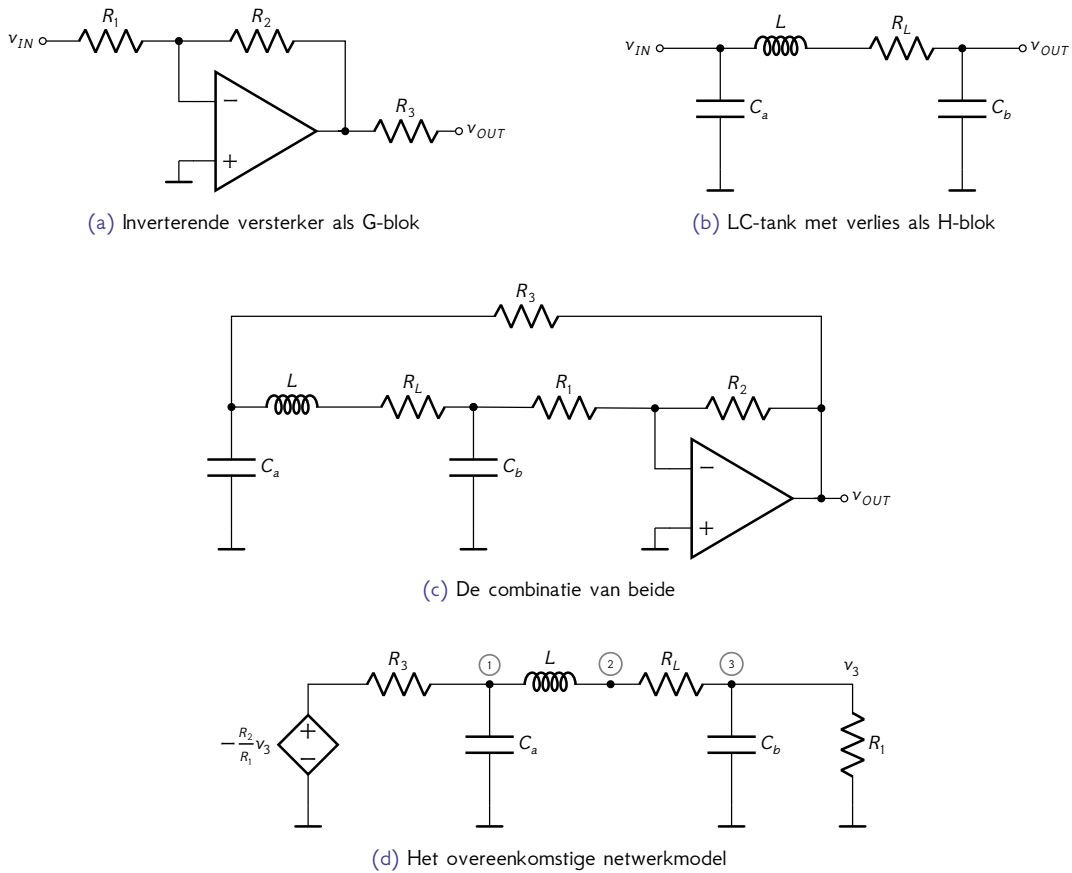
Figuur 9.7: De twee basis schema's om een LC-tank als filter te gebruiken

We zullen aantonen dat deze tanks zich gedragen als een soort slinger die heen en weer slingert omheen de grond als ophangpunt, waardoor  $v_a$  en  $v_b$  sinusvormig op en neer dansen, in (bijna) perfecte tegenfase bij de oscillatiefrequentie  $\omega_n$ .

Het idee is dan om de oscillatie op  $v_b$  te meten en terug te koppelen, zodat we  $v_a$  in tegenfase wat extra energie kunnen geven om de natuurlijke demping tegen te gaan. Zo blijft de oscillatie in stand. Net zoals je bij het echappement van een klok de slinger bij elke heen-en-weer beweging (zachtjes) wat extra energie moet geven, moet dat ook bij de LC-tanks gebeuren. Een LC-tank ga je dus nooit rechtstreeks met een spanningsbron aansturen, maar wel met een stroombron, of een spanningsbron met een aanzienlijke uitgangsweerstand (in serie).

### 9.3.3.1 Colpitts oscillator

De Colpitts oscillator bestaat als ideaal netwerk uit een inverterende opampversterker met een extra uitgangsweerstand in het voorwaartse pad (G-blok) en een LC-filter met gesplitste capaciteit in het terugkoppelpad (H-blok). Deze blokken en de samengestelde configuratie vind je in Figuur 9.8.

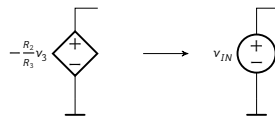


Figuur 9.8: De Colpitts oscillator

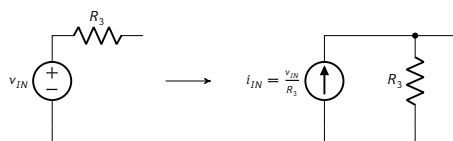
Indien je de drang voelt om meteen de schakeling van Figuur 9.8d met een MNA-analyse te lijf te gaan, dan moet ik je vragen om deze hooliganeske drang even te onderdrukken. Je herinnert je ongetwijfeld uit sectie 5.5 op pagina 72 dat symbolische uitdrukkingen voor netwerkfuncties van lineaire schakelingen snel heel groot worden. Om dergelijke vergelijkingen nog goed te kunnen analyseren, moet je ze doelgericht kunnen vereenvoudigen. Dit soort inzicht kan je best opbouwen door eerst de schakeling te vereenvoudigen, ze dan grondig te bestuderen en naderhand stelselmatig meer detail toe te voegen.

We passen deze techniek een eerste keer toe.

- We knippen de terugkoppeling door en vervangen de afhankelijke spanningsbron door een onafhankelijke spanningsbron:

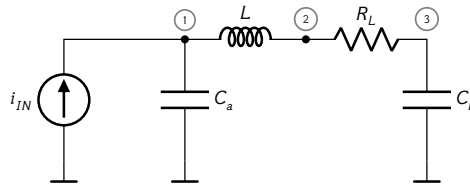


- We vervangen de spanningsbron samen met  $R_3$  door een Norton-equivalent:



- Verder veronderstellen we dat  $R_3$  en  $R_1$  het netwerk niet belasten door te veronderstellen dat ze zo groot zijn, dat we ze kunnen weglaten.

Zo krijgen we de onderstaande schakeling:



Deze schakeling is behapbaar om ze met symbolen uit te rekenen. Tijd om onze MNA-analysedrang de vrije loop te laten. MNA-analyse levert het volgende stelsel op:

$$\begin{bmatrix} C_a s + \frac{1}{Ls} & -\frac{1}{Ls} & 0 \\ -\frac{1}{Ls} & \frac{1}{R_L} + \frac{1}{Ls} & -\frac{1}{R_L} \\ 0 & -\frac{1}{R_L} & C_b s + \frac{1}{R_L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{IN} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

#### Filtergedrag van de Colpitts LC-tank

M.b.v. de regel van Cramer leiden we af:

$$\frac{V_3}{I_{IN}} = \frac{1}{s(LC_a C_b s^2 + C_a C_b R_L s + C_a + C_b)} \quad (9.2)$$

Indien we de noemer van deze uitdrukking terug omwerken naar de normaalvorm, dan krijgen we:

$$\begin{aligned} \frac{V_3}{I_{IN}} &= \frac{1}{LC_a C_b} \frac{1}{s(s^2 + \frac{R_L}{L}s + \frac{1}{L \frac{C_a C_b}{C_a + C_b}})} \\ &= \frac{1}{LC_a C_b} \frac{1}{s(s^2 + \frac{\omega_n}{Q}s + \omega_n^2)} \end{aligned} \quad (9.3)$$

met

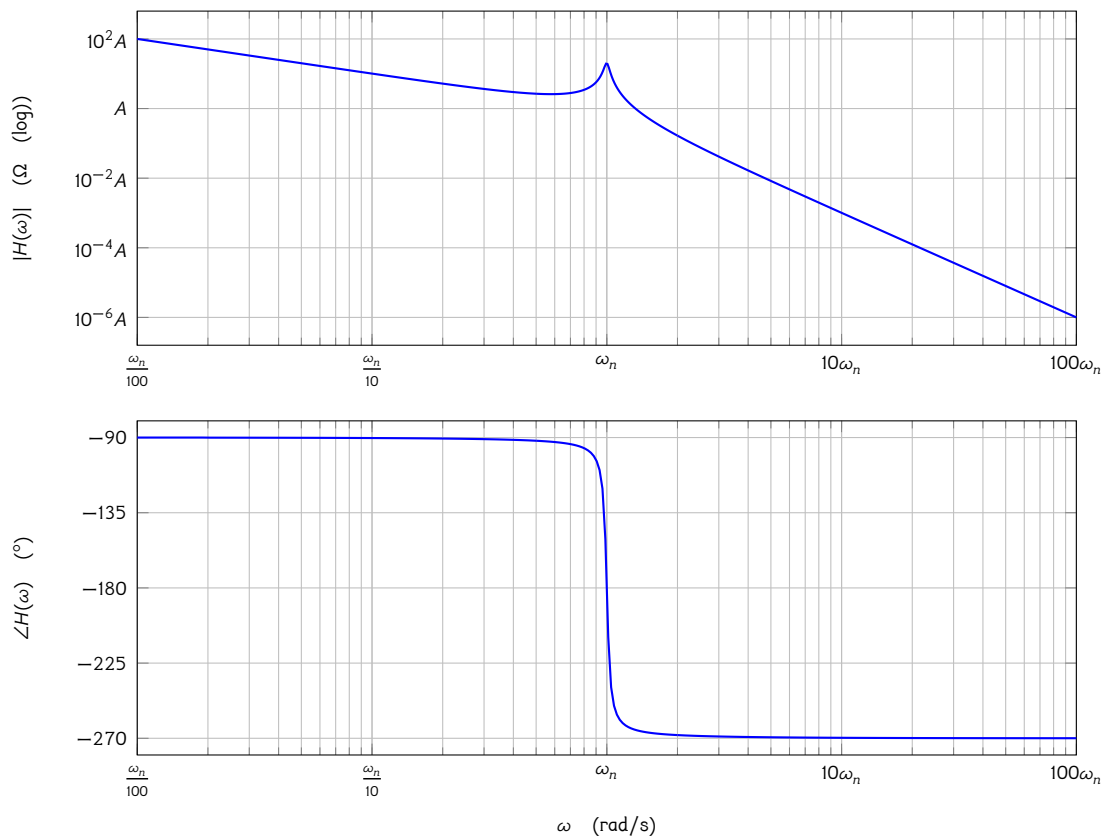
$$\begin{aligned} \omega_n &= \frac{1}{\sqrt{LC_s}} \\ Q &= \frac{\omega_n}{\frac{R_L}{L}} = \frac{1}{R_L} \sqrt{\frac{L}{C_s}} \end{aligned}$$

waarbij  $C_s$  de serieschakelingswaarde is van  $C_a$  en  $C_b$ :

$$C_s = \frac{C_a C_b}{C_a + C_b}$$

De bode-plot van (9.3) vind je in Figuur 9.9. De piek in de versterking treedt op bij  $\omega_n$  en kan je eenvoudig vinden door  $s = j\omega_n$  in te vullen in (9.3) en de absolute waarde te berekenen:

$$\begin{aligned} \left| \frac{V_3}{I_{IN}} \right| &= \left| \frac{1}{LC_a C_b} \frac{1}{j\omega_n (\cancel{\omega_n^2} + \frac{\omega_n}{Q} j\omega_n + \cancel{\omega_n^2})} \right| \\ &= \left| \frac{1}{LC_a C_b} \frac{-1}{\omega_n \frac{\omega_n^2}{Q}} \right| \\ &= \frac{Q}{\omega_n^3 LC_a C_b} \end{aligned}$$



Figuur 9.9: Bode diagram van de LC-tank, met  $Q = 20$  en  $A = 1/(\omega_n(C_a + C_b))$

We zien op dit diagram duidelijk dat de LC-tank enkel een fasedraaiing van  $180^\circ$  oplevert voor  $\omega = \omega_n$  en dat de versterking gevoelig daalt indien we afwijken van deze frequentie. Het doel is duidelijk: de Barkhausen voorwaarde beperken tot een hele smalle frequentieband.

De spanningsversterking van de Colpitts LC-tank bij  $\omega_n$

We kunnen ook de spanningsversterking  $V_3/V_1$  berekenen uit de MNA-analyse. Hopelijk kunnen we zo het tegenfasegedrag van de tank vaststellen. We leiden  $V_3/V_1$  af m.b.v. de volgende ketting:

$$\frac{V_3}{V_1} = \frac{V_3}{I_{IN}} \cdot \frac{I_{IN}}{V_1} = \frac{V_3}{I_{IN}} \Big/ \frac{V_1}{I_{IN}}$$

We passen terug de regel van Cramer toe en vinden:

$$\frac{V_1}{I_{IN}} = \frac{LC_b s^2 + R_L C_b s + 1}{s(LC_a C_b s^2 + C_a C_b R_L s + C_a + C_b)}$$

In combinatie met (9.2), levert dit het volgend resultaat op:

$$\frac{V_3}{V_1} = \frac{1}{LC_b s^2 + R_L C_b s + 1}$$

Dit is op het eerste zicht een vreemd resultaat. We zien immers niet meteen de tegenfase-oscillatie van de twee zijden van de tank, nl.  $V_1$  en  $V_3$ . Bijkomend lijkt het verband tussen beide spanningen enkel afhankelijk te zijn van  $C_b$  en niet van  $C_a$ ?! Schijn bedriegt. Het tegenfasegedrag, geldt immers enkel voor  $\omega = \omega_n$ . Indien we

$s = j\omega_n$  stellen, dan kunnen we de laatste vergelijking verder naar het verwachte resultaat leiden:

$$\frac{V_3}{V_1} = \frac{1}{LC_b s^2 + R_L C_b s + 1}$$

$$\downarrow \quad s = j\omega_n = \frac{j}{\sqrt{L \frac{C_a C_b}{C_a + C_b}}}$$

$$\frac{V_3}{V_1} \Big|_{s=j\omega_n} \approx \frac{1}{1 - \frac{C_a + C_b}{C_a} + jR_L \sqrt{\frac{C_b}{C_a}} \sqrt{\frac{C_a + C_b}{L}}}$$

De laatste term van de noemer kan je verwaarlozen bij courante waarden van de parameters. Probeer bijvoorbeeld:

$$C_a = C_b \approx 1 \mu\text{F} \qquad L \approx 1 \text{ mH} \qquad R_L \approx 100 \text{ m}\Omega$$

De laatste term geeft eigenlijk het warmteverlies weer waardoor de LC-tank langzaam uitdempt.

Conclusie:

$$\frac{V_3}{V_1} \Big|_{s=j\omega_n} \approx \frac{1}{1 - \frac{C_a + C_b}{C_a}} = -\frac{C_a}{C_b}$$

We kunnen dus nu het Barkhausen criterium formeel neerschrijven:

$$\underbrace{\left(-\frac{R_2}{R_1}\right)}_G \underbrace{\left(-\frac{C_a}{C_b}\right)}_H = 1 \angle k2\pi \quad \Leftrightarrow \quad \frac{R_2}{R_1} \frac{C_a}{C_b} = 1$$

Niet voor watjes: de volledige analyse

We keren terug naar Figuur 9.8d en gaan dit netwerk te lijf met in onze herinnering de vorige afleidingen en de wetenschap dat de invloed van niet-oneindige  $R_1$  en  $R_3$  beperkt hoort te blijven.

$$\begin{bmatrix} C_a s + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{Ls} & -\frac{1}{Ls} & 0 \\ -\frac{1}{Ls} & \frac{1}{R_L} + \frac{1}{Ls} & -\frac{1}{R_L} \\ 0 & -\frac{1}{R_L} & C_b s + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_3} V_{IN} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hieruit kunnen we opnieuw afleiden welk filtergedrag de LC-tank vertoont, maar ditmaal extra belast door  $R_1$  en  $R_3$ :

$$\frac{V_3}{V_{IN}} = \frac{R_1}{C_a C_b L R_1 R_3 s^3 + (C_a L R_3 + C_b L R_1 + C_a C_b R_1 R_3 R_L) s^2 + (L + C_a R_1 R_3 + C_b R_1 R_3 + C_a R_3 R_L + C_b R_1 R_L) s + R_1 + R_3 + R_L}$$

Voor heel lage frequenties ( $\omega \rightarrow 0$  wat wil zeggen  $s \rightarrow 0$ ) krijgen we

$$\frac{V_3}{V_{IN}} = \frac{R_1}{R_1 + R_3 + R_L}$$

wat heel logisch is, aangezien voor heel lage frequenties, de condensatoren open ketens zijn en de spoel een kortsluiting. We krijgen dus een potentiometrische deling. We zijn niet op zoek naar dit laagfrequent gedrag en zullen daarom de constante term van de noemer verwaarlozen. Zo krijgen we:

$$\frac{V_3}{V_{IN}} = \frac{R_1}{s(C_a C_b L R_1 R_3 s^2 + (C_a L R_3 + C_b L R_1 + C_a C_b R_1 R_3 R_L) s + L + C_a R_1 R_3 + C_b R_1 R_3 + C_a R_3 R_L + C_b R_1 R_L)}$$

Wat opvalt, is dat  $R_1$  en  $R_3$  bijna in elke term van de noemer voorkomen, en dat indien we deze elementen factoriseren uit de noemer, de coëfficiënt van de hoogste graadsterm van de noemer daardoor exact dezelfde

wordt als in (9.2). Anders bekeken: aangezien  $R_1$  en  $R_3$  verwaarloosbaar zouden moeten zijn, kan het niet zijn dat ze alle termen in de noemer beïnvloeden. Uiteenfactoriseren moet dus een stap in de goede richting zijn:

$$\frac{V_3}{V_{IN}} = \frac{1/R_3}{s \left( C_a C_b L s^2 + \left( \frac{1}{R_1} C_a L + \frac{1}{R_3} C_b L + C_a C_b R_L \right) s + \frac{L}{R_1 R_3} + C_a + C_b + C_a \frac{R_L}{R_1} + C_b \frac{R_L}{R_3} \right)}$$

Vermits  $R_L \ll R_1$  en  $R_L \ll R_3$ , moeten ook

$$C_a \frac{R_L}{R_1} \ll C_a \qquad C_b \frac{R_L}{R_3} \ll C_b$$

en bijgevolg

$$\frac{V_3}{V_{IN}} \approx \frac{1/R_3}{s \left( C_a C_b L s^2 + \left( \frac{1}{R_1} C_a L + \frac{1}{R_3} C_b L + C_a C_b R_L \right) s + \frac{L}{R_1 R_3} + C_a + C_b \right)}$$

Omwerken tot een normaalvorm leidt tot:

$$\frac{V_3}{V_{IN}} \approx \frac{\frac{1}{R_3 C_a C_b L}}{s \left( s^2 + \left( \frac{1}{R_1 C_b} + \frac{1}{R_3 C_a} + \frac{R_L}{L} \right) s + \frac{1}{R_3 C_a R_1 C_b} + \frac{C_a + C_b}{L C_a C_b} \right)}$$

Waaruit we kunnen afleiden:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{L C_s} + \frac{1}{\tau_a \tau_b}} \quad \text{met } C_s = \frac{C_a C_b}{C_a + C_b}$$

$$Q = \frac{\omega_n}{\frac{R_L}{L} + \frac{1}{\tau_a} + \frac{1}{\tau_b}} = \frac{\omega_n}{\frac{R_L}{L} \left( 1 + \frac{\tau_L}{\tau_a} + \frac{\tau_L}{\tau_b} \right)}$$

$$\tau_a = R_3 C_a$$

$$\tau_b = R_1 C_b$$

$$\tau_L = \frac{L}{R_L}$$

De spanningsversterking bij  $\omega_n$  wordt daardoor:

$$\begin{aligned} \left. \frac{V_3}{V_{IN}} \right|_{s=j\omega_n} &\approx \frac{\frac{1}{R_3 C_a C_b L}}{j\omega_n \left( \cancel{\omega_n^2} + \left( \frac{1}{\tau_a} + \frac{1}{\tau_b} + \frac{R_L}{L} \right) j\omega_n + \cancel{\omega_n^2} \right)} \\ &= -\frac{\frac{1}{R_3 C_a C_b L}}{\omega_n^2 \left( \frac{1}{\tau_a} + \frac{1}{\tau_b} + \frac{R_L}{L} \right)} \\ &= -\frac{Q}{\omega_n^3 R_3 C_a C_b L} \end{aligned}$$

We hebben nu voldoende informatie om het Barkhausen criterium neer te schrijven:

$$\underbrace{\left( -\frac{R_2}{R_1} \right)}_G \underbrace{\left( -\frac{Q}{\omega_n^3 R_3 C_a C_b L} \right)}_H = 1 \angle k2\pi \quad \Leftrightarrow \quad R_2 \cdot \frac{Q}{\omega_n^3 \tau_a \tau_b L} = 1$$

### Ontwerpprocedure voor opamp-gebaseerde Colpitts oscillatoren

1. Kies een combo van  $C_s$  en  $L$  die toelaat om de gewenste  $\omega_n$  te bereiken:

$$\omega_n \approx \frac{1}{\sqrt{LC_s}}$$

Hou rekening met het feit dat uiteindelijk  $Q < \frac{1}{R_L} \sqrt{\frac{L}{C_s}}$ . Je wil minstens  $Q \gg 10$ .

Zoek dus op of meet welke serieweerstand  $R_L$  de gekozen spoel  $L$  heeft.

2. Kies een benaderende versterkingsfactor  $k$  voor de LC-tank die tussen ordegrrootte 1/10 en 10 ligt. Hierdoor:

$$C_a = (k+1)C_s \qquad C_b = \frac{k+1}{k}C_s$$

3. Kies  $R_1$  en  $R_3$  in de ordegrrootte  $100 \Omega - 10 \text{ k}\Omega$  zodat

$$\frac{1}{\tau_a \tau_b} \ll \frac{1}{LC_s}$$

(voor een minimale afwijking op  $\omega_n$ ). Pas indien nodig  $L$ ,  $C_a$  of  $C_b$  aan.

4. Bereken

$$Q = \frac{\omega_n}{\frac{R_L}{L} \left( 1 + \frac{\tau_L}{\tau_a} + \frac{\tau_L}{\tau_b} \right)}$$

en controleer of  $Q$  niet teveel daalt onder invloed van  $\tau_a$  en  $\tau_b$ .

5. Bepaal

$$R_2 = \frac{\omega_n^3 \tau_a \tau_b L}{Q}$$

en beoordeel de redelijkheid van deze waarde ( $1 \text{ k}\Omega \leq R_2 \leq 1 \text{ M}\Omega$ ). Pas indien nodig  $k$  aan.

6. Indien nodig: verhoog  $R_2$  een beetje, zodat de oscillator goed start.

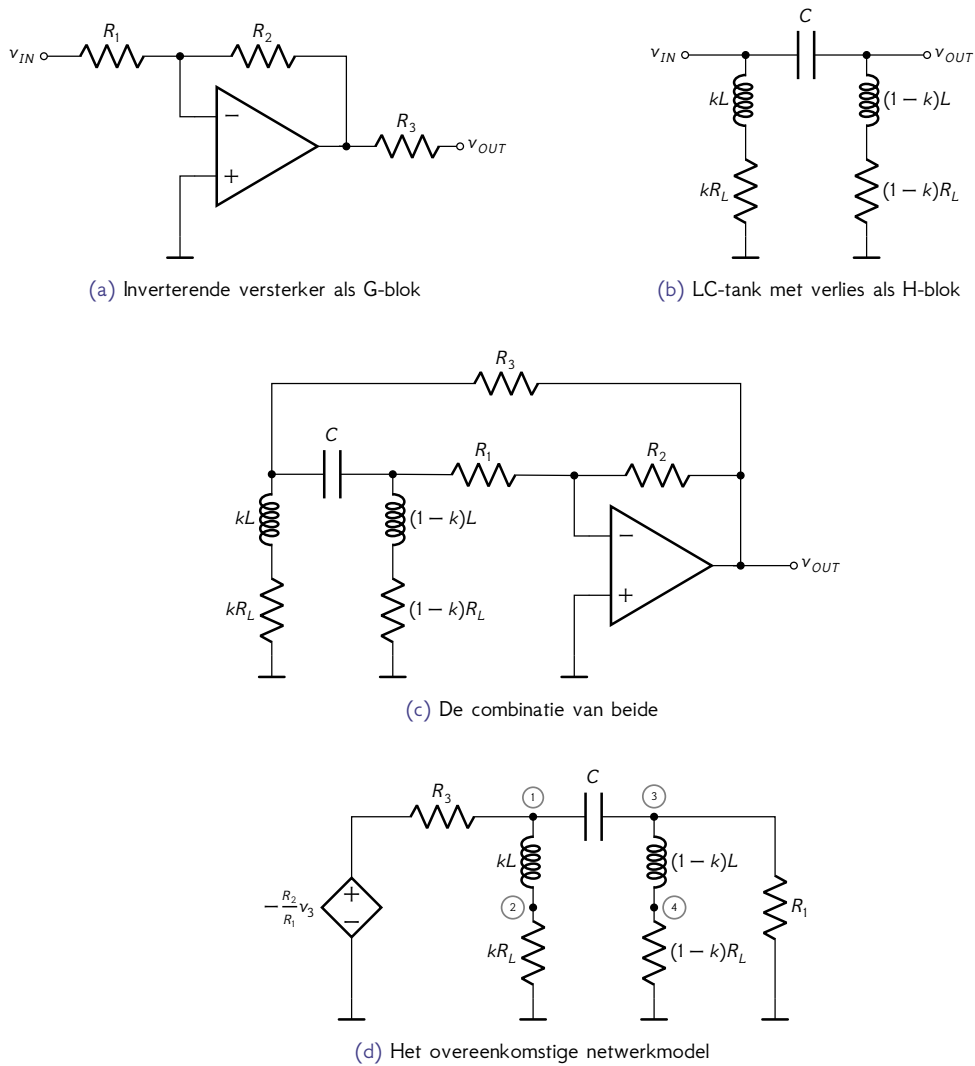
Hoewel de bovenstaande ontwerpprocedure de lezer mogelijk hoerageroep heeft ontlokt (een echte Colpitts oscillator ontworpen!), gebiedt de eerlijkheid te vermelden dat er wel wat kanttekeningen te maken zijn bij het bovenstaande:

- we gebruiken zelden Colpitts oscillatoren m.b.v. een opamp. We kunnen de opamp immers vervangen door één enkele transistor, wat naast een behoorlijke kostenreductie tevens zal toelaten oscillatoren met een veel hogere frequentie te maken dan mogelijk is met een opamp. Nog even geduld. Je leert er meer over in deel 2 van deze cursus.
- in het bovenstaande veronderstelden we dat de opamp ideaal is (d.w.z. een grote versterking heeft voor alle frequenties). In de praktijk zal dit niet het geval zijn, en beperkt de gain-bandwidth (GBW) van de opamp de maximaal haalbare oscillatiefrequentie. Wat is de gain-bandwidth van een opamp? Nog even geduld. Je leert erover in de deel 2 van deze cursus.

Zo, nu we terug met beide voeten op de grond staan, kunnen we verder met de Hartley oscillator.

#### 9.3.3.2 Hartley oscillator

De Hartley oscillator bestaat als ideaal netwerk uit een inverterende opampversterker met een extra uitgangswaerstand in het voorwaartse pad (G-blok) en een LC-filter met gesplitste spoel in het terugkoppelpad (H-blok).



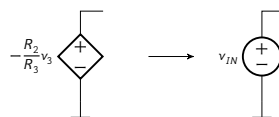
Figuur 9.10: De Hartley oscillator

Deze blokken en de samengestelde configuratie vind je in Figuur 9.10.

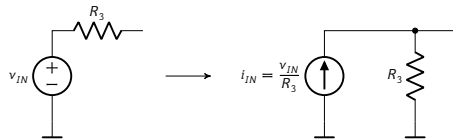
Merk op dat we de spoelen en hun serieweerstand niet  $L_a$ ,  $L_b$ ,  $R_a$  en  $R_b$  hebben genoemd omdat het belangrijk is dat de parasitaire weerstand van de spoel evenredig is met haar zelfinductiewaarde, vandaar de factoren  $k$  en  $k-1$ . De som van de waarden van beide spoelen en weerstanden levert de totale inductantie- en weerstandswaarde.

We proberen eerst het netwerk van Figuur 9.10d te vereenvoudigen voor een eerste analyse.

- We knippen de terugkoppeling door en vervangen de afhankelijke spanningsbron door een onafhankelijke spanningsbron:

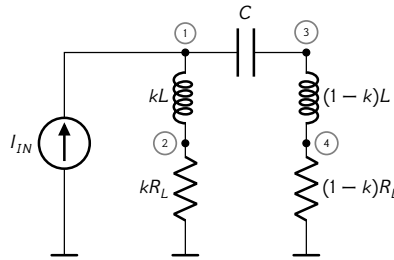


- We vervangen de spanningsbron samen met  $R_3$  door een Norton-equivalent:



- Verder veronderstellen we dat  $R_3$  en  $R_1$  het netwerk niet belasten door te veronderstellen dat ze zo groot zijn, dat we ze kunnen weglaten.

Zo krijgen we de onderstaande schakeling:



Deze schakeling is behapbaar om ze met symbolen uit te rekenen. Tijd om onze MNA-analysedrang de vrije loop te laten. MNA-analyse levert het volgende stelsel op:

$$\begin{bmatrix} Cs + \frac{1}{kLs} & -\frac{1}{kLs} & -Cs & 0 \\ -\frac{1}{kLs} & \frac{1}{kR_L} + \frac{1}{kLs} & 0 & 0 \\ -Cs & 0 & Cs + \frac{1}{(1-k)Ls} & -\frac{1}{(1-k)Ls} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{(1-k)Ls} & \frac{1}{(1-k)R_L} + \frac{1}{(1-k)Ls} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{IN} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

#### Filtergedrag van de Hartley LC-tank

M.b.v. de regel van Cramer leiden we af:

$$\frac{V_3}{I_{IN}} = \frac{Csk(1-k)(R_L + Ls)^2}{CLs^2 + CR_Ls + 1} \quad (9.4)$$

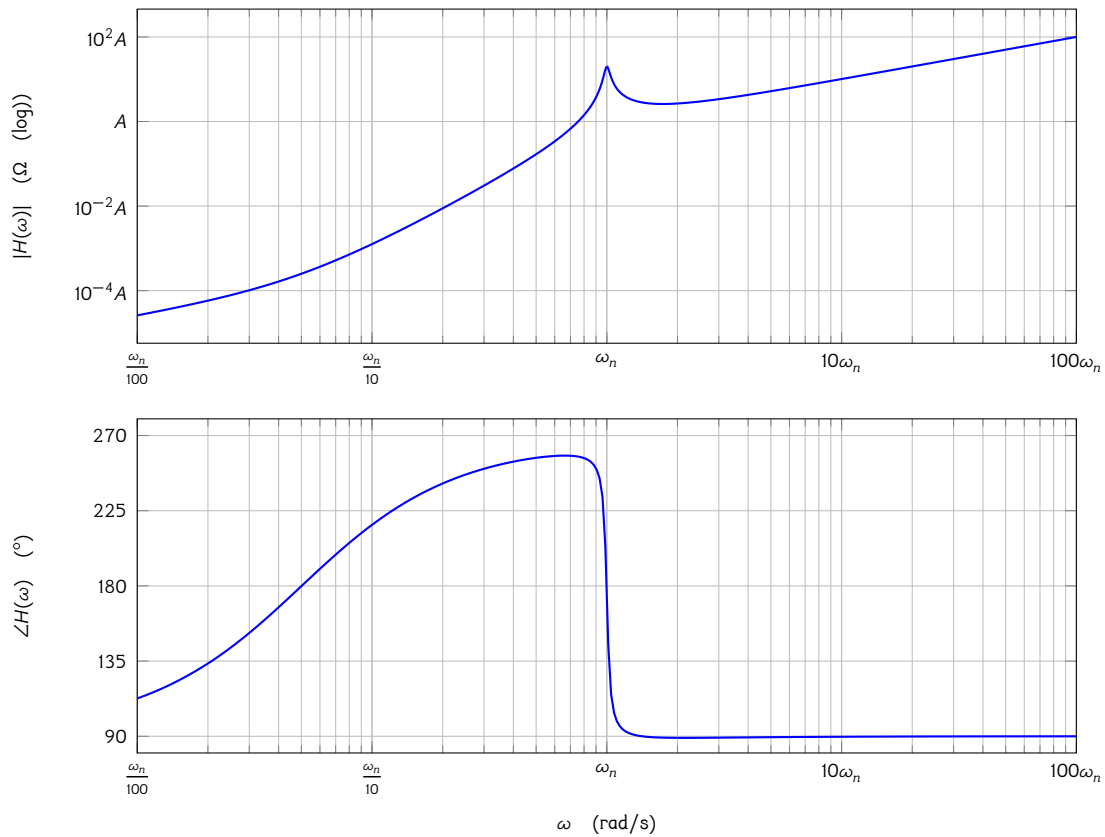
Indien we de noemer van deze uitdrukking terug omwerken naar de normaalvorm, dan krijgen we:

$$\begin{aligned} \frac{V_3}{I_{IN}} &= \frac{sLk(1-k)(s + \frac{R_L}{L})^2}{s^2 + \frac{R_L}{L}s + \frac{1}{LC}} \\ &= \frac{sLk(1-k)(s + \frac{R_L}{L})^2}{s^2 + \frac{\omega_n}{Q}s + \omega_n^2} \end{aligned} \quad (9.5)$$

met

$$\begin{aligned} \omega_n &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ Q &= \frac{\omega_n}{\frac{R_L}{L}} = \frac{1}{R_L} \sqrt{\frac{L}{C}} \end{aligned}$$

De bode-plot van (9.5) vind je in Figuur 9.11. De piek in de versterking treedt op bij  $\omega_n$  en kan je eenvoudig



Figuur 9.11: Bode diagram van de LC-tank, met  $Q = 20$  en  $A = \sqrt{\frac{L}{C}}k(1-k)$

vinden door  $s = j\omega_n$  in te vullen in (9.5) en de absolute waarde te berekenen:

$$\begin{aligned} \left| \frac{V_3}{I_{IN}} \right| &= \frac{\left| j\omega_n L k(1-k) \left( j\omega_n + \frac{R_L}{L} \right)^2 \right|}{\left| -\omega_n^2 + \frac{\omega_n}{Q} j\omega_n + \omega_n^2 \right|} \\ &= \frac{\omega_n^3 L k(1-k)}{\frac{\omega_n^2}{Q}} = Q\omega_n L k(1-k) \end{aligned}$$

waarbij we de teller extra vereenvoudigd hebben in de veronderstelling dat  $R_L/L \ll \omega_n$ .

We zien op dit diagram duidelijk dat de LC-tank op twee frequenties een fasedraaiing van  $180^\circ$  oplevert. We moeten ervoor zorgen dat enkel bij  $\omega_n$  de versterking voldoende groot is om te voldoen aan de Barkhausen voorwaarde.

#### De spanningsversterking van de Hartley LC-tank bij $\omega_n$

We kunnen ook de spanningsversterking  $V_3/V_1$  berekenen uit de MNA-analyse. Hopelijk kunnen we zo het tegenfasegedrag van de tank vaststellen. We leiden  $V_3/V_1$  af m.b.v. de volgende ketting:

$$\frac{V_3}{V_1} = \frac{V_3}{I_{IN}} \cdot \frac{I_{IN}}{V_1} = \frac{V_3}{I_{IN}} \bigg/ \frac{V_1}{I_{IN}}$$

We passen opnieuw de regel van Cramer toe en vinden:

$$\frac{V_1}{I_{IN}} = \frac{k(R_L + Ls)(CL(1-k)s^2 + CR_L(1-k)s + 1)}{CLs^2 + CR_Ls + 1}$$

In combinatie met (9.4) levert dit het volgend resultaat op:

$$\begin{aligned}\frac{V_3}{V_1} &= \frac{Cs(1-k)(R_L + Ls)}{CL(1-k)s^2 + CR_L(1-k)s + 1} \\ &= \frac{s\left(s + \frac{R_L}{L}\right)}{s^2 + \frac{R_L}{L}s + \frac{1}{(1-k)LC}}\end{aligned}$$

Net zoals bij de Colpitts oscillator is dit op het eerste zicht een vreemd resultaat. We zien immers niet meteen de tegenfase-oscillatie van de twee zijden van de tank, nl.  $V_1$  en  $V_3$ . Schijn bedriegt opnieuw. Het tegenfasegedrag, geldt immers enkel voor  $\omega = \omega_n$ . Indien we  $s = j\omega_n$  stellen, dan kunnen we de laatste vergelijking verder naar het verwachte resultaat leiden:

$$\begin{aligned}\frac{V_3}{V_1} &= \frac{s\left(s + \frac{R_L}{L}\right)}{s^2 + \frac{R_L}{L}s + \frac{1}{(1-k)LC}} \\ \downarrow s = j\omega_n &= \frac{j}{\sqrt{LC}} \\ \frac{V_3}{V_1} \Big|_{s=j\omega_n} &\approx \frac{\frac{j}{\sqrt{LC}}\left(\frac{j}{\sqrt{LC}} + \frac{R_L}{L}\right)}{-\frac{1}{LC} + \cancel{\frac{j}{\sqrt{LC}}} + \frac{1}{(1-k)LC}}\end{aligned}$$

De laatste term van de teller kan je verwaarlozen bij courante waarden van de parameters. Hetzelfde geldt voor het imaginaire deel van de noemer. Probeer bijvoorbeeld:

$$C_a = C_b \approx 1 \mu\text{F} \qquad L \approx 1 \text{ mH} \qquad R_L \approx 100 \text{ m}\Omega$$

De laatste term geeft eigenlijk het warmteverlies weer waardoor de LC-tank langzaam uitdempt. Conclusie (door teller en noemer te vermenigvuldigen met  $LC$ ):

$$\begin{aligned}\frac{V_3}{V_1} \Big|_{s=j\omega_n} &\approx \frac{-1}{-1 + \frac{1}{1-k}} \\ &= -\frac{(1-k)L}{kL}\end{aligned}$$

waarbij we in de laatste stap teller en noemer vermenigvuldigd hebben met  $L$  om duidelijk aan te geven dat het om de impedantieverhouding gaat tussen de spoelen.

We kunnen dus nu het Barkhausen criterium formeel neerschrijven:

$$\underbrace{\left(-\frac{R_2}{R_1}\right)}_G \underbrace{\left(-\frac{1-k}{k}\right)}_H = 1 \angle k2\pi \quad \Leftrightarrow \quad \frac{R_2}{R_1} \frac{1-k}{k} = 1$$

#### Niet voor doetjes: de volledige analyse

We keren terug naar Figuur 9.10d, maken van de afhankelijke bron opnieuw een onafhankelijke bron en gaan dit netwerk te lijf met in onze herinnering de vorige afleidingen en de wetenschap dat de invloed van niet-oneindige  $R_1$  en  $R_3$  beperkt hoort te blijven, d.w.z. dat hun waarde voldoende groot moet zijn.

$$\begin{bmatrix} Cs + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{Lks} & -\frac{1}{Lks} & -Cs & 0 \\ -\frac{1}{Lks} & \frac{1}{kR_L} + \frac{1}{Lks} & 0 & 0 \\ -Cs & 0 & Cs + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{Ls(1-k)} & -\frac{1}{Ls(1-k)} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{Ls(1-k)} & +\frac{1}{R_L(1-k)} + \frac{1}{Ls(1-k)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_3} V_{IN} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hieruit kunnen we opnieuw afleiden welke filtergedrag de LC-tank vertoont, maar ditmaal extra belast door  $R_1$  en  $R_3$ :

$$\frac{V_3}{V_{IN}} = \frac{CR_1ks(1-k)(R_L + Ls)^2}{(CL^2k(1-k)(R_1 + R_3)s^3 + (L^2k(1-k) + LCR_1R_3 + 2LCR_Lk(1-k)(R_1 + R_3))s^2 + (LR_3(1-k) + 2LR_Lk(1-k) + LR_1k + CR_L^2(R_1 + R_3)k(1-k) + CR_LR_1R_3)s + (R_3 + kR_L)(R_1 + (1-k)R_L)}$$

Voor de frequenties die we willen onderzoeken ( $\omega_n \approx 1/\sqrt{LC}$ ) geldt doorgaans  $R_L \ll Ls$ , bijgevolg kunnen we de teller vereenvoudigen:

$$\frac{V_3}{V_{IN}} \approx \frac{CR_1ks(1-k)(Ls)^2}{(CL^2k(1-k)(R_1 + R_3)s^3 + (L^2k(1-k) + LCR_1R_3 + 2LCR_Lk(1-k)(R_1 + R_3))s^2 + (LR_3(1-k) + 2LR_Lk(1-k) + LR_1k + CR_L^2(R_1 + R_3)k(1-k) + CR_LR_1R_3)s + (R_3 + kR_L)(R_1 + (1-k)R_L)}$$

De hoogste graadsterm van de noemer zorgt voor een afvlakking van de versterking die doorgaans ook ruim boven  $\omega_n$  plaatsvindt, vandaar dat we die term ook verwaarlozen:

$$\frac{V_3}{V_{IN}} \approx \frac{CR_1ks(1-k)(Ls)^2}{((L^2k(1-k) + LCR_1R_3 + 2LCR_Lk(1-k)(R_1 + R_3))s^2 + (LR_3(1-k) + 2LR_Lk(1-k) + LR_1k + CR_L^2(R_1 + R_3)k(1-k) + CR_LR_1R_3)s + (R_3 + kR_L)(R_1 + (1-k)R_L)}$$

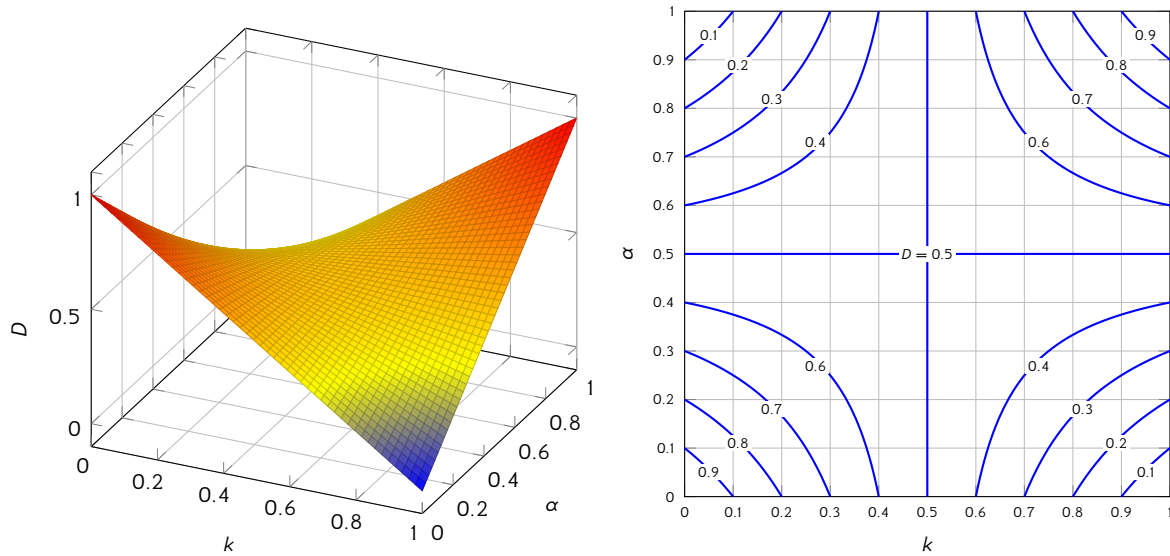
We factoriseren op een gelijkaardige manier als bij de eenvoudige analyse, waardoor opnieuw heel wat van de factoren kunnen weggedeeld worden:

$$\frac{V_3}{V_{IN}} = \frac{R_1}{R_1 + R_3} \cdot \frac{\cancel{k(1-k)CL^2}}{\cancel{k(1-k)CL^2}} \cdot \frac{s^3}{\left( \frac{1}{(R_1+R_3)C} + \frac{R_1R_3}{(R_1+R_3)k(1-k)L} + 2\frac{R_L}{L} \right) s^2 + \left( \frac{R_3}{(R_1+R_3)kLC} + 2\frac{R_L}{(R_1+R_3)LC} + \frac{R_1}{(R_1+R_3)(1-k)LC} + \left( \frac{R_L}{L} \right)^2 + R_L \frac{R_1R_3}{R_1+R_3} \frac{1}{L^2k(1-k)} \right) s + \frac{(R_3+kR_L)(R_1+(1-k)R_L)}{(R_1+R_3)k(1-k)L^2C}}$$

Als we nu nieuwe symbolen introduceren, nl.  $L_s = L$  en  $R_s = R_L$  (de seriewaarde van de aparte impedanties) en  $L_p = k(1-k)L$  en  $R_p = k(1-k)R_L$  (de parallelwaarde van beide impedanties) dan krijgen we:

$$\frac{V_3}{V_{IN}} \approx \frac{R_1}{R_1 + R_3} \cdot \frac{s^3}{\left( \frac{1}{(R_1+R_3)C} + \frac{R_1R_3}{L_p} + 2\frac{R_s}{L_s} \right) s^2 + \left( \frac{(1-k)R_3}{(R_1+R_3)L_pC} + 2\frac{R_L}{(R_1+R_3)L_sC} + \frac{kR_1}{(R_1+R_3)L_pC} + \left( \frac{R_L}{L_s} \right)^2 + \frac{R_L}{L_s} \frac{R_1R_3}{L_p} \right) s + \frac{R_1R_3+kR_LR_1+(1-k)R_LR_3+k(1-k)R_L^2}{(R_1+R_3)L_sL_pC}}$$

waarbij we opnieuw verwaarloosbare termen (bij courante waarden) schraptten.



Figuur 9.12: De factor  $D$  van de Hartley oscillator als functie van  $k$  en  $\alpha = \frac{R_1}{R_1 + R_3}$ : (a) 3D-weergave, (b) contourweergave

We werken dit verder om tot een normaalvorm:

$$\frac{V_3}{V_{IN}} = \frac{R_1}{R_1 + R_3} \cdot \frac{s^3}{\left(\frac{1}{\tau_C} + \frac{1}{\tau_{Lp}}\right) \left(s^2 + \frac{\omega_n}{Q}s + \omega_n^2\right)}$$

met

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\frac{1}{L_s C} + D \frac{R_L}{\tau_{Lp}}}{\frac{1}{\tau_C} + \frac{1}{\tau_{Lp}}}} \approx \sqrt{\frac{1}{L_s C} \cdot \frac{\tau_{Lp}}{\frac{1}{\tau_C} + \frac{1}{\tau_{Lp}}}} \approx \sqrt{\frac{1}{L_s C}}$$

$$Q = \omega_n \frac{\frac{1}{\tau_C} + \frac{1}{\tau_{Lp}}}{\frac{1}{L_p C} + \frac{1}{\tau_{Ls} \tau_{Lp}}}$$

$$\tau_C = (R_1 + R_3)C$$

$$\tau_{Ls} = \frac{L_s}{R_L}$$

$$\tau_{Lp} = \frac{L_p}{R_1 \parallel R_3}$$

$$D = k\alpha + (1-k)(1-\alpha) \quad \text{met } \alpha = \frac{R_1}{R_1 + R_3}$$

Bemerkt dat als  $k \approx 0.5$  of  $\alpha \approx 0.5$ , dat  $D \approx 0.5$  en dat in alle gevallen  $0 \leq D \leq 1$  (zie Figuur 9.12), waardoor de betrokken term als onderdeel van  $\omega_n$  meestal verwaarloosbaar is (in tegenstelling tot de meestal dominante rol in  $Q!$ ).

De spanningsversterking bij  $\omega_n$  kan uitgerekend worden als:

$$\begin{aligned} \left. \frac{V_3}{V_{IN}} \right|_{s=j\omega_n} &= \frac{R_1}{R_1 + R_3} \frac{-j\omega_n^3}{\left(\frac{1}{\tau_C} + \frac{1}{\tau_{Lp}}\right) \frac{\omega_n}{Q} j\omega_n} \\ &= -\frac{R_1}{R_1 + R_3} \frac{\omega_n Q}{\frac{1}{\tau_C} + \frac{1}{\tau_{Lp}}} \end{aligned}$$

We hebben nu voldoende informatie om het Barkhausen criterium neer te schrijven:

$$\underbrace{\left(-\frac{R_2}{R_1}\right)}_G \underbrace{\left(-\frac{R_1}{R_1+R_3} \frac{\omega_n Q}{\frac{1}{\tau_C} + \frac{1}{\tau_{Lp}}}\right)}_H = 1 \angle k 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad \frac{R_2}{R_1} \frac{R_1}{R_1+R_3} \frac{\omega_n Q}{\frac{1}{\tau_C} + \frac{1}{\tau_{Lp}}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad R_2 = (R_1 + R_3) \cdot \frac{\frac{1}{\tau_C} + \frac{1}{\tau_{Lp}}}{\omega_n Q}$$

### Ontwerpprocedure voor opamp-gebaseerde Hartley oscillatoren

1. Kies een combo van  $C$  en twee spoelen  $kL_s$  en  $(1-k)L_s$  die toelaten om de gewenste  $\omega_n$  te bereiken (houd  $0.1 \leq k \leq 0.9$ ):

$$\omega_n \approx \frac{1}{\sqrt{L_s C}}$$

Hou rekening met het feit dat uiteindelijk  $Q < \frac{1}{R_L} \sqrt{\frac{L_s}{C}}$ . Je wil minstens  $Q > 10$ . Zoek dus op of meet welke serieweerstand  $R_L$  de gekozen spoelen hebben.

2. Kies  $R_1$  en  $R_3$  in de orde grootte  $100 \Omega - 10 \text{ k}\Omega$  zodat

$$\tau_C \gg \tau_{Lp}$$

(voor een minimale afwijking op  $\omega_n$ ). Pas indien nodig  $L_s$  en  $C$  aan.

3. Bereken

$$Q = \omega_n \frac{\frac{1}{\tau_C} + \frac{1}{\tau_{Lp}}}{\frac{D}{L_p C} + \frac{1}{\tau_{Ls} \tau_{Lp}}}$$

en controleer of  $Q$  niet te laag is. Pas indien nodig aan.

4. Bepaal

$$R_2 = (R_1 + R_3) \frac{\frac{1}{\tau_C} + \frac{1}{\tau_{Lp}}}{\omega_n Q}$$

en beoordeel de redelijkheid van deze waarde ( $1 \text{ k}\Omega \leq R_2 \leq 1 \text{ M}\Omega$ ). Pas indien nodig  $k$  aan.

5. Verhoog  $R_2$  een beetje, zodat de oscillator goed start.

Opnieuw zal hoerageroep om bovenstaande ontwerpprocedure (een echte Hartley oscillator ontworpen!) weinig indruk maken op de doorwinterde elektronica-rot. De kanttekeningen die we maakten bij de Colpitts oscillator zijn immers ook hier van toepassing.

### 9.3.3.3 Andere varianten

Er bestaan heel wat varianten op de thema's die Colpitts en Hartley hebben aangebracht, zoals de Pierce oscillator en de Clapp oscillator. We zullen deze varianten in het volgende deel van deze cursus behandelen.

---

### Oefeningen

**Oefening 9.3.3.3-1:** Bepaal de weerstandswaarden en de condensatorwaarde voor een Wienbrugoscillator met een oscillatiefrequentie van 1 kHz.

**Oefening 9.3.3.3-2:** Gebruik de ontwerpprocedure voor opamp-gebaseerde Colpitts oscillatoren om een oscillator te ontwerpen voor een frequentie van 10 kHz. Veronderstel dat je spoel een serieweerstand heeft van  $0.5 \Omega$ .

**Oefening 9.3.3.3-3:** Gebruik de ontwerpprocedure voor opamp-gebaseerde Hartley oscillatoren om een oscillator te ontwerpen voor een frequentie van 100 kHz. Veronderstel dat je spoel een serieweerstand heeft van  $0.5 \Omega$ .

## 9.4 Besluit

In dit hoofdstuk beschreven we de basistypes oscillatoren: relaxatie-oscillatoren en harmonische oscillatoren. We beperkten ons daarbij tot vaste oscillatoren. Variabele oscillatoren (bv. gecontroleerd door een stuurspanning) zijn doorgaans varianten van deze thema's waarbij doorgaans een variabele condensator in de vorm van een diode wordt gebruikt. Om deze te leren kennen moeten we echter meer weten over halfgeleiders, en dat is onderwerp van het vervolg van deze cursus.

We gebruikten als versterkingselement een operationele versterker. In de praktijk wordt dit zelden gedaan en zullen we transistoren als versterkingselementen gebruiken. Opnieuw moeten we hiervoor meer weten over halfgeleiders. Jullie gaan dus nog even geduld moeten hebben.



## Overzicht

10.1	Inleiding . . . . .	220
10.1.1	Doel . . . . .	220
10.1.2	Rendement . . . . .	221
10.2	Transformatoren . . . . .	222
10.3	Gelijkrichters . . . . .	224
10.3.1	Enkelzijdige gelijkrichter . . . . .	224
10.3.2	Dubbelzijdige gelijkrichter (Graetz brug) . . . . .	225
10.4	DC-DC convertoren . . . . .	228
10.4.1	Principe . . . . .	228
10.4.2	Lineaire (serie)convertoren . . . . .	229
10.4.3	Schakelende convertoren . . . . .	232
10.5	Besluit . . . . .	260

In dit hoofdstuk bestuderen we het gedrag van convertoren, opnieuw op basis van netwerken met ideale elementen. Wat is een convertor? Een convertor is een vermogenomzetter. Waar in het vorige hoofdstuk alles erop gericht was om spanningen en stromen in een vaste cadans te laten op en neer deinen, is in dit hoofdstuk alles gericht op het omzetten van stromen en spanningen met als ultiem doel het perfect gefixeerd houden van een welbepaalde stroom of spanning ondanks alle stoorinvloeden, of ze nu van de verbruikers of van de omgeving komen. We willen eigenlijk ideale spanningsbronnen en stroombronnen maken. Waarom spreken we dan van vermogenomzetter? Omwille van het feit dat we een bronvermogen aan de schakeling willen aanbieden als een vaste spanning (met willekeurige stroom) of als een vaste stroom (met willekeurige spanning).

Door bij deze studie geen rekening houden met de niet-idealiteiten van reële componenten, kunnen we de analyse eenvoudig houden en zo tot de essentie van hun werking doordringen.

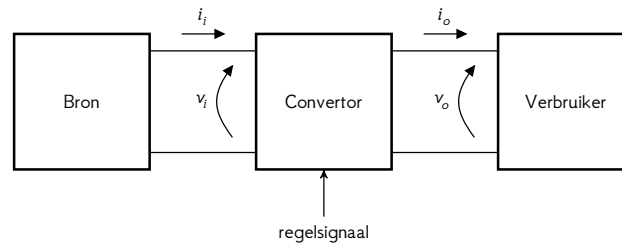
Een goed begrip van de ideale werking van deze netwerken is het fundament om later een goed begrip te krijgen van reële schakelingen, waarbij we dan heel duidelijk kunnen zien welke invloed de niet-idealiteiten hebben op het gedrag. Het geeft ons ook een 'baseline', d.w.z. een idee van wat we maximaal uit een reële schakeling kunnen halen.

Het feit dat we alle niet-idealiteiten weglaten, zorgt er ook voor dat weinig van de netwerken die we in dit hoofdstuk behandelen exact zullen werken zoals hier beschreven. Enige bescheidenheid is ook na het afronden van dit hoofdstuk dus opnieuw aan de orde.

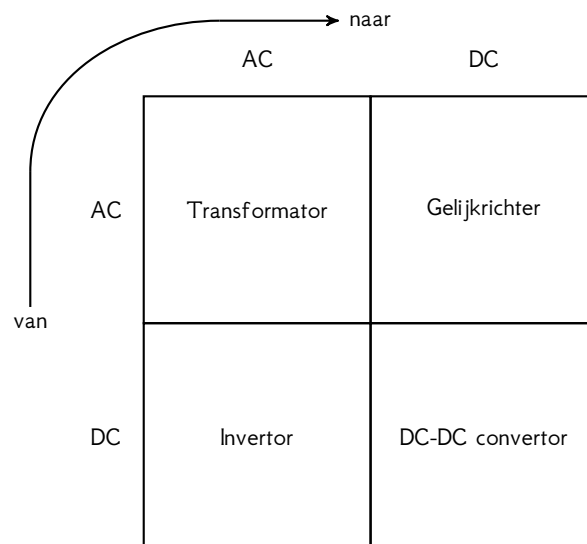
## 10.1 Inleiding

### 10.1.1 Doel

We willen het elektrische bronvermogen (beschikbaar als gelijkspanning/wisselspanning of -stroom) aanpassen aan de noden van de verbruiker. Die bron kan de netspanning zijn, of een DC-spanning die ter beschikking is. De convertor zet de ingangsspanning om naar een gepaste uitgangsspanning en heeft (optioneel) een ingang waarmee hij kan geregeld worden. Het onderstaande schema geeft een dergelijk systeem weer:



We onderscheiden dan vier mogelijke (courante) omzettingen:



Figuur 10.1: De vier mogelijke bronomzettingen

Merk op dat de blokken en de benamingen ervan in het bovenstaande schema niet de meest algemene zijn en ook onderling niet equivalent zijn. Zo zal

- een transformator enkel een AC-spanning omzetten naar een andere AC-spanning met dezelfde frequentie (bij frequentiewijziging, spreken we van een hakker of chopper);
- een gelijkrichter op zich geen geregelde spanning opleveren. Een geregelde DC-DC convertor in cascade is nodig om een bruikbare voeding te verkrijgen.

Dit zijn echter de concepten die vanuit je parate kennis als eerste reactie moeten opwellen, indien je een gepaste voeding moet bedenken voor een concrete toepassing.

We gaan in dit hoofdstuk niet in op invertoren, omdat dit topic het niveau van dit hoofdstuk ruim overstijgt. Doorgaans gebruiken we invertoren om een DC-spanning (bv. vanuit fotovoltaïsche zonnepanelen) aan te passen

aan de netspanning. Dit is een omzetting met zoveel veiligheidsrisico's dat je er zonder diepgaande kennis maar beter van wegblijft.

Het concrete doel is dus:

- het genereren van een stabiele gelijkspanning,
- al dan niet automatisch geregeld,
- met een minimum aan vermogenverlies.

Dat laatste aspect is niet onbelangrijk. Inderdaad: de omzetting die we zullen uitvoeren zal op zich ook energie verbruiken. Als je je ooit moest afvragen welk aandeel ingenieurs elektronica in de klimaatopwarming hebben: dit is er één van. Als we er bijvoorbeeld in zouden slagen om alle voedingen van cloudcomputers 1% efficiënter te maken, dan zouden we jaarlijkse ongeveer 26 TWh aan energie kunnen besparen, wat overeenkomt met het sluiten van 3 energiecentrales van 1 GW die continu op vol vermogen draaien.<sup>1</sup> Daarbij houden we dan nog geen rekening met secundaire winsten omwille van een lager materiaalverbruik en kleinere koelingskosten.

Hoog tijd dus om even in te gaan op dit vermogenverlies.

### 10.1.2 Rendement

Het ingangsvermogen  $P_i$  dat aan de convertor wordt geleverd wordt deels omgezet in het  $P_o$ , maar een deel  $P_{loss}$  gaat verloren en wordt ook door de convertor omgezet in warmte. Het rendement bedraagt dus:

$$\eta = \frac{P_o}{P_i}$$

Op het eerste zicht lijkt een hoog rendement het na te streven doel.

Een betere parameter is echter de verhouding tussen uitgangsvermogen en verliesvermogen:

$$\kappa = \frac{P_o}{P_{loss}} = \frac{\eta}{1 - \eta} \quad (10.1)$$

We zijn immers op zoek naar een zeker uitgangsvermogen, waarbij de prijs die we betalen het verliesvermogen is. Die prijs bestaat uit twee delen:

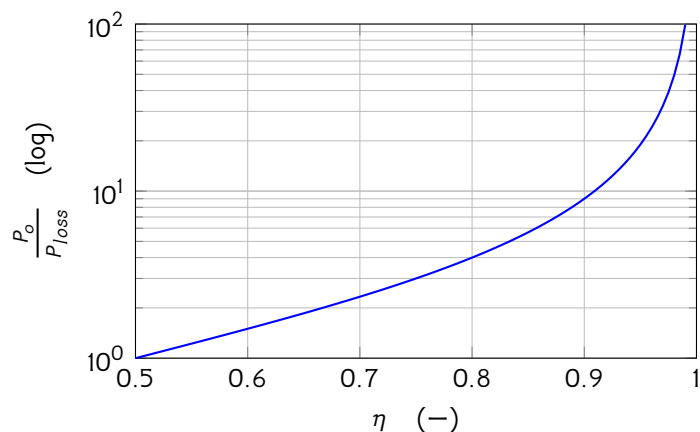
1. de energie waarvoor we betalen, die niet nuttig gebruikt wordt
2. de kost van de convertor zelf.

Die laatste kost lijkt op het eerste zicht klein en eenmalig, maar de werkelijkheid is dat die kost (a) doorgaans meer dan lineair toeneemt met het verliesvermogen en (b) ook niet eenmalig is. We moeten immers het verliesvermogen zien af te voeren. Dit vertaalt zich in duurdere componenten, een grote koelvin, en mogelijk een geforceerde koeling. Zeker dat laatste vraagt op zich ook extra (recurrente) energie, maar bijkomend ook meer volume en meer gewicht, wat parameters zijn die doorgaans (typisch in mobiele applicaties, zoals bv. een elektrisch voertuig) ook extra secundaire kosten met zich meebrengen.

De relatie (10.1) werd weergegeven in Figuur 10.2 en blijkt bijzonder interessant. We zien immers dat rendementswinsten nog veel belangrijker worden voor hoge rendementen, dan voor lage rendementen. Dat is een verrassend inzicht.

We zullen nu drie van de vier mogelijk omzettingen van Figuur 10.1 verder verkennen:

<sup>1</sup>Het aandeel van datacenters wordt immers geschat op 1.5% in het totale jaarlijkse wereldwijde energieverbruik van 175 000 TWh (in 2021).

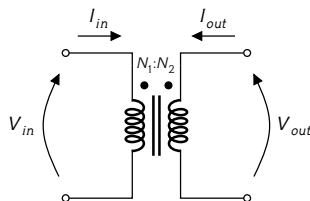


Figuur 10.2: Uitgangsvermogen per verliesvermogen i.f.v. het omzettingrendement

- Transformatoren
- Gelijkrichters
- DC-DC convertoren

## 10.2 Transformatoren

Een transformator bestaat uit een gemeenschappelijke kern van ferromagnetisch materiaal waarop twee spoelen (windingen) gewikkeld zijn. De kern zorgt ervoor dat de magnetische velden van de twee spoelen goed gekoppeld zijn. De kring/winding langswaar het vermogen wordt toegevoerd noemen we de primaire kring/winding, de andere de secundaire kring/winding. We spreken soms ook kort over 'de primaire' en 'de secundaire'.



We zagen de transformator al even in het hoofdstuk over basisnetwerken. De (ideale) transformator realiseert het volgende verband tussen de RMS-waarden of amplitudes van de aansluitklemmen:

$$V_{out} = \frac{N_2}{N_1} V_{in} \qquad I_{in} = -\frac{N_2}{N_1} I_{out}$$

We schrijven de verbanden op deze manier omdat de ingangsspanning (aan de primaire) doorgaans de uitgangsspanning (aan de secundaire) bepaalt en de verbruikte uitgangsstroom (aan de secundaire) doorgaans de de ingangsstroom (aan de primaire) bepaalt. Dit hoeft echter niet zo te zijn. De transformator werkt perfect in twee richtingen!

Aangezien we ons beperken tot ideale elementen, valt er ook weinig extra over te vertellen, buiten het feit dat

- met bolletjes kan aangegeven worden, welke aansluitingen in-fase zijn (d.w.z. dat ze samen op en neer gaan), zie Figuur 10.3a,
- er ook versies bestaan waarbij de secundaire spoel een middenaftakking heeft, zodat ten opzichte van die middenaftakking twee tegenfase-spanningen ontstaan, zie Figuur 10.3b, en

- het rendement  $\eta$  van de ideale transformator gelijk is aan 1 (een reële transformator zal helaas warmteverlies hebben en dus een rendement kleiner dan 1).

Voor de versie met middenaftakking, ontstaat het volgende verband:

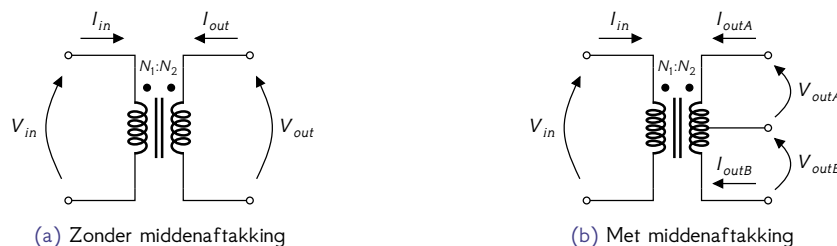
$$\begin{aligned} V_{outA} &= (1 - \alpha) \frac{N_2}{N_1} V_{in} & I_{in} &= -(1 - \alpha) \frac{N_2}{N_1} I_{outA} + \alpha \frac{N_2}{N_1} I_{outB} \\ V_{outB} &= \alpha \frac{N_2}{N_1} V_{in} \end{aligned}$$

waarbij  $\alpha$  de fractie van de windingen is die in het onderste deel van de secundaire zit en  $1 - \alpha$  logischerwijs het complement daarvan is. Je kan dit verband eenvoudig zelf opstellen door het behoud van vermogen tussen primaire en secundaire op te stellen.

Bij een perfecte middenaftakking  $\alpha = 0.5$  wordt dit:

$$\begin{aligned} V_{outA} &= \frac{1}{2} \frac{N_2}{N_1} V_{in} & I_{in} &= -\frac{1}{2} \frac{N_2}{N_1} I_{outA} + \frac{1}{2} \frac{N_2}{N_1} I_{outB} \\ V_{outB} &= \frac{1}{2} \frac{N_2}{N_1} V_{in} \end{aligned}$$

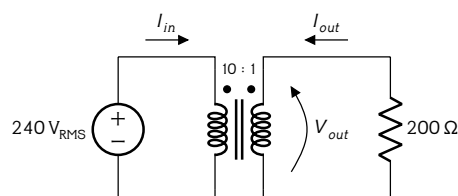
Een belangrijke opmerking hierbij is, is dat de potentialen van de primaire kring en de secundaire kring niet gekoppeld zijn. De secundaire is dus vlottend t.o.v. de primaire. In de meeste gevallen zullen we daarom een van de draden van de secundaire verbinden met een gewenste lage potentiaal (bv. de aarding).



Figuur 10.3: Transformatoren

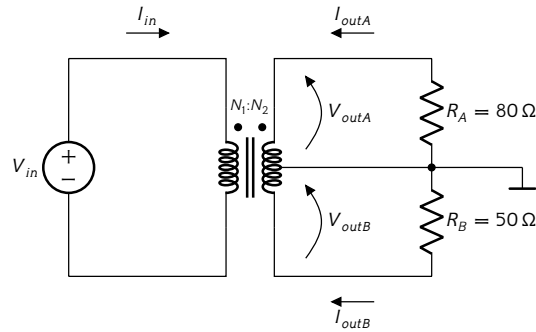
## Oefeningen

**Oefening 10.2-1:** Beschouw een transfo met een windingsverhouding 10:1 die gevoed wordt met netspanning ( $240 V_{\text{RMS}}$ , 50 Hz).



Teken de spanning aan de secundaire. Bereken de stroom (RMS-waarde) die de bron aan de primaire moet leveren om een belastingsweerstand van  $200 \Omega$  te voeden aan de secundaire.

**Oefening 10.2-2:** Beschouw de onderstaande transfo met secundaire winding met middenaftakking (windingsverhouding 10:1 en  $\alpha = 0.6$ ) gevoed met netspanning ( $230 V_{\text{RMS}}$ , 50 Hz).



De transformator is belast aan de secundaire zoals aangegeven.

Teken de spanningen aan de secundaire. Bereken de stroom (RMS-waarde) die de bron aan de primaire moet leveren om de belastingsweerstand van  $80 \Omega$  en  $50 \Omega$  te voeden aan de secundaire.

### 10.3 Gelijkrichters

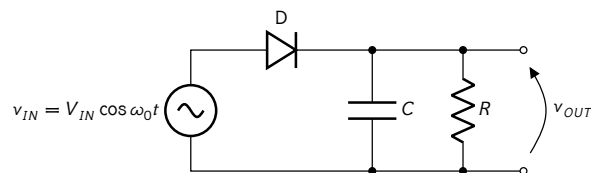
De voeding van de gelijkrichters is een wisselspanningsbron (AC) die we sinusvorming veronderstellen. We onderscheiden twee mogelijkheden:

- de enkelzijdige gelijkrichter
- de dubbelzijdige gelijkrichter

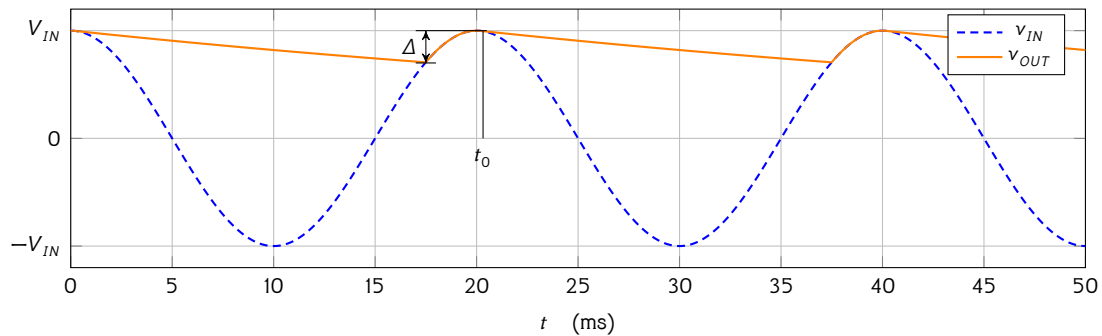
We kunnen deze gelijkrichters realiseren met ideale diodes en een buffercondensator. Aangezien de ideale diode geen vermogen verbruikt (ofwel is de spanning erover nul, ofwel is de stroom erdoor nul), en ook de ideale condensator geen stroom verbruikt, is het rendement  $\eta$  van deze ideale gelijkrichters ook gelijk aan 1.

#### 10.3.1 Enkelzijdige gelijkrichter

We zagen de enkelzijdige gelijkrichter al in het hoofdstuk over basisnetwerken. Nu willen we echter een stap verder gaan en van de halve golf die op basis van een serieschakeling van een diode en de verbruiker ontstaat, ook de spanning nog stabiel houden. We doen dit door een buffercondensator toe te voegen. In de figuur hieronder is de weerstand  $R$  de verbruiker waarvoor we een gelijkspanning willen creëren op basis van een wisselspanningsbron.



De uitgangspanning die de verbruiker op die manier ziet, werd hieronder getekend:



De uitgangsspanning volgt de ingangsspanning zolang de diode voorwaarts gepolariseerd is (en dus geleidt). Van zodra de diode spert (op  $t_0$ )<sup>2</sup> daalt de uitgangsspanning volgens een exponentieel dalende curve:

$$v_{OUT} = V_{IN} \cos(\omega_0 t_0) \cdot e^{-\frac{t-t_0}{RC}} \quad (10.2)$$

Van zodra de ingangsspanning de diode terug in geleiding brengt, volgt de uitgang terug de ingang. We krijgen zo een zaagtandvormig verloop van de uitgangsspanning. We noemen dit verloop de rimpel die bovenop de gelijkgerichte spanning zit. De absolute peak-to-peak spanning van de rimpel duiden we aan met de variabele  $\Delta$ . Zo kunnen we ook een relatieve rimpel  $\delta$  berekenen:

$$\delta = \frac{\Delta}{V_{IN}}$$

die we vaak ook kort 'rimpeel' noemen.

De helling waarmee de zaagtand naar beneden vertrekt bedraagt ongeveer  $-V_{IN}/RC$ , dat wil zeggen dat we de rimpel klein kunnen maken door de tijdsconstante  $\tau = RC$  groot te maken. Ofwel moet de last dus klein zijn (grote  $R$ ) ofwel hebben we een grote condensator  $C$  nodig.

De volgende formule (die we niet afleiden) is een bovenschatter van de rimpel (met een relatieve fout kleiner dan 5%):

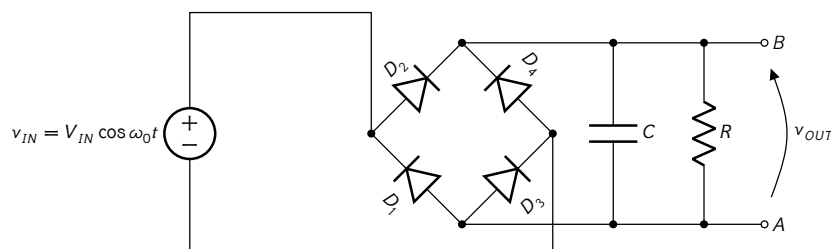
$$\delta < \frac{5}{5\tau f + 4} \quad (\text{voor } 0.3 \leq \tau f) \quad (10.3)$$

waarbij  $\tau = RC$  en  $f$  de frequentie van de sinusgolf is.

We kunnen deze formule gebruiken om de benodigde condensator uit te rekenen i.f.v. van de frequentie en de belastingsweerstand.

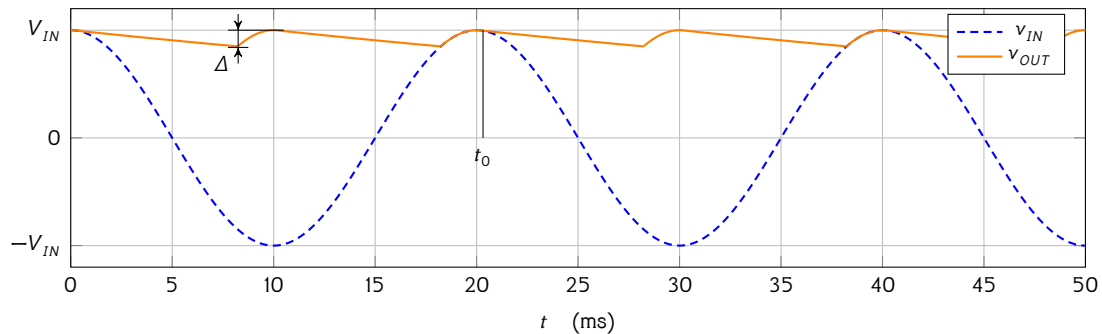
### 10.3.2 Dubbelzijdige gelijkrichter (Graetz brug)

We weten al dat deze ruitvormige opstelling van diodes de absolute waarde genereert van de voedingsspanning. We voegen nu nog een buffercondensator  $C$  toe aan de belasting  $R$  om de spanning zo constant mogelijk te houden.



<sup>2</sup>De berekening van  $t_0$  is opgenomen als oefening.

De uitgangsspanning die de verbruiker op die manier ziet, werd hieronder getekend. Merk op dat de grafiek geen potentialen weergeeft, maar spanningen!



De uitgangsspanning volgt de ingangsspanning zolang de  $D_2$  of  $D_4$  voorwaarts gepolariseerd zijn (en dus geleiden). Van zodra deze diodes sperren (bv. op  $t_0$ )<sup>3</sup> daalt de uitgangsspanning volgens een exponentieel dalende curve:

$$v_{OUT} = V_{IN} \cos(\omega_0 t_0) \cdot e^{-\frac{t-t_0}{RC}}$$

Van zodra de ingangsspanning de diode terug in geleiding brengt, volgt de uitgang terug de ingang (of zijn tegengestelde). We krijgen zo een zaagtandvormig verloop van de uitgangsspanning.

De absolute peak-to-peak spanning van de rimpel duiden we opnieuw aan met de variabele  $\Delta$ . Zo kunnen we ook een relatieve rimpel  $\delta$  berekenen:

$$\delta = \frac{\Delta}{V_{IN}}$$

die we vaak ook kort 'rimpeel' noemen.

De helling waarmee de zaagtand naar beneden vertrekt bedraagt opnieuw ongeveer  $-V_{IN}/RC$ , dat wil zeggen dat we de rimpel klein kunnen maken door de tijdsconstante  $\tau = RC$  groot te maken.

Ofwel moet de last dus klein zijn (grote  $R$ ) ofwel hebben we een grote condensator  $C$  nodig.

De rimpel is voor de dubbelzijdige gelijkrichter wel ongeveer maar half zo groot als voor de enkelzijdige gelijkrichter.

De volgende formule (die we niet afleiden) is een bovenschatter van de rimpel (met een relatieve fout kleiner dan 5%):

$$\delta < \begin{cases} \frac{5}{11\tau f + 5} & (\text{voor } 0.3 \leq \tau f \leq 3) \\ \frac{5}{10\tau f + 8} & (\text{voor } 3 \leq \tau f) \end{cases} \quad (10.4)$$

waarbij  $\tau = RC$  en  $f$  de frequentie van de sinusgolf is.

We kunnen deze formule gebruiken om de benodigde condensator uit te rekenen i.f.v. van de frequentie en de belastingsweerstand. De grens  $\tau f = 3$  komt overeen met een rimpel van ca. 12.5%, wat wil zeggen dat voor grotere rimpels de bovenste vergelijking kan gebruikt worden en voor kleinere rimpels de onderste.

---

## Oefeningen

---

<sup>3</sup>De berekening van  $t_0$  is opgenomen als oefening.

**Oefening 10.3.2-1:** Bepaal de waarde van  $t_0$  uit vergelijking (10.2). Tip: dit is het tijdstip waarvoor de afgeleide van de cosinus gelijk wordt aan de afgeleide van de exponentiële bij het starttijdstip.

**Oefening 10.3.2-2:** Teken zelf een cosinusgolf met frequentie 1 Hz:

$$f(t) = \cos(2\pi t)$$

en teken daarop een dalende exponentiële die begint bij  $t = t_0$  en  $\tau = 0.3$  s (dit is de korste  $\tau$  waarvoor de rimpelvergelijkingen (10.3) en (10.4) nog net gelden).

$$g(t) = f(t_0) e^{-\frac{t-t_0}{0.3}}$$

waarbij je ofwel  $t_0 = 0$  kiest (als je het gemakkelijk wil houden), ofwel  $t_0$  berekent op basis van je conclusie bij de vorige oefening.

Je tekening geeft je een idee van het geldigheidsbereik van de voornoemde rimpelvergelijkingen.

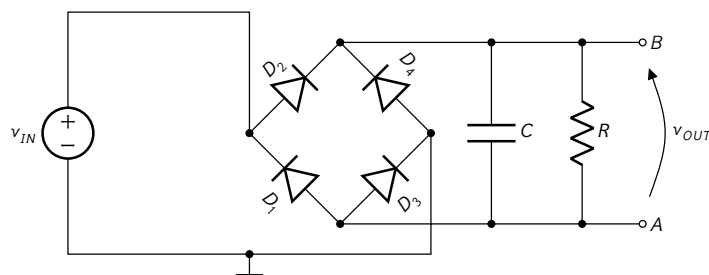
**Oefening 10.3.2-3:** Bereken een bovenschatting van de rimpel die optreedt bij een enkelzijdige gelijkrichter voor een sinusgolf van 50 Hz met een lastweerstand  $R = 1 \text{ k}\Omega$  en een afvlakcondensator van  $C = 100 \text{ }\mu\text{F}$ .

**Oefening 10.3.2-4:** Bereken een bovenschatting van de rimpel die optreedt bij een dubbelzijdige gelijkrichter voor een sinusgolf van 50 Hz met een lastweerstand  $R = 2.2 \text{ k}\Omega$  en een afvlakcondensator van  $C = 6.8 \text{ }\mu\text{F}$ .

**Oefening 10.3.2-5:** Bereken de benodigde condensator voor een dubbelzijdige gelijkrichter voor een sinusgolf van 1000 Hz die belast wordt met  $R = 560 \text{ }\Omega$  om de rimpel te beperken tot 2%.

**Oefening 10.3.2-6:** Bereken de benodigde condensator voor een enkelzijdige gelijkrichter voor een sinusgolf met amplitude 5 V en frequentie 100 Hz die in vollast een stroom moet leveren van 100 mA, zodat de rimpel beperkt wordt tot 1%.

**Oefening 10.3.2-7:** Beschouw de onderstaande dubbelzijdige gelijkrichter:



Veronderstel de spanningsbron sinusvormig:

$$v_{IN} = 24 \text{ V} \cos(2\pi \cdot 1000 \text{ Hz})$$

Teken de volgende golfvormen:

1. de uitgangsspanning.
2. de uitgangsspanning indien  $D_1$  kapot is en zich gedraagt als open keten.
3. de uitgangsspanning indien  $D_3$  kapot is en zich gedraagt als open keten.

## 10.4 DC-DC convertoren

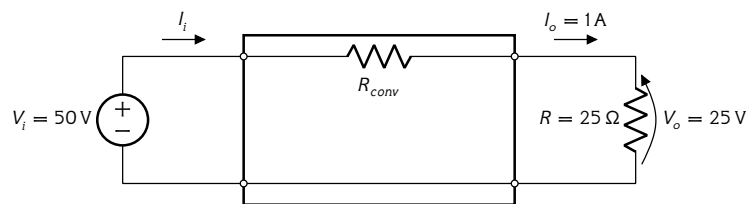
### 10.4.1 Principe

We willen een bestaande DC-spanning  $V_i$  omzetten naar een spanning  $V_o$  aangepast aan onze verbruiker. Laten we verkennen wat mogelijk is aan de hand van het onderstaande voorbeeld. Deingangsspanning  $V_i$  bedraagt 50 V. De verbruiker heeft 25 V nodig en heeft zelf een inwendige weerstand van  $25 \Omega$  zodat er 1 A door de verbruiker vloeit.



De converter heeft als doel om deingangsspanning om te zetten naar de gewenste uitgangsspanning en daarbij zo weinig mogelijk vermogen te verliezen ( $\eta$  zo hoog mogelijk).

Als lezer heb je ongetwijfeld al het briljante idee voelen opborrelen om dit snel op te lossen met de potentiometrische deler die we eerder in Hoofdstuk 7 zagen:



Snel even  $R_{conv}$  uitreken:  $25 \Omega$  en de stroom die gaat vloeien is inderdaad 1 A. Een kind kan de was doen!

Een prima oplossing inderdaad, op het verliesvermogen na. Een eenvoudige berekening leert ons dat:

$$P_i = V_i \cdot I_i = 50 \text{ W}$$

$$P_o = V_o \cdot I_o = 25 \text{ W}$$

wat leidt tot een verliesvermogen (dat we opstoken in de weerstand) van 25 W. Het gevolg is dat:

$$\eta = \frac{P_o}{P_i} = 0.5$$

$$\kappa = \frac{P_o}{P_{loss}} = 1$$

Dat zijn waarden die ver van schitterend zijn. Zo gaan we de klimaatdoelstellingen niet halen.

Dit is dus geen goede oplossing. En toch is een groot deel van de convertoren op dit principe gebaseerd: de lineaire (serie)convertoren. We gebruiken dan wel geen weerstand (omdat we de converter zelfregelend willen maken), maar het principe blijft: de converter pompt de nodige stroom van ingang naar uitgang en realiseert daarbij de nodige spanningsval. Dat betekent per definitie een vermogenverlies gelijk aan:

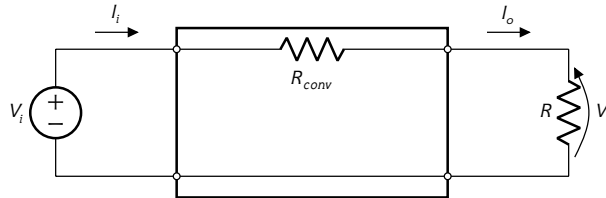
$$P_{loss} = (V_i - V_o) \cdot I_o$$

Waarom we deze convertoren toch nog gebruiken, zal blijken wanneer we de tweede categorie hebben behandeld: de schakelende convertoren.

## 10.4.2 Lineaire (serie)convertoren

## Passieve convertor

Laten we toch nog even stilstaan bij de potentiometrische deler als mogelijke DC-DC convertor:



Deze schakeling zou zowel kunnen ingezet worden als spanningsbron, maar ook als stroombron. De uitgangsspanning en -stroom van deze schakeling zijn immers:

$$V_o = \frac{R}{R + R_{conv}} V_i$$

$$I_o = \frac{1}{R + R_{conv}} V_i$$

Een juiste waarde voor  $R_{conv}$  selecteren zal immers de gewenste stroom en/of spanning realiseren. Dit legt echter ook meteen de zwakte van deze schakeling bloot. Indien de belasting  $R$  wijzigt, wijzigt ook de uitgangsspanning en -stroom.

We zouden de weerstand kunnen vervangen door een regelbare weerstand, maar dat vereist dat we moeten bijregelen bij elke lastwijziging. We zullen dit bijregelen automatiseren door in de volgende paragraaf een actieve convertor te gebruiken.

Merk ten slotte op dat het ook eenvoudig is om het rendement van de convertor te berekenen i.f.v. de spanningen:

$$\eta = \frac{P_o}{P_i} = \frac{V_o I_o}{V_i I_i} = \frac{V_o}{V_i}$$

Hetzelfde geldt voor

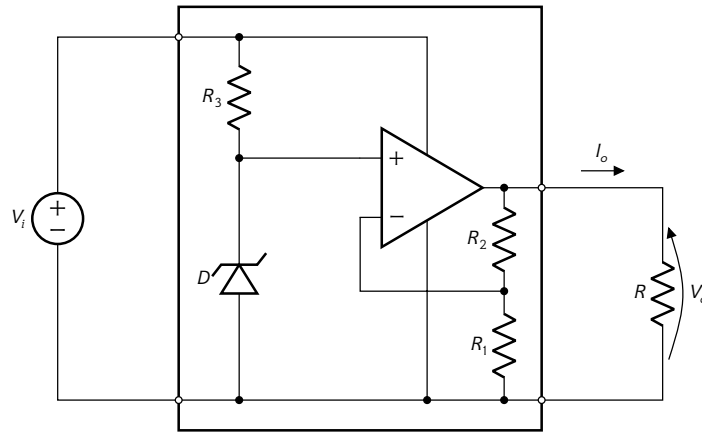
$$\kappa = \frac{P_o}{P_{loss}} = \frac{V_o I_o}{(V_i - V_o) I_i} = \frac{V_o}{V_i - V_o}$$

vermits  $I_o = I_i$ .

## Actieve convertor

## Spanningsregelaar

Beschouw onderstaand netwerk:



Het netwerk met de Zenerdiode plaatst op de positieve klem van de opamp een vaste potentiaal, gelijk aan de Zenerspanning van de diode  $V_Z$ . De weerstand  $R_3$  beperkt daarbij de stroom die door de diode vloeit. De opamp (die in een negatieve feedbackconfiguratie staat) zorgt voor een equipotentiaal tussen zijn klemmen, waardoor:

$$V_Z = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_o$$

$$\Leftrightarrow V_o = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) V_Z$$

Zo stellen we de gewenste uitgangsspanning in. Het voordeel van deze schakeling is dat de uitgangsspanning niet meer afhangt van de belasting  $R$ . Merk wel op dat nog steeds geldt  $V_o \leq V_i$ , aangezien de opamp zijn uitgang niet hoger kan brengen dan zijn positieve voedingsspanning.

Het rendement en het uitgangs- over verliesvermogen is hetzelfde als bij de passieve convertor:

$$\eta = \frac{P_o}{P_i} = \frac{V_o I}{V_i I} = \frac{V_o}{V_i}$$

Hetzelfde geldt voor

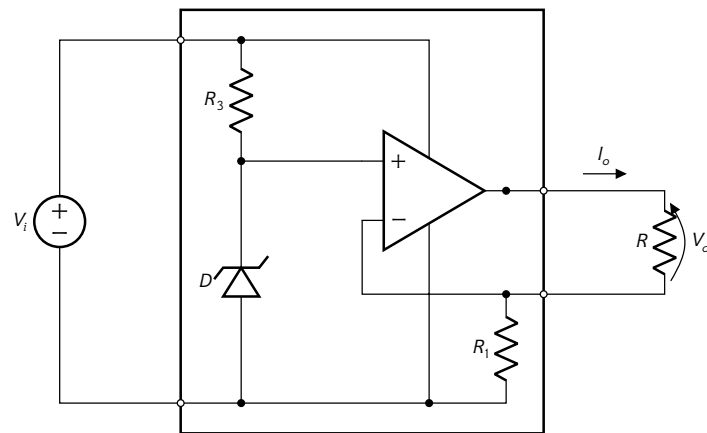
$$\kappa = \frac{P_o}{P_{loss}} = \frac{V_o I}{(V_i - V_o) I} = \frac{V_o}{V_i - V_o}$$

We zullen in het tweede deel van deze reeks zien dat we de opamp beter combineren met een transistor. Onder deze vorm zijn dit soort regelaars courant bekend als lineaire driepootregelaars.

Merk op dat de opamp in de schakeling in zijn lineaire gebied werkt wat in lijn ligt met de naam die we aan deze convertor hebben gegeven. Hetzelfde geldt voor de transistoren die we later zullen gebruiken, die werken dan niet als schakelaar, maar in hun 'lineaire' gebied.

### Stroomregelaar

We kunnen dezelfde schakeling met een lichte aanpassing ook inzetten als stroombron:



De negatieve feedbackconfiguratie van de opamp zal er weer voor zorgen dat de spanning op de negatieve klem van de opamp gelijk is aan de Zenerspanning van de diode. Hierdoor wordt de stroom die door  $R_1$  vloeit, bepaald als:

$$I_{R_1} = \frac{V_Z}{R_1}$$

Deze stroom kan enkel maar uit  $R$  komen, waardoor:

$$I_o = I_{R_1} = \frac{V_Z}{R_1}$$

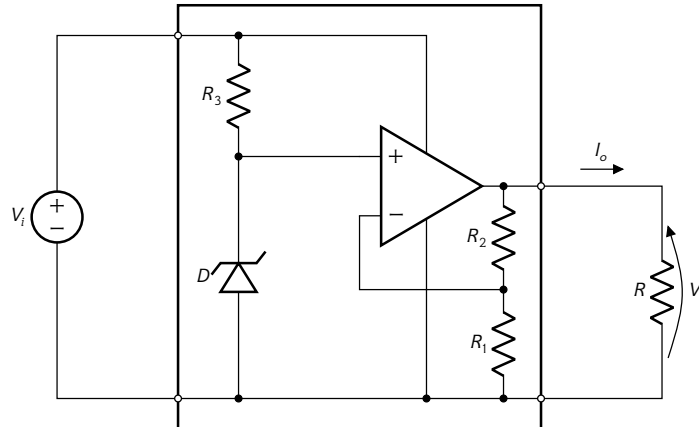
Merk op dat deze schakeling enkel zal functioneren indien:

$$(R_1 + R)I_o \leq V_i$$

De opamp kan immers zijn uitgang niet boven de voedingsspanning tillen.

## Oefeningen

Oefening 10.4.2-1: Beschouw onderstaande actieve convertor:



Stel:

$$V_i = 24 \text{ V}$$

$$R_1 = 10 \text{ k}\Omega$$

$$R_3 = 10 \text{ k}\Omega$$

$$V_Z = 3 \text{ V}$$

$$R_2 = 27 \text{ k}\Omega$$

$$R = 1 \text{ k}\Omega$$

1. Bereken de uitgangsspanning van de convertor.
2. Bereken het vermogen verbruikt door de lastweerstand.
3. Bereken het vermogen dat daarbij verbruikt wordt door de convertor.
4. Bereken het vermogen geleverd door de bron en controleer de vermogenbalans.
5. Bereken het rendement  $\eta$  en het uitgangs- over verliesvermogen  $\kappa$  van de convertor. Geef een inschatting van deze waarden m.b.t. energieduurzaamheid.

Oefening 10.4.2-2: Beschouw de convertor van de vorige oefening, maar waarbij nu:

$$V_i = 10 \text{ V}$$

$$V_Z = 5 \text{ V}$$

Bepaal nu weerstandswaarden voor  $R_1$  en  $R_2$ , zodat de uitgangsspanning

1. 3.5 V bedraagt,
2. 7.5 V bedraagt,
3. 12 V bedraagt.

Oefening 10.4.2-3: Beschouw opnieuw dezelfde convertor, maar waarbij nu:

$$V_i = 32 \text{ V}$$

$$V_Z = 6 \text{ V}$$

$$R_1 = 1 \text{ k}\Omega$$

$$R_2 = 0 - 10 \text{ k}\Omega \text{ (regelbaar)}$$

Tussen welke spanningen kan de uitgang van deze convertor geregeld worden?

### 10.4.3 Schakelende convertoren

#### 10.4.3.1 Principe

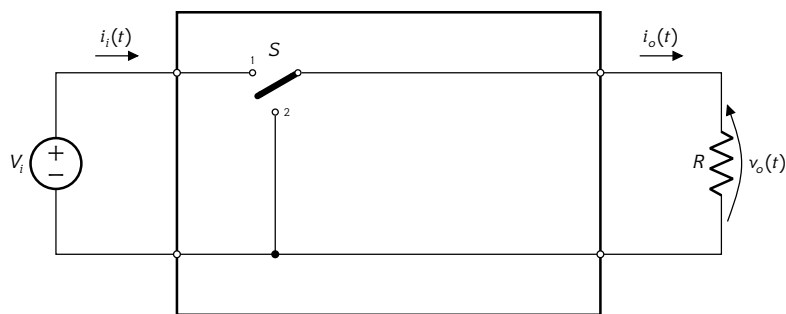
Het eenvoudige, maar geniale basisidee van de schakelende convertor is dat we de gemiddelde uitgangsspanning willen regelen, door de ingangsspanning maar voor een fractie van de tijd aan de verbruiker aan te bieden. Het



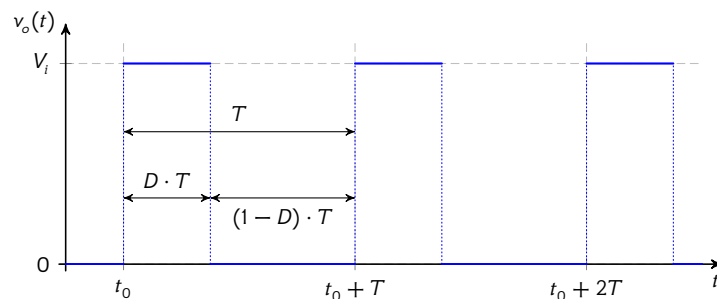
Figuur 10.4: Robert David Middlebrook (\*1929–†2010)

idee is niet afkomstig van Robert Middelbrook, maar hij is toch een van de grondleggers van de schakelende convertoren (zie Figuur 10.4).

Het onderstaande prinsipeschema maakt het idee duidelijk:



We schakelen de schakelaar periodiek op en af, met periode  $T$ . De schakelaar verbindt gedurende  $D \cdot T$  de belasting met de bron (stand 1) en sluit gedurende  $(1 - D) \cdot T$  de last kort (stand 2) waarbij vanzelfsprekend  $0 \leq D \leq 1$ . Hierdoor ziet de belasting de volgende spanningsgolfvorm:



Het is een blokgolf met duty cycle  $D$ . De gemiddelde waarde van deze spanning kan gemakkelijk uitgerekend worden:

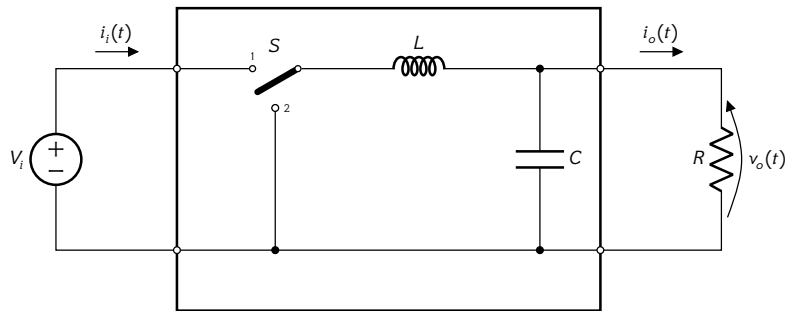
$$V_o = \frac{1}{T} \int_0^T v_o(t) dt = \frac{1}{T} V_i D T = D V_i$$

Op deze manier kunnen we de gemiddelde uitgangsspanning regelen tussen 0 en  $V_i$ . De belasting ziet natuurlijk niet enkel deze gemiddelde waarde, maar wordt blootgesteld aan de volledige golfvorm.

In onze berekeningen zal ook vaak de waarde  $(1 - D)$  voorkomen. Om gemakkelijksredenen gebruiken we daarvoor een nieuw symbool:

$$D' = 1 - D$$

Tijd voor een volgend geniaal moment: misschien kunnen we een laagdoorlaatfilter gebruiken om enkel de DC-waarde (en niet de hogere frequenties) door te laten? We gebruiken bewust geen eenvoudig RC-filter omdat de weerstand vermogen zou verbruiken, maar wel een LC-filter, dat volledig verliesloos kan werken. Zo komen we tot het onderstaande prinseschema:



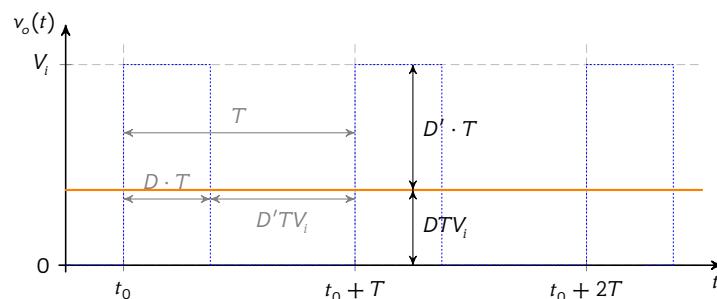
Figuur 10.5: Prinseschema van een (buck) DC-DC convertor

De transferfunctie van het LC-filter kan eenvoudig berekend worden:

$$H(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{Ls + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{1 + LCs^2}$$

waarvan we gemakkelijk een Bode-diagram kunnen opstellen, zie Figuur 10.6.

Indien we ervoor zorgen dat  $1/\sqrt{LC} \ll \frac{1}{T}$ , dan zal de last bijna uitsluitend de gemiddelde golfvorm zien:



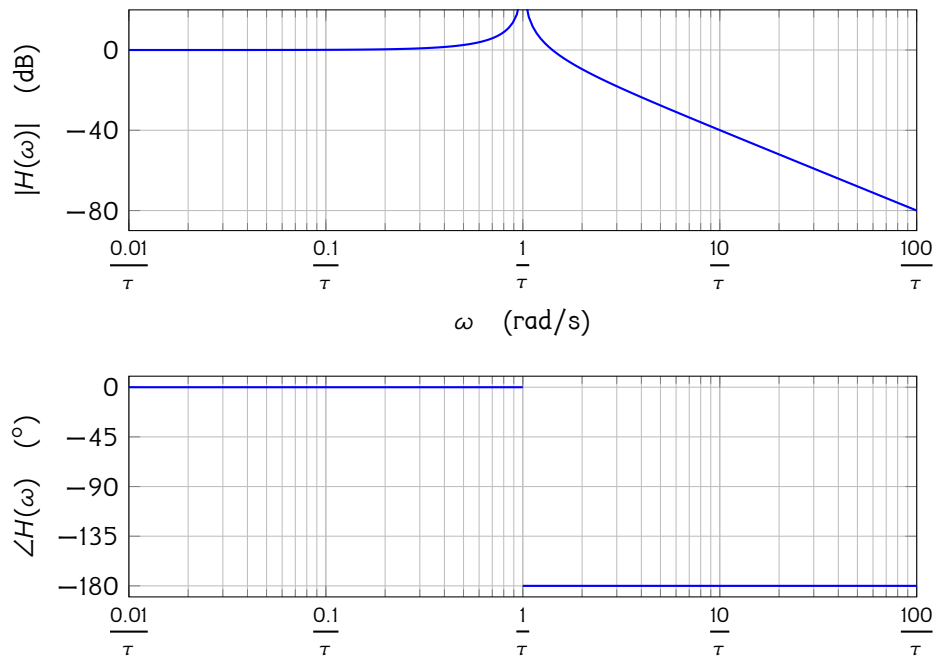
Het bovenstaande schema is de topologie van een courant gebruikte schakelende DC-DC convertor: de buck convertor. Maar voor we een bloemlezing houden van mogelijke topologieën, gaan we eerst dieper in op hoe we deze convertoren analyseren. Centraal daarin staan de kleine rimpelbenadering en de lineaire hellingsbenadering.

#### 10.4.3.2 Kleine rimpel- en lineaire hellingsbenadering

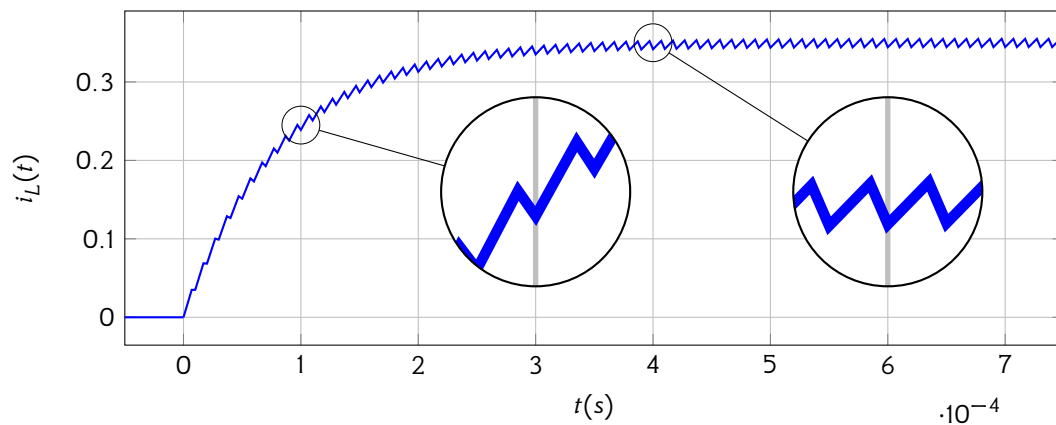
Indien we voor een schakelende DC-DC convertor het stroomverloop door de spoel en het spanningsverloop over de condensator meten of simuleren, dan bekomen we het beeld van Figuur 10.7.

We stellen twee zaken vast:

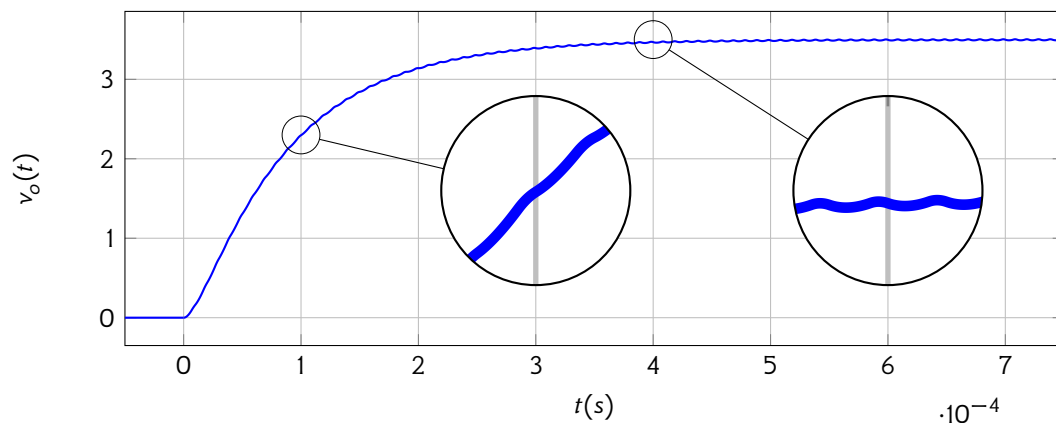
1. in regimetoestand zit er een kleine rimpel op de stroom door de spoel en op de spanning over de



Figuur 10.6: Bode-diagram van het ideale LC laagdoorlaatfilter dat gebruikt wordt in schakelende DC-DC convertoren (met  $\tau = \sqrt{LC}$ )



(a) Stroom door de spoel (tevens uitgangsstroom)



(b) Spanning over de condensator (tevens uitgangsspanning)

Figuur 10.7: Opstart van een buck convertor met ingangsspanning gelijk aan 5 V en  $D = 70\%$

condensator:

$$i_L(t) = I_L + \underbrace{i_{L,ripple}(t)}_{\ll I_L}$$

$$v_C(t) = V_C + \underbrace{v_{C,ripple}(t)}_{\ll V_C}$$

- de overgangen ten gevolge van een schakeloperatie zijn bijna perfect lineair (zie bv. de stroomgrafiek) of een integraal daarvan (zie bv. de spanningsgrafiek). De eerste situatie ontstaat wanneer het energetisch element (de spoel of de condensator) geschakeld is. De tweede situatie ontstaat wanneer het energetisch element niet geschakeld is en de rimpel het gevolg is van een andere rimpel.

Deze vaststellingen leiden tot twee benaderingen:

#### Kleine rimpelbenadering (small ripple approximation)

Indien de rimpel op een signaal klein is, dan kunnen we deze voor analyses waarbij de effecten op de tijdschaal van de rimpel niet relevant zijn, verwaarlozen en het signaal vervangen door zijn gemiddelde waarde.

Dit geldt voor DC-DC convertoren voor de stroom door een spoel en de spanning over een condensator:

$$i_L(t) = I_L + \cancel{i_{L,ripple}(t)}$$

$$v_C(t) = V_C + \cancel{v_{C,ripple}(t)}$$

Omwille van de courante Engelse term small-ripple approximation, korten we deze benadering voortaan af als SRA.

De tweede benadering gaat over de overgangen:

#### Lineaire hellingsbenadering (linear slope approximation)

Indien de spanning over een spoel tijdens het beschouwde (schakel)interval quasi constant is (bv. ten gevolge van de SRA), dan kunnen we de wijziging van de stroom als lineair benaderen:

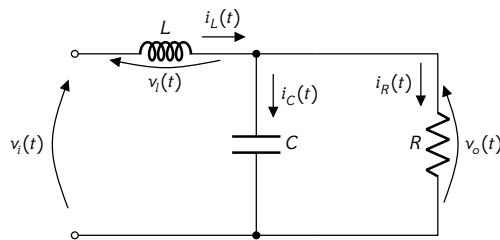
$$i_L(t) = i_L(t_0) + \frac{V_L}{L}(t - t_0)$$

Indien de stroom door een condensator tijdens het beschouwde (schakel)interval quasi constant is (bv. ten gevolge van de SRA), dan kunnen we de wijziging van de spanning als lineair benaderen:

$$v_C(t) = v_C(t_0) + \frac{I_C}{C}(t - t_0)$$

Omwille van de courante Engelse term linear slope approximation, korten we deze benadering voortaan af als LSA.

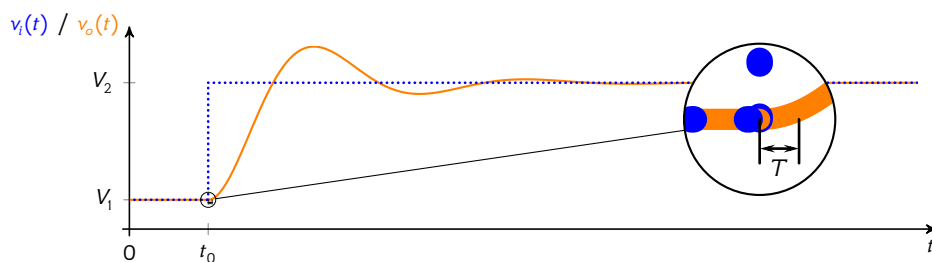
We kunnen deze vaststellingen ook theoretisch onderbouwen. We nemen onze buck convertor als voorbeeld. In de twee werkingsfasen van de convertor zien we het onderstaande LCR-filter dat aangestuurd wordt door de voedingsbron met waarde  $V_i$  of  $0V$ .



waarvoor we gemakkelijk de volgende afleiding kunnen maken (voor de eenvoud schrijven we de tijdsafhankelijkheid van signalen niet expliciet):

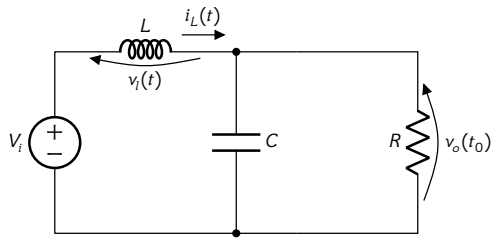
$$\begin{aligned}
 v_l + v_o &= v_i \\
 L \frac{di_L}{dt} + v_o &= v_i \\
 \downarrow i_L &= i_R + i_C \quad / \quad i_R = \frac{v_o}{R} \quad / \quad i_C = C \frac{dv_o}{dt} \\
 LC \frac{d^2 v_o}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{dv_o}{dt} + v_o &= v_i
 \end{aligned}$$

Het oplossen van dergelijke differentiaalvergelijkingen heb je geleerd in de leerlijn wiskunde. Als we bij  $t_0$  een spanningsstap (van spanning  $V_1$  naar  $V_2$  aanleggen aan de ingang (zie blauwe curve hieronder), heeft de golf die een oplossing is van deze vergelijking typisch de vorm van de oranje curve hieronder:



De oscillatiefrequentie (ongeveer  $1/\sqrt{LC}$ ) is doorgaans heel laag in vergelijking met de frequentie waarmee we de schakelaar bedienen, wat wil zeggen dat op de tijdschaal van een periode van de schakelaar (aangeduid op de tekening in de uitvergroting), de uitgangsspanning nog bijna niet is gewijzigd.

Het is dus redelijk om de spanning over de spoel gedurende de korte tijd dat de schakelaar open of dicht is, constant te beschouwen. Dit heeft als gevolg dat de stroom door de spoel lineair toeneemt indien de schakelaar de bron aan de spoel aansluit en lineair weer afneemt als de schakelaar de bron van de spoel afsluit. Deze twee situaties met de afleiding van de stroom staan hieronder naast elkaar:

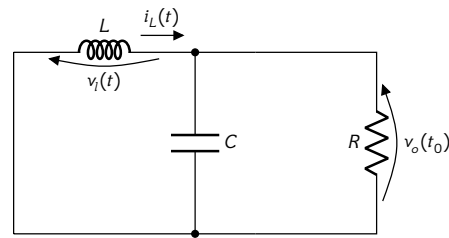


$$L \frac{di_L}{dt} = V_i - v_o(t_0)$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^t L \frac{di_L}{d\tau} d\tau = \int_{t_0}^t (V_i - v_o(t_0)) d\tau$$

$$\Rightarrow i_L(t) - i_L(t_0) = \frac{V_i - v_o(t_0)}{L} (t - t_0)$$

Dit laatste wil zeggen dat de stroom lineair toeneemt met helling  $(V_i - v_o(t_0))/L$ .



$$L \frac{di_L}{dt} = -v_o(t_0)$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^t L \frac{di_L}{d\tau} d\tau = \int_{t_0}^t (-v_o(t_0)) d\tau$$

$$\Rightarrow i_L(t) - i_L(t_0) = -\frac{v_o(t_0)}{L} (t - t_0)$$

Dit laatste wil zeggen dat de stroom lineair daalt met helling  $-v_o(t_0)/L$ .

### Opmerkingen

- Merk op dat we voor de berekening van de stroom door de spoel verondersteld hebben dat de wijziging van de uitgangsspanning verwaarloosbaar klein was, maar we moeten ons wel blijven realiseren dat als gevolg van de de stroom  $i_L(t)$  en de stroom door de belasting  $R$  de condensator wel zal op- of ontladen en de spanning erover dus (langzaam) zal wijzigen. De rimpel is dus wel klein, maar niet volledig nul!
- Merk ook op dat we de kleine rimpelbenadering ook enkel kunnen toepassen op niet-geschakelde continue grootheden. Op geschakelde discontinue grootheden, bijvoorbeeld de spanning over de spoel of de stroom door de condensator, houdt deze benadering geen steek.

Nu we deze twee benaderingen in ons kennisportfolio hebben zitten, kunnen we nu kijken naar de basiswetmatigheden om een convertor in regime te beschrijven: de ladings- en fluxbalansen en de rimpelberekeningen. Ze zullen ons toelaten cruciale parameters voor de convertor te berekenen en geschikte waarden voor de spoel en de condensator te selecteren. Samengevat:

$$\text{Ampere-seconde-balans} \Rightarrow V_C$$

$$\text{Volt-seconde-balans} \Rightarrow I_L$$

$$\text{Stroomrimpelberekening} \Rightarrow L$$

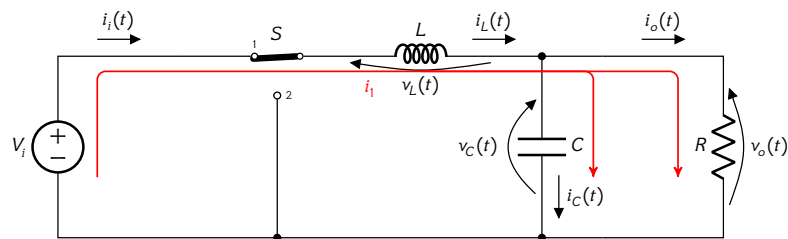
$$\text{Spanningsrimpelberekening} \Rightarrow C$$

Doorgaans kunnen we uit de spanning(en) over de condensator(en) het verband tussen ingangs- en uitgangsspanning bepalen en uit de stro(o)m(en) door de spoel(en) het verband tussen ingangs- en uitgangsstroom.

### 10.4.3.3 Voorbereiding

Als voorbereiding op het berekenen van de balansen en de rimpels, bekijken we de convertor (zie Figuur 10.5) in de twee fasen van zijn werking (de twee standen van de schakelaar).

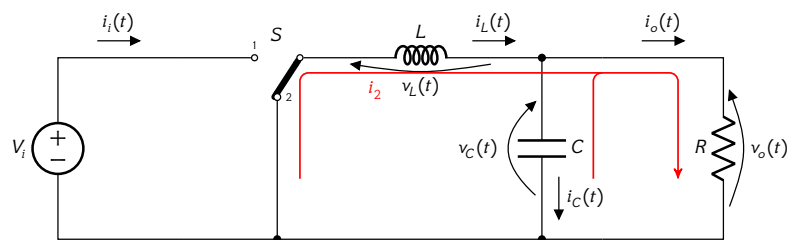
Als de schakelaar  $S$  in stand 1 staat, duwt de voedingsbron stroom door de spoel tot in de condensator en de belasting. De spoel zal door de stroom die vloeit een spanningval creëren die ervoor zorgt dat er energie wordt opgeslagen in het magnetische veld van de spoel.



We kunnen hiervoor de volgende topologische wetten en takvergelijkingen schrijven<sup>4</sup>:

$$\begin{cases} v_L(t) = V_i - v_o(t) \\ v_C(t) = v_o(t) \\ i_L(t) = i_C(t) + i_R(t) \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} v_L(t) = L \frac{di_L}{dt} \\ i_C(t) = C \frac{dv_C}{dt} \\ v_o(t) = Ri_o(t) \end{cases}$$

Als de schakelaar  $S$  in stand 2 staat, zal de spoel pogen om de stroom die erdoor liep op gang te houden, door een spanning op te wekken tegengesteld aan de spanning wanneer de schakelaar in stand 1 stond. De spoel fungeert dan als bron en zet zo haar magnetische energie om in energie die samen met de energie van de condensator de belastingsweerstand van stroom voorziet.



We kunnen hiervoor de volgende topologische wetten en takvergelijkingen schrijven,

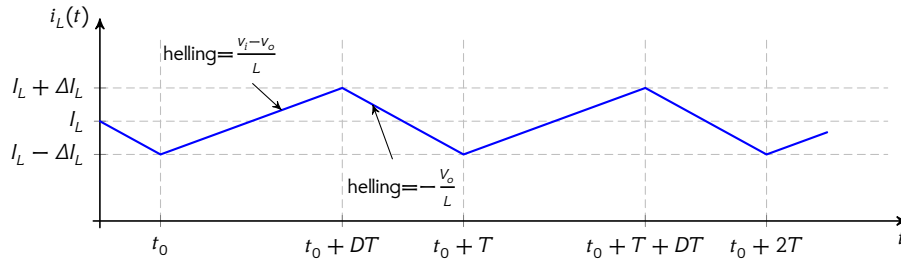
$$\begin{cases} v_L(t) = -v_o(t) \\ v_C(t) = v_o(t) \\ i_L(t) = i_C(t) + i_R(t) \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} v_L(t) = L \frac{di_L}{dt} \\ i_C(t) = C \frac{dv_C}{dt} \\ v_o(t) = Ri_o(t) \end{cases}$$

#### 10.4.3.4 Ladings- en fluxbalansen

##### Fluxbalans of Volt-seconde-balans van de spoel

**Principe:** In regimetoestand gaat de gemiddelde stroom door de spoel niet meer wijzigen en moet de stroomwaarde  $i_L(t_0)$  bij de start van een schakelcyclus gelijk zijn aan de stroomwaarde  $i_L(t_0 + T)$  op het einde van een schakelcyclus, zoals hieronder grafisch weergegeven:

<sup>4</sup>Om plaats te besparen schrijven we het volledige stelsel in twee stukken.



We starten van de takvergelijking van de spoel en lossen daaruit de stroom door de spoel op door beide leden te integreren:

$$\begin{aligned}
 L \frac{di_L(t)}{dt} &= v_L(t) \\
 \Rightarrow \int_{t_0}^{t_0+T} L \frac{di_L(t)}{dt} dt &= \int_{t_0}^{t_0+T} v_L(t) dt \\
 \Rightarrow i_L(t_0 + T) - i_L(t_0) &= \frac{1}{L} \int_{t_0}^{t_0+T} v_L(t) dt \\
 \Rightarrow 0 &= \frac{1}{L} \int_{t_0}^{t_0+T} v_L(t) dt
 \end{aligned}$$

of kort, de Volt-seconde-balans moet nul zijn:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} v_L(t) dt = 0$$

Merk op dat het resultaat van de integraal de eenheid Vs = Wb heeft, wat de eenheid is van magnetische flux. Deze vergelijking stelt inderdaad dat de flux in de spoel in regime is.

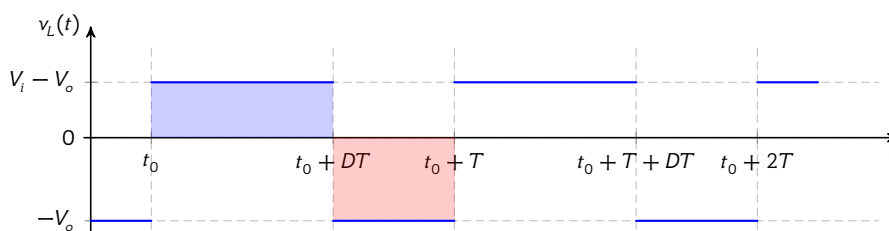
**Toepassing:** Laten we dit toepassen op Figuur 10.5. De spoel ziet de volgende spanningen  $v_L(t)$  i.f.v. de positie van de schakelaar:

$$\begin{aligned}
 v_L(t) &= V_i - v_o(t) && \text{schakelaar in positie 1: } t \in [t_0, t_0 + DT] \\
 v_L(t) &= -v_o(t) && \text{schakelaar in positie 2: } t \in [t_0 + DT, t_0 + T]
 \end{aligned}$$

Indien we uitgaan van de kleine rimpelbenadering op de uitgangsspanning, dan kunnen we stellen dat gedurende 1 schakelperiode de uitgangsspanning niet wijzigt en in regime gelijk blijft aan  $V_o$ :

$$\begin{aligned}
 v_L(t) &= V_i - V_o && \text{schakelaar in positie 1: } t \in [t_0, t_0 + DT] \\
 v_L(t) &= -V_o && \text{schakelaar in positie 2: } t \in [t_0 + DT, t_0 + T]
 \end{aligned}$$

waarbij we met '(SRA)' onder het gelijkheidsteken aanduiden dat we de kleine rimpelbenadering gebruiken. Dit leidt tot het volgende spanningsprofiel over de spoel:



De Volt-seconde-balans stelt dat de blauwe oppervlakte en de rode samen nul moeten opleveren:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} v_L(t) dt = DT(V_i - V_o) - D'TV_o = 0$$

Indien we deze balans verder uitrekenen (met  $D' = 1 - D$ ) en oplossen naar  $V_o$ , bekommen we:

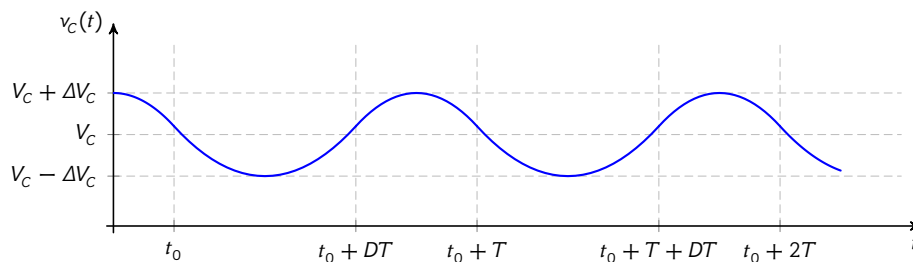
$$V_o = DV_i$$

een resultaat dat we ook eerder al berekenden.

De meerwaarde van deze methode is echter dat de Volt-seconde-balans voor een spoel een universele vergelijking is die we kunnen hanteren op elke convertortopologie in regime. Dit zal ons in staat stellen om zelfs voor complexe, hogere orde convertoren op een eenvoudige manier de uitgangsspanning in regimetoestand te berekenen.

#### Ladings-balans of Ampere-seconde-balans van de condensator

**Principe:** Hetzelfde geldt voor de condensator: in regimetoestand gaat de gemiddelde spanning over de condensator niet meer wijzigen en moet de spanning  $v_C(t_0)$  bij de start van een schakelcyclus gelijk zijn aan de waarde  $v_C(t_0 + T)$  op het einde van een schakelcyclus, zoals hieronder grafisch weergegeven:



We starten van de takvergelijking van de condensator en lossen daaruit de spanning over de condensator op door beide leden te integreren:

$$\begin{aligned} C \frac{dv_C(t)}{dt} &= i_C(t) \\ \Rightarrow \int_{t_0}^{t_0+T} C \frac{dv_C(t)}{dt} dt &= \int_{t_0}^{t_0+T} i_C(t) dt \\ \Rightarrow v_C(t_0 + T) - v_C(t_0) &= \frac{1}{C} \int_{t_0}^{t_0+T} i_C(t) dt \\ \Rightarrow 0 &= \frac{1}{C} \int_{t_0}^{t_0+T} i_C(t) dt \end{aligned}$$

of kort, de ampere-seconde-balans moet nul zijn:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} i_C(t) dt = 0$$

Merk op dat het resultaat van de integraal de eenheid  $As = C$  heeft, wat de eenheid is van lading. Deze vergelijking stelt inderdaad dat de lading op de condensator in regime is.

**Toepassing:** Laten we dit principe terug toepassen op Figuur 10.5. De condensator ziet zowel met de schakelaar in positie 1, als in positie 2 de volgende stroom:

$$i_C(t) = i_L(t) - \frac{v_o(t)}{R}$$

Indien we nu uitgaan van de kleine rimpelbenadering, dan kunnen we stellen dat gedurende 1 schakelperiode de uitgangsspanning niet wijzigt en bijgevolg  $i_L(t) = I_L$  en  $v_o(t) = V_o$ , waardoor

$$i_C(t) \underset{\text{(SRA)}}{=} I_L - \frac{V_o}{R} = 0$$

Dat wil zeggen dat de stroom door de condensator gedurende een schakelperiode constant is, waardoor de ampere-seconde-balans eenvoudig kan geschreven worden als:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} i_C(t) dt = \left( I_L - \frac{V_o}{R} \right) T = 0$$

wat leidt tot de eenvoudige conclusie:

$$I_L = \frac{V_o}{R}$$

wat een evidente conclusie is, want een condensator kan geen DC-stroom opnemen zonder zijn spanning te wijzigen (wat niet kan in regime).

Deze conclusie heeft wat van een storm in een glas water, maar de meerwaarde van deze methode is dat de ampere-seconde-balans een universele vergelijking is die we kunnen toepassen op elke convertortopologie. Dit zal het ons mogelijk maken om zelfs voor hogere orde convertoren op een eenvoudige manier de DC-stromen door de spoelen te berekenen in regimetoestand.

Merk op dat de stroom die door de spoel gaat in regime in de loop van de tijd quasi onveranderd blijft (omwille van de kleine rimpelbenadering), en dat die gedurende  $DT$  geleverd wordt door de bron, en gedurende  $D'T$  door de magnetische energie opgeslagen in spoel.

Dat wil zeggen dat we de gemiddelde bronstroom kunnen berekenen als:

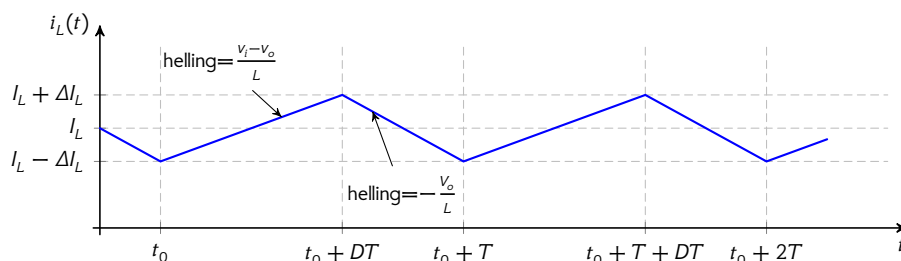
$$I_i = \frac{DT}{T} I_L = DI_L = DI_o$$

#### 10.4.3.5 Rimpelberekeningen (in regime)

Nu we in regime de DC-waarde van de stroom door de spoel en de spanning over de condensator kunnen berekenen, kunnen we ook onderzoeken welke rimpel deze stroom en spanning vertonen i.f.v. de tijd. Indien we deze rimpel willen beperken, dan levert ons dat concrete eisen op voor de waarden van de spoel en de condensator.

##### Rimpel op de stroom door de spoel

We kennen het verloop van de stroom door de spoel. Voor het gemak tekenen we dit hieronder nogmaals:



We zien op deze grafiek duidelijk dat als  $L$  toeneemt, dat de hellingen zullen afnemen en de rimpel zal verkleinen. De maximaal toelaatbare rimpel zal ons dan ook toelaten om een gepaste spoel te kiezen.

Hoe? Deze grafiek laat eenvoudig toe om  $\Delta I_L$  te berekenen:

$$2\Delta I_L = \frac{V_i - V_o}{L} DT$$

$$\Leftrightarrow \Delta I_L = \frac{V_i - V_o}{2L} DT$$

Deze vergelijking werd opgesteld op basis van de stijgende flank. Probeer zelf eens de route via de dalende flank. Je komt op hetzelfde resultaat uit.

Indien we  $V_o$  door vervangen door  $DV_i$ , bekomen we:

$$\Delta I_L = \frac{V_i - DV_i}{2L} DT = D(1 - D) \frac{V_i}{2L} T \quad (10.5)$$

Indien we een specifieke waarde voor  $D$  en een maximaal toelaatbare  $\Delta I_L$  voor ogen hebben, kunnen we met deze vergelijking een minimale waarde voor  $L$  berekenen:

$$L \geq \frac{D(1 - D)T}{2} \frac{V_i}{\Delta I_{L,\max}}$$

Het rechterlid bereikt een maximum voor  $D = 0.5$  (bereken dit zelf!), waardoor de volgende ongelijkheid een goede voorwaarde is voor een maximaal toelaatbare rimpel ongeacht de ingestelde duty cycle:

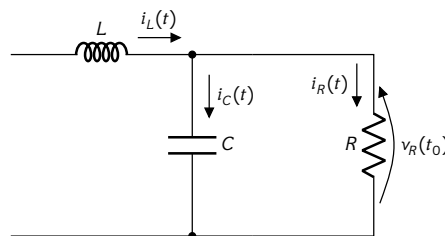
$$L \geq \frac{T}{8} \frac{V_i}{\Delta I_{L,\max}}$$

Conclusie: de toelaatbare stroomrimpel en de gekozen duty cycle bepalen de spoel. Merk ook op dat een hogere schakelfrequentie toelaat om een kleinere spoel te nemen.

#### Rimpel op de spanning over de condensator

Het berekenen van de spanningsrimpel over de condensator (in regime) heeft wat meer voeten in de aarde. De kleine rimpelbenadering stelt immers dat in regime  $v_C(t) = V_o$ , wat zou betekenen dat er geen rimpel op de uitgangsspanning aanwezig is. De conclusie is dat deze veronderstelling in dit geval niet gepast is.

Laten we de combinatie van spoel, condensator en belastingsweerstand daarom even opnieuw bekijken:



Kirchhoffs stroomwet stelt dat:

$$i_L(t) = i_C(t) + i_R(t)$$

In regime kan de condensator geen DC-stroom opnemen (anders zou zijn spanning wijzigen), dus mogen we aannemen dat de DC-stroom van de spoel volledig naar de weerstand gaat. Anderzijds mogen we aannemen dat als het LC-filter goed ontworpen is, de condensator voor de AC-componenten een veel kleinere impedantie zal vormen dan de weerstand en dus quasi alle AC-stroom zal verwerken.

Daarom stellen we als benadering voor:

$$i_C(t) \approx i_L(t) - I_L$$

$$i_R(t) \approx I_L$$

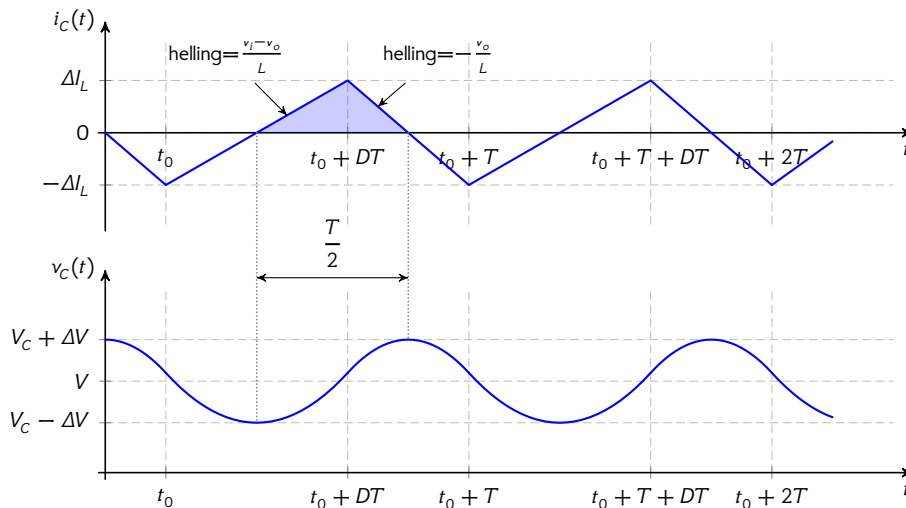
De laatste vergelijking zou suggereren dat  $v_r(t)$  constant zou zijn, maar dat veronderstellen we expliciet niet. We veronderstellen enkel dat de rimpelstroom door de weerstand verwaarloosbaar klein is in de stroomwet die we opschreven.

De rimpelstroom van de spoel gaat dus volledig door de condensator. De takvergelijking van de condensator laat ons toe  $v_C(t)$  te berekenen:

$$C \frac{dv_C}{dt} = i_C(t)$$

$$\Rightarrow v_C(t) = v_C(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_C(t) dt$$

Aangezien de spanning de integraal is van de stroom, zien we duidelijk in de onderstaande figuur, dat de spanning (onderste grafiek) stijgt, zolang de stroom (bovenste grafiek) positief is. We zien ook dat de spanningsgrafiek extrema bereikt waar de stroom nul is.



Dit inzicht laat ons toe om eenvoudig de stijging van de uitgangsspanning van  $V_C - \Delta V_C$  naar  $V_C + \Delta V_C$  te berekenen als de aangegeven gekleurde oppervlakte onder de stroomcurve (de integraal) gedeeld door  $C$ . Concreet wordt dit:

$$2\Delta V_C = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{T}{2} \cdot \Delta I_L}{C}$$

$$\Leftrightarrow \Delta V_C = \frac{\Delta I_L T}{8C} \quad (10.6)$$

We vullen (10.5) in, wat het volgende oplevert:

$$\Delta V_C = \frac{D(1-D)T^2 V_i}{16LC}$$

Indien we voor een gekozen waarde van  $L$  en een specifieke waarde voor  $D$  een maximale  $\Delta V_{C,\max}$  voor ogen hebben, kunnen we met deze vergelijking een minimale waarde voor  $C$  berekenen:

$$C \geq \frac{D(1-D)T^2 V_i}{16L\Delta V_{C,\max}}$$

Het rechterlid bereikt ook ditmaal een maximum voor  $D = 0.5$ , waardoor de volgende ongelijkheid een goede voorwaarde is voor een maximaal toelaatbare spanningsrimpel ongeacht de ingestelde duty cycle:

$$C \geq \frac{T^2 V_i}{64 L \Delta V_{C, \max}}$$

We kunnen deze rimpel beperken door — na een gepaste  $L$  te hebben gekozen i.f.v. de toelaatbare stroomrimpel —  $C$  voldoende groot te nemen. Deze vergelijking zal ons toelaten i.f.v. de spanningsrimpelspecificaties een condensator te kiezen. Merk ook op dat een hogere schakelfrequentie toelaat om een kleinere condensator te nemen.

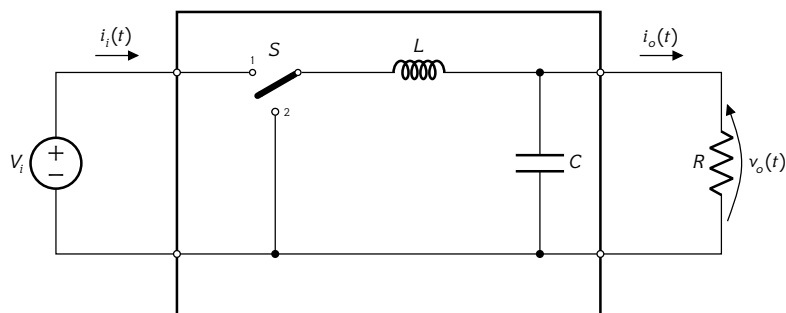
Vaak is starten van (10.6) echter eenvoudiger.

### 10.4.3.6 Typische topologieën

#### De buck of step-down convertor

De term buck convertor komt van 'to buck', in het Nederlands 'bokken'. De term wordt gebruikt om de werking van de condensator te illustreren.<sup>5</sup> Een meer algemene term is de step-down convertor.

Het schema is dat van het prinsipeschema waarmee we de schakelende DC-DC convertor geïntroduceerd hebben:



Zoals we eerder zagen, wordt de gemiddelde uitgangsspanning ingesteld m.b.v. de duty cycle  $D$  van de schakelaar  $S$ .

$$V_o = D V_i$$

$$I_i = D I_o$$

Indien de diode, de spoel en condensator ideaal zijn, dan is het rendement van deze convertor gelijk aan 1, en de verhouding van uitgangsvermogen over verliesvermogen oneindig.

We maakten voor dit type converter reeds de flux- en ladingsbalans op, deden de rimpelberekening en stelden een equivalent model op. De belangrijkste resultaten worden samengevat in Tabel 10.1.

#### De boost of step-up convertor

Een fundamentele beperking van de buck convertor is dat de spanning niet hoger kan worden dan deingangsspanning. Dat kunnen we verhelpen door de spoel te verplaatsen, zodat die steeds in serie met de ingangsbron komt te staan. Zo bekomen we de boost convertor.

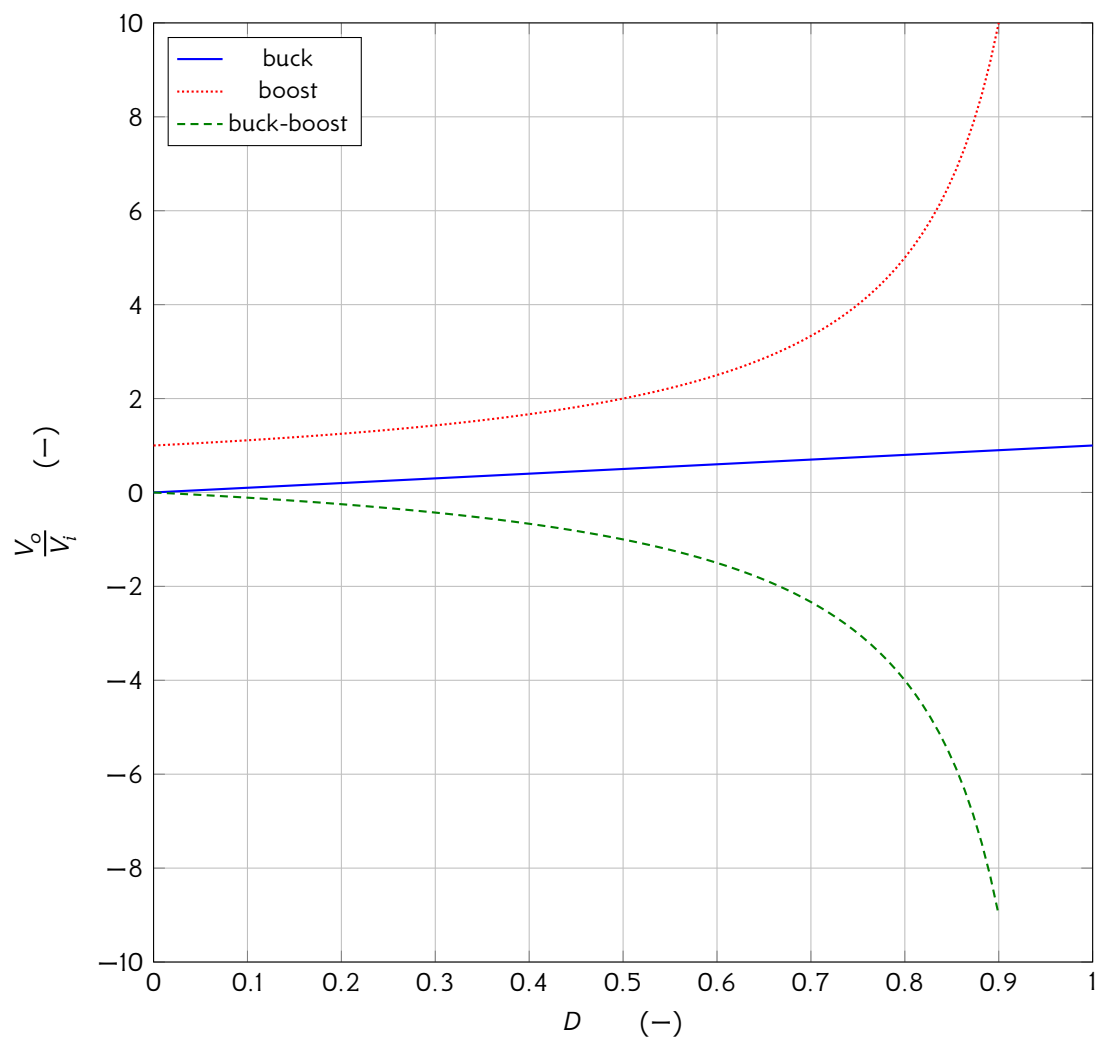
De term boost convertor komt van 'to boost', in het Nederlands 'verhogen'. De term wordt gebruikt om aan te geven dat bij deze convertor de uitgangsspanning steeds hoger is dan deingangsspanning. Een meer algemene term is de step-up convertor.

<sup>5</sup>Een paard 'bukt' door eerst te steunen op de achterste poten en dan vervolgens te landen op de voorste poten, waarbij het zijn hoofd naar beneden houdt en dan zijn achterbenen uitslaat (uit blijdschap).

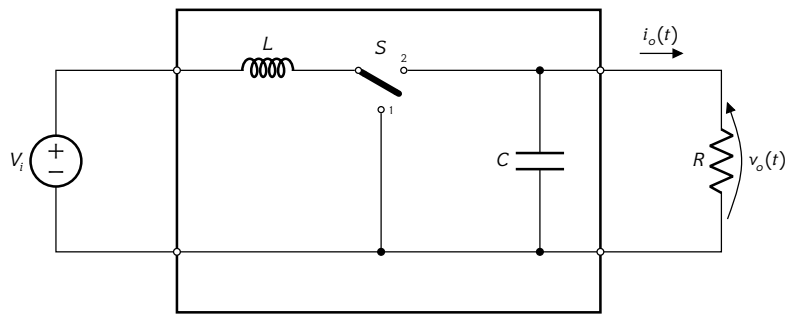
Topologie	$M(D)$	$I_L$	$\Delta I_L$	$V_C$	$\Delta V_C$	$\Delta I_i$	$\Delta V_o$
Buck	$D$	$I_o$	$\frac{D(1-D)TV_i}{2L}$	$DV_i$	$\frac{\Delta I_L T}{8C}$	$\frac{I_i}{2}$	$\Delta V_C$
Boost	$\frac{1}{1-D}$	$\frac{1}{1-D}I_o$	$\frac{DTV_i}{2L}$	$\frac{1}{1-D}V_i$	$\frac{DTI_o}{2C}$	$\Delta I_L$	$\Delta V_C$
Buck-boost	$-\frac{D}{1-D}$	$-\frac{1}{1-D}I_o$	$\frac{DTV_i}{2L}$	$-\frac{D}{1-D}V_i$	$-\frac{DTI_o}{2C}$	$\frac{I_i}{2}$	$\Delta V_C$

$V_o = MV_i$     en     $I_i = MI_o$

Tabel 10.1: Overzicht van de basisparameters van de courante topologieën van schakelende DC-DC convertoren

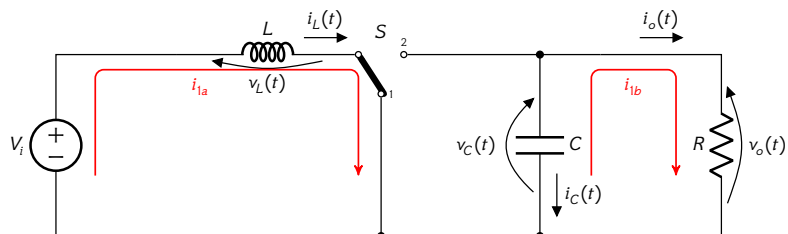


Figuur 10.8: Regelcurves van de courante topologieën van schakelende DC-DC convertoren



Figuur 10.9: Principeschema van een boost DC-DC convertor

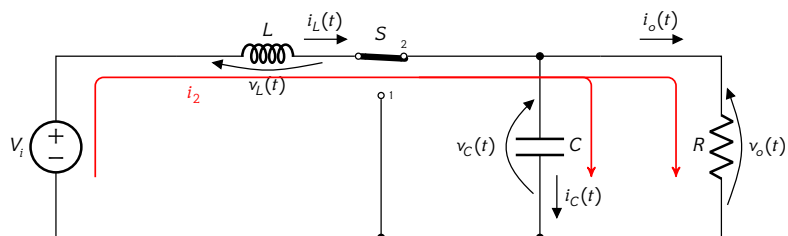
**Voorbereiding** We beschouwen de convertor in zijn twee toestanden. Als de schakelaar  $S$  in stand 1 staat is, zal de voedingsbron stroom door de spoel  $L$  jagen, waardoor die energie opslaat in haar magnetisch veld. Ondertussen levert de condensator stroom aan de belastingsweerstand.



We kunnen hiervoor de volgende topologische wetten en takvergelijkingen schrijven:

$$\begin{cases} v_L(t) = V_i \\ v_C(t) = v_o(t) \\ i_C(t) = -i_o(t) \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} v_L(t) = L \frac{di_L}{dt} \\ i_C(t) = C \frac{dv_C}{dt} \\ v_o(t) = R i_o(t) \end{cases}$$

Van zodra de schakelaar in stand 2 gezet wordt, zal de spoel  $L$  in serie met de voedingsbron  $V_i$  alles in het werk stellen om de stroom ononderbroken verder te laten vloeien. De bronenergie en de magnetische energie van de spoel werken op die manier samen om de condensator  $C$  opnieuw op te laden en de belasting  $R$  verder van stroom te voorzien.



We kunnen hiervoor de volgende topologische wetten en takvergelijkingen schrijven:

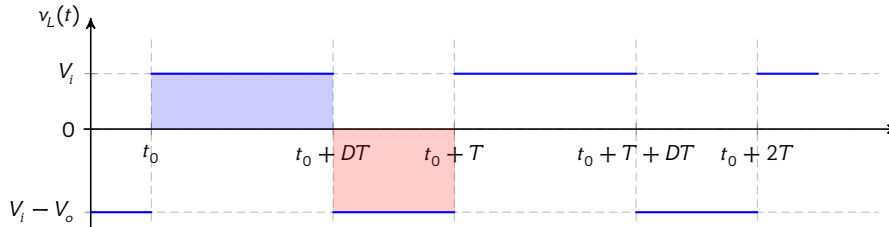
$$\begin{cases} v_L(t) = V_i - v_o(t) \\ v_C(t) = v_o(t) \\ i_C(t) = i_L(t) - i_o(t) \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} v_L(t) = L \frac{di_L}{dt} \\ i_C(t) = C \frac{dv_C}{dt} \\ v_o(t) = R i_o(t) \end{cases}$$

Laten we onze kennis m.b.t. balansen en rimpelberekening toepassen op deze convertor.

Fluxbalans / Volt-seconde-balans De voorbereiding i.c.m. de kleine rimpelbenadering (SRA) leert ons dat:

$$\begin{aligned} v_L(t) &= V_i & S \text{ in stand 1: } t \in [t_0, t_0 + DT] \\ v_L(t) &= V_i - v_o(t) \stackrel{(SRA)}{=} V_i - V_o & S \text{ in stand 2: } t \in [t_0 + DT, t_0 + T] \end{aligned}$$

Dit laat ons toe om het volgende spanningsverloop te schetsen voor de spoel  $L$  in regimewerking:



Merk op dat we in de tekening verondersteld hebben dat  $V_o > V_i$ , omdat anders de balans nooit op nul kan uitkomen. De fluxbalans leert ons dat de blauwe oppervlakte gelijk moet zijn aan de rode:

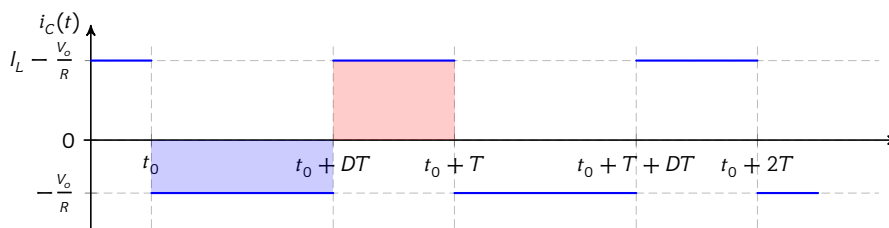
$$\begin{aligned} DTV_i + D'T(V_i - V_o) &= 0 \\ \Leftrightarrow V_o &= \frac{1}{D'}V_i = \frac{1}{1-D}V_i \end{aligned}$$

waarmee we automatisch de uitgangsspanning in regime kennen.

Ladingsbalans / Ampere-seconde-balans De condensator is nu (in tegenstelling met de buck configuratie) wel geschakeld. Wanneer de schakelaar in stand 1 staat, moet de condensator de stroom leveren aan de weerstand. Wanneer de schakelaar in stand 2 staat, voeden de bron en de spoel in serie samen de condensator en de weerstand. De voorbereiding i.c.m. de kleine rimpelbenadering (SRA) leert ons dat:

$$\begin{aligned} i_C(t) &= -i_o(t) = -\frac{v_o(t)}{R} \stackrel{(SRA)}{=} -\frac{V_o}{R} & S \text{ in stand 1: } t \in [t_0, t_0 + DT] \\ i_C(t) &= i_L(t) - i_o(t) = i_L(t) - \frac{v_o(t)}{R} \stackrel{(SRA)}{=} I_L - \frac{V_o}{R} & S \text{ in stand 2: } t \in [t_0 + DT, t_0 + T] \end{aligned}$$

Bijgevolg ziet het stroomprofiel door de condensator er als volgt uit:



Merk op dat we in de tekening  $I_L > V_o/R$  hebben verondersteld omdat anders de ladingsbalans nooit in evenwicht kan zijn. De ladingsbalans stelt dat de blauwe oppervlakte gelijk moet zijn aan de rode:

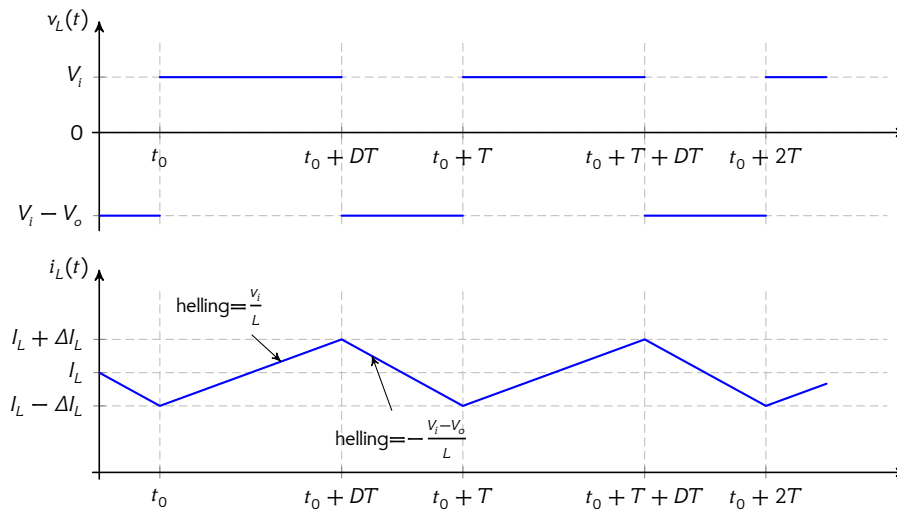
$$-\frac{V_o}{R}DT + (I_L - \frac{V_o}{R})D'T = 0$$

waaruit we gemakkelijk  $I_L$  kunnen oplossen:

$$I_L = \frac{1}{D'}\frac{V_o}{R} = \frac{1}{D'}I_o$$

Dit is dus de ingangsstroom in regime.

**Stroomrimpel** Hoewel de ingangsstroom globaal genomen constant is, zit er natuurlijk wel een rimpel op. Met de schakelaar in stand 1 ziet de spoel de ingangsspanning, in stand 2 ziet ze ingangs- min uitgangsspanning. Deze verschillende spanningen komen overeen met een corresponderende trend (helling) in het stroomprofiel:



Hieruit kunnen we opnieuw op eenvoudige manier de rimpel berekenen:

$$2\Delta I_L = \frac{V_i}{L}DT$$

Dit leidt ons alweer tot een voorwaarde voor de spoel, gegeven een maximaal toelaatbare rimpel:

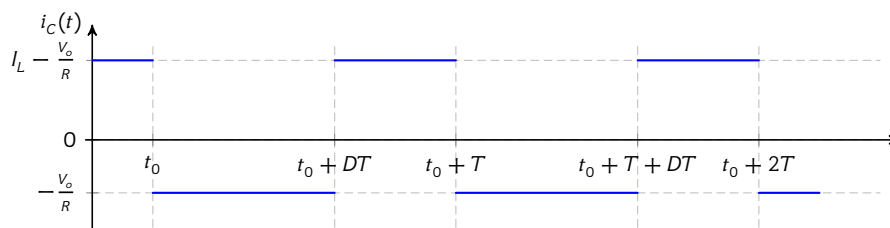
$$L \geq \frac{DT}{2} \frac{V_i}{\Delta I_{L,\max}}$$

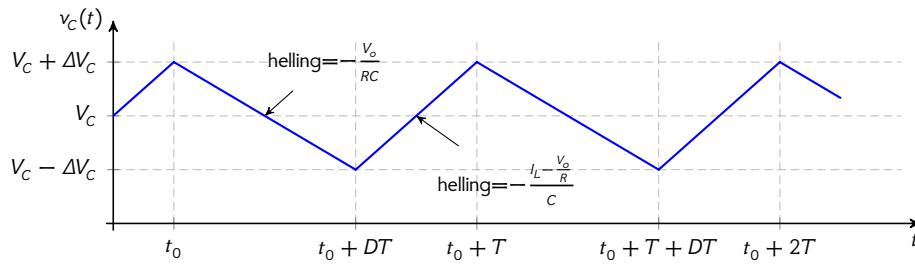
De worst-case situatie treedt ditmaal op wanneer de duty cycle 100% is, omdat de spoel dan gedurende een maximale tijd verantwoordelijk is voor het op gang houden van de uitgangsstroom m.a.w.

$$L \geq \frac{T}{2} \frac{V_i}{\Delta I_{L,\max}}$$

Merk op dat een hogere schakelfrequentie weer toelaat om een kleinere spoel te gebruiken.

**Spanningsrimpel** De spanningsrimpel is nu duidelijk het gevolg van het schakelgedrag van de boostconvector. We schetsten eerder het stroomprofiel van de condensator. De spanningsrimpel op de uitgang is de integraal van dit stroomprofiel, want  $i_C = C \frac{dv_C}{dt}$ . Het resultaat kan je vinden in onderstaande figuur.





Hieruit kunnen we gemakkelijk de rimpelamplitude berekenen:

$$2\Delta V_C = \frac{DT}{C} \frac{V_C}{R} = \frac{DT}{C} I_o$$

Indien we dus een maximale rimpelamplitude  $\Delta V_{\max}$  willen garanderen, dan kunnen we op basis daarvan de condensator dimensioneren:

$$C \geq \frac{DT}{2} \frac{I_o}{\Delta V_{C,\max}}$$

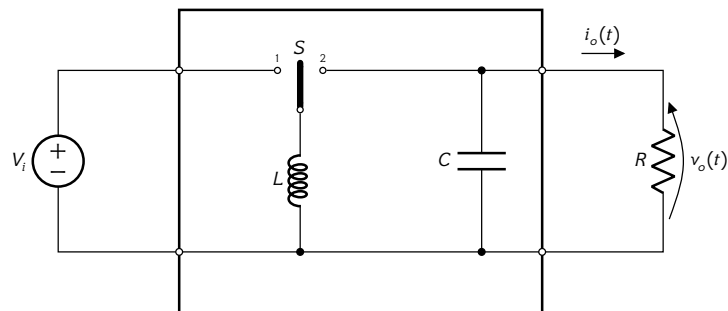
of in het slechtste geval (voor  $D = 1$ ):

$$C \geq \frac{T}{2} \frac{I_o}{\Delta V_{C,\max}}$$

Merk opnieuw op dat een hogere schakelfrequentie toelaat om een kleinere condensator te gebruiken.

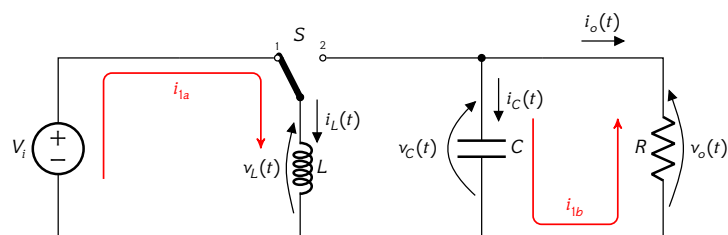
De samenvatting van dit alles vind je in Tabel 10.1.

**De buck-boost converter** De twee vorige convertoren konden ofwel een spanning afleveren die kleiner was dan de voedingsspanning (de buck converter) of groter dan de ingangsspanning (de boost converter). De buck-boost topologie kan beide (vandaar ook de naam). De uitgangsspanning is wel negatief.



Figuur 10.10: Principeschema van een buck-boost DC-DC converter

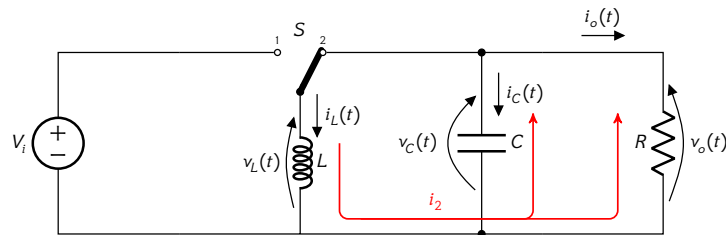
**Voorbereiding** We beschouwen de converter in zijn twee toestanden. Als de schakelaar  $S$  in stand 1 staat, zal de voedingsbron stroom door de spoel  $L$  jagen, waardoor die energie opslaat in haar magnetisch veld. Ondertussen levert de condensator stroom aan de belastingsweerstand.



We kunnen hiervoor de volgende topologische wetten en takvergelijkingen schrijven:

$$\begin{cases} v_L(t) = V_i \\ v_C(t) = v_o(t) \\ i_C(t) = -i_o(t) \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} v_L(t) = L \frac{di_L}{dt} \\ i_C(t) = C \frac{dv_C}{dt} \\ v_o(t) = Ri_o(t) \end{cases}$$

Daarna wordt de schakelaar in stand 2 gezet, waardoor de spoel parallel aan de condensator en de belastingweerstand komt te staan. De spoel zal haar magnetische energie weer afbouwen door stroom door die twee laatste componenten te duwen, waardoor de condensator weer wat bijlaadt. De spoel neemt dan ook het leveren van de belastingsstroom over van de condensator.



We kunnen hiervoor de volgende topologische wetten en takvergelijkingen schrijven:

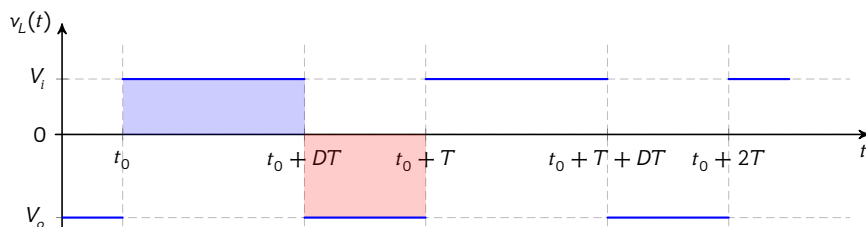
$$\begin{cases} v_L(t) = v_o(t) \\ v_C(t) = v_o(t) \\ i_C(t) = -i_L(t) - i_o(t) \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} v_L(t) = L \frac{di_L}{dt} \\ i_C(t) = C \frac{dv_C}{dt} \\ v_o(t) = Ri_o(t) \end{cases}$$

Laten we onze kennis m.b.t. balansen en rimpelberekening toepassen op deze convertor.

**Fluxbalans / Volt-seconde-balans** De voorbereiding i.c.m. de kleine rimpelbenadering (SRA) leert ons dat:

$$\begin{aligned} v_L(t) &= V_i & \text{S in stand 1: } t \in [t_0, t_0 + DT] \\ v_L(t) &= v_o(t) \stackrel{\text{(SRA)}}{=} V_o & \text{S in stand 2: } t \in [t_0 + DT, t_0 + T] \end{aligned}$$

Dit laat ons toe het spanningsverloop te schetsen dat de spoel  $L$  ziet in regimewerking:



Merk op dat we in de tekening verondersteld hebben dat  $V_o < 0$ , omdat anders de balans nooit op nul kan uitkomen. De fluxbalans leert ons dat de blauwe oppervlakte gelijk moet zijn aan de rode:

$$\begin{aligned} DTV_i + D'TV_o &= 0 \\ \Leftrightarrow V_o &= -\frac{D}{D'}V_i = -\frac{D}{1-D}V_i \end{aligned}$$

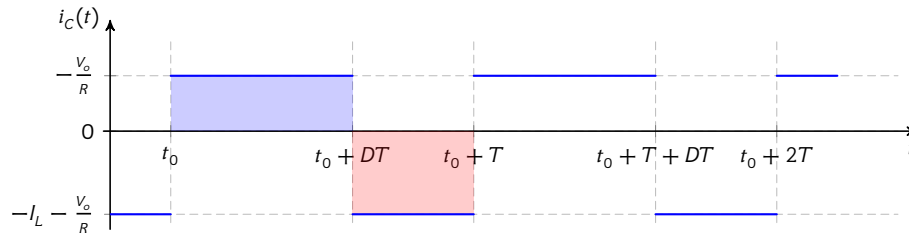
waarmee we automatisch de uitgangsspanning in regime kennen.

Ladingsbalans / Ampere-seconde-balans De voorbereiding i.c.m. de kleine rimpelbenadering (SRA) leert ons dat:

$$i_c(t) = -i_o(t) = -\frac{v_o(t)}{R} \stackrel{(SRA)}{=} -\frac{V_o}{R} \quad S \text{ in stand 1: } t \in [t_0, t_0 + DT]$$

$$i_c(t) = -i_L(t) - i_o(t) = -i_L(t) - \frac{v_o(t)}{R} \stackrel{(SRA)}{=} -I_L - \frac{V_o}{R} \quad S \text{ in stand 2: } t \in [t_0 + DT, t_0 + T]$$

Bijgevolg ziet het stroomprofiel door de condensator er als volgt uit:



Merk op dat we in de tekening al uitgingen van  $V_o < 0$ , op basis van onze fluxbalansberekening. De ladingsbalans stelt dat de blauwe oppervlakte gelijk moet zijn aan de rode:

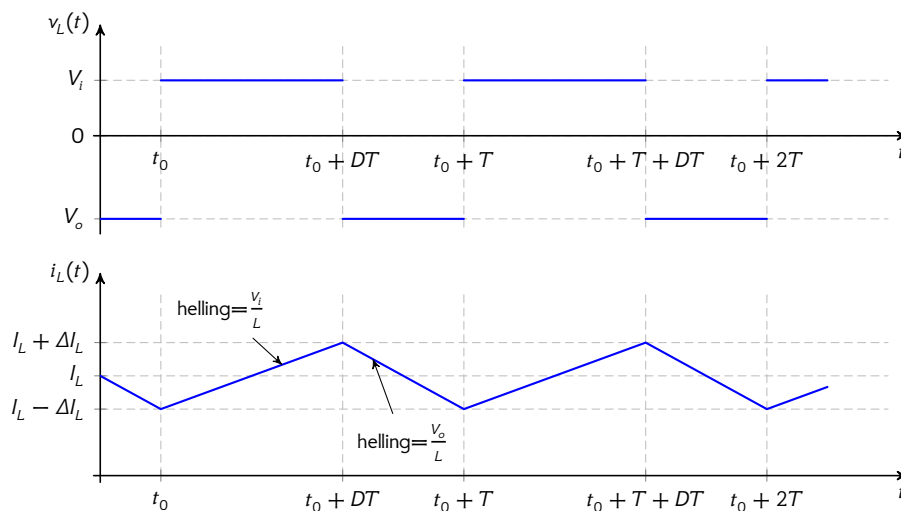
$$-\frac{V_o}{R}DT + (-I_L - \frac{V_o}{R})D'T = 0$$

waaruit we gemakkelijk  $I_L$  kunnen oplossen:

$$I_L = -\frac{1}{1-D} \frac{V_o}{R} = -\frac{1}{1-D} I_o$$

Dit is dus de stroom door de spoel in regimetoestand.

**Stroomrimpel** Het stroomverloop in de spoel  $L$  is functie van de stand van de schakelaar  $S$ . In stand 1, ziet de spoel de ingangsspanning, in stand 2, de uitgangsspanning. Het stroomprofiel is de integraal van dit spanningsprofiel:



Merk daarbij op dat  $V_o < 0V$ . Dit leidt tot de eenvoudige vaststelling dat:

$$2\Delta I_L = \frac{V_i}{L}DT$$

wat ons weer een eenvoudige manier geeft om  $L$  te dimensioneren i.f.v. de maximaal toelaatbare stroomfluctuatie:

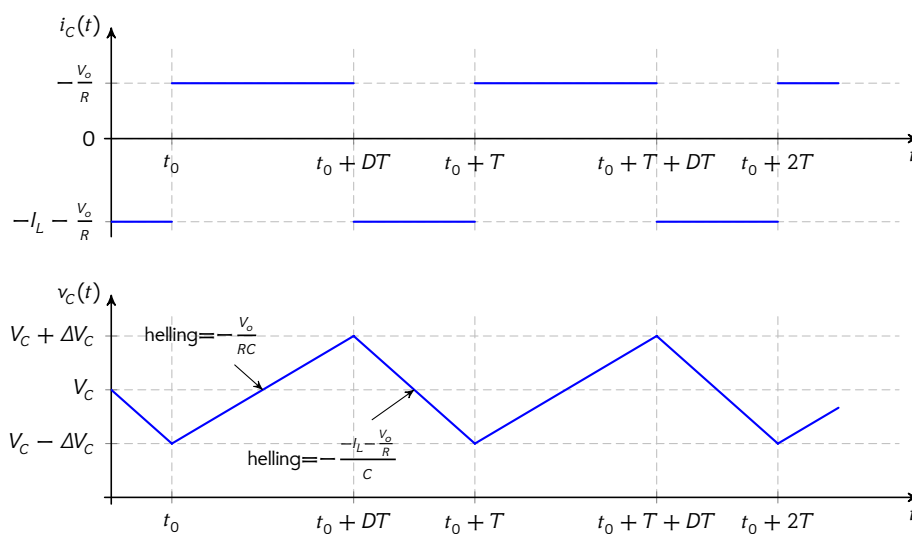
$$L \geq \frac{DT}{2} \frac{V_i}{\Delta I_{L,\max}}$$

of in het slechtste geval (met  $D = 1$ ):

$$L \geq \frac{T}{2} \frac{V_i}{\Delta I_{L,\max}}$$

Merk opnieuw op dat een hogere schakelfrequentie toelaat om een kleinere spoel te gebruiken.

**Spanningsrimpel** Het spanningsverloop over de condensator  $C$  is opnieuw sterk functie van het schakelen van de schakelaar  $S$ . In stand 1 levert de condensator de stroom aan de belasting en in stand 2 levert de spoel de stroom aan de condensator en de belasting. De integraal van dit stroomverloop is de spanningscurve:



De spanningsrimpel kan bijgevolg gemakkelijk berekend worden als:

$$2\Delta V_C = -\frac{V_o}{R} \frac{DT}{C} = -\frac{DT}{C} I_o$$

Indien we dus een maximale rimpelamplitude  $\Delta V_{\max}$  willen garanderen, dan kunnen we dit door de condensator voldoende groot te dimensioneren, nl.

$$C \geq \frac{DT}{2} \frac{I_o}{\Delta V_{C,\max}}$$

of in het slechtste geval (bij  $D = 1$ ):

$$C \geq \frac{T}{2} \frac{I_o}{\Delta V_{C,\max}}$$

Een hogere schakelfrequentie zal weer toelaten om een kleinere condensator te gebruiken.

De samenvatting van dit alles vind je opnieuw in Tabel 10.1.

Merk op dat we systematisch kunnen schrijven:

$$V_o = M V_i$$

$$I_i = M I_o$$

waarbij  $M$  de spanningstransfer van ingang naar uitgang is. Als logisch gevolg van het behoud van energie moet de stroom zich omgekeerd verhouden.

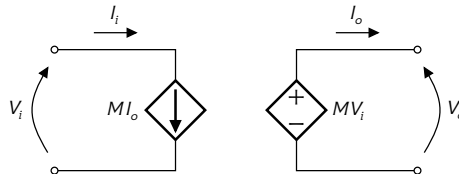
## 10.4.3.7 Model

We kunnen voor deze convertoren in regime ook een eenvoudig netwerkmodel samenstellen. Hiervoor starten we van de transfervergelijkingen die de regimewerking beschrijven:

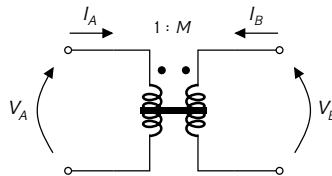
$$V_o = MV_i$$

$$I_i = MI_o$$

waarbij  $M$  de spanningstransfer van ingang naar uitgang is. Deze vergelijkingen komen overeen met het onderstaande netwerkmodel:



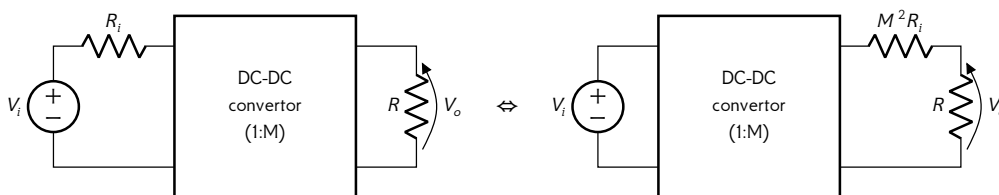
Je hebt het goed gezien, dit is het netwerkmodel van een transformator met windingsverhouding 1:M! Vaak beelden we daarom onze DC-DC convertor dus af als een DC-transformator:



Wees je ervan bewust dat dit model enkel geldt in regime en ook geen benul heeft van rimpel-effecten!

Waarom is dit model dan toch bruikbaar? Exact: voor regimeberekeningen. De essentie is dat een DC-DC convertor voldoet aan de wetmatigheden van een ideale transformator. Dat zorgt er ook voor dat we alle technieken die we kennen uit sectie 4.5.1 op pagina 36 kunnen toegepast op een DC-DC convertor.

Als voorbeeld: indien de convertor gevoed wordt door een bron met een zeker inwendige weerstand, dan kunnen we die weerstand transformeren naar de belastingskant, als volgt:



waardoor we gemakkelijk kunnen zien dat de effectieve uitgangsspanning over de belastingsweerstand  $R$  gelijk zal zijn aan:

$$V_o = \frac{R}{R + M^2 R_i} M V_i$$

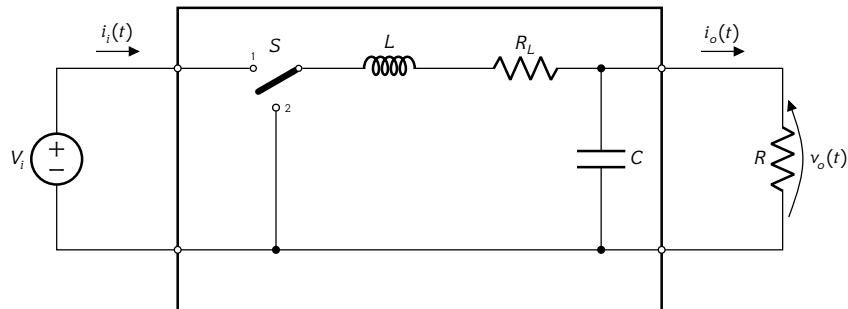
Nogmaals: dit geldt enkel voor DC-berekeningen in regime!

## 10.4.3.8 Verliesberekeningen

Hoewel we ons in dit boekdeel nog niet bekommeren om de niet-idealiteiten van de gebruikte componenten, geven we toch al een voorsmaakje van wat we momenteel al kunnen doen met betrekking tot het berekenen van het conversieverlies.

Als voorbeeld nemen we de buck convertor, waarbij we zullen veronderstellen dat de spoel een parasitaire serieweerstand heeft (wat in de praktijk ook het geval zal zijn).

We krijgen hierdoor de volgende configuratie:



**Voorbereiding** We kunnen nu de volgende topologische vergelijkingen en takvergelijkingen neerschrijven:

Schakelaar in positie 1:

$$\begin{cases} v_L(t) = V_i - v_{R_L}(t) - v_o(t) \\ v_C(t) = -v_o(t) \\ i_L(t) = i_C(t) + i_o(t) \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \\ i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} \\ v_{R_L}(t) = R_L i_{R_L}(t) \\ v_R(t) = R i_o(t) \end{cases}$$

Schakelaar in positie 2:

$$\begin{cases} v_L(t) = -v_{R_L}(t) - v_o(t) \\ v_C(t) = -v_o(t) \\ i_L(t) = i_C(t) + i_o(t) \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \\ i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} \\ v_{R_L}(t) = R_L i_{R_L}(t) \\ v_R(t) = R i_o(t) \end{cases}$$

**Balansen**

**Fluxbalans** De voorbereiding i.c.m. de kleine rimpelbenadering (SRA) leert ons dat:

$$\begin{aligned} v_L(t) &= V_i - v_{R_L}(t) - v_o(t) \stackrel{\text{(SRA)}}{=} V_i - R_L I_L - V_o & \text{S in stand 1: } t \in [t_0, t_0 + DT] \\ v_L(t) &= -v_{R_L}(t) - v_o(t) \stackrel{\text{(SRA)}}{=} -R_L I_L - V_o & \text{S in stand 2: } t \in [t_0 + DT, t_0 + T] \end{aligned}$$

Op basis hiervan schrijven we de fluxbalans:

$$(V_i - R_L I_L - V_o)DT + (-R_L I_L - V_o)D'T = 0$$

**Ladingsbalans** De voorbereiding i.c.m. de kleine rimpelbenadering (SRA) leert ons dat:

$$i_C(t) = i_L(t) - i_o(t) \stackrel{\text{(SRA)}}{=} I_L - I_o = I_L - \frac{V_o}{R}$$

Deze vergelijking geldt voor de hele schakelperiode. Fe fluxbalans wordt dan ook heel eenvoudig:

$$(I_L - \frac{V_o}{R})T = 0$$

**Conclusie** Door de beide balansen nu samen te beschouwen, krijgen we:

$$\begin{cases} (V_i - R_L I_L - V_o)D + (-R_L I_L - V_o)D' = 0 \\ I_L - \frac{V_o}{R} = 0 \end{cases}$$

waaruit we gemakkelijk  $I_L$  en  $V_o$  kunnen oplossen.

$$\begin{cases} V_o = \frac{RD}{R + R_L} V_i \\ I_L = \frac{D}{R + R_L} V_i \end{cases}$$

De ingangsstroom is gelijk aan de stroom door de spoel zolang de schakelaar in positie 1 staat, d.w.z.

$$I_i = DI_L = DI_o$$

**Stroomrimpel** De stroomrimpel is eenvoudig af te leiden als:

$$\begin{aligned} 2\Delta I_L &= \frac{V_i - R_L I_L - V_o}{L} DT \\ \Leftrightarrow \Delta I_L &= \frac{V_i \left(1 - R_L \frac{D}{R + R_L} - \frac{RD}{R + R_L}\right)}{2L} DT \\ \Leftrightarrow \Delta I_L &= \frac{D(1 - D)TV_i}{2L} \end{aligned}$$

Die blijkt dus ongewijzigd te zijn, wat logisch is, aangezien de weerstand in beide fasen van de schakelperiode in de doorvoerlijn staat.

**Spanningsrimpel** Indien we weer veronderstellen dat de stroomrimpel volledig via de condensator loopt en niet via de weerstand, dan krijgen we op basis van het feit dat de stroomrimpel identiek gebleven is, ook een zelfde spanningsrimpel:

$$\Delta V_C = \frac{\Delta I_L T}{8C} = \frac{T^2 D(1 - D)V_i}{16LC}$$

**Rendement** Het wordt echter pas helemaal interessant als we het rendement van de converter bekijken. We berekenen daarom de ingangs- en uitgangsvermogens:

$$\begin{aligned} P_i &= V_i I_i = V_i D I_o \\ P_o &= V_o I_o = \frac{RD}{R + R_L} V_i I_o \end{aligned}$$

Hieruit kunnen we afleiden:

$$\eta = \frac{P_o}{P_i} = \frac{R}{R + R_L}$$

wat we inderdaad mochten verwachten, aangezien in DC de parasitaire weerstand  $R_L$  van de spoel eigenlijk in serie staat met de lastweerstand  $R$ . Voor de andere topologieën zijn de conclusies minder voor de hand liggend. Je kan ze ontdekken bij de oefeningen.

Merk op dat we met deze techniek ook serieweestandsverliezen in de schakelaars zouden kunnen modelleren.

### 10.4.3.9 Regeling en praktische uitvoering

Zonder dat we in detail ingaan op het praktische bouwen van een schakelende regelaar met echte componenten, lichten we toch al een tip van de sluier op m.b.t. hoe deze in de praktijk zullen worden opgebouwd. De schakelaar zit in een IC samen met een regelaar die op basis van een meting van de spanning de duty cycle van de schakelaar bijregelt. De spoel en de condensator zijn doorgaans te groot om in het IC te worden geïntegreerd. Die worden dus extern als passieve component uitgevoerd. Doorgaans wordt aan de ingang ook een buffercondensator toegevoegd.

Zo komen we tot de praktische uitvoeringsschema's van de drie basistypes in Figuur 10.11. De condensator  $C_f$  zorgt ervoor dat een schommeling in de uitgangsspanning quasi zonder vertraging tot bij het regelcircuit geraakt. De teruggekoppelde spanning wordt dan door het IC vergeleken met een intern gegenereerde referentiespanning  $V_R$ , zodat de volgende relatie ontstaat:

$$\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_o = V_R$$

$$\Leftrightarrow V_o = \frac{R_1 + R_2}{R_1} V_R$$

Het spreekt vanzelf dat  $R_1$  en  $R_2$  zo worden gekozen dat de extra stroom die ze uit de voeding trekken verwaarloosbaar is t.o.v. de stroom die nodig is om de schakeling aangesloten op  $V_o$  te voeden.

---

### Oefeningen

**Oefening 10.4.3.9-1:** Een buck converter werd ontworpen om de volgende vermogenconversie te realiseren.

$$V_i = 24 \text{ V} \qquad V_o = 5 \text{ V} \qquad I_o = 1 \text{ A}$$

De volgende waarden werden geselecteerd:

$$f = 500 \text{ kHz} \qquad C = 44 \text{ } \mu\text{F} \qquad L = 5.5 \text{ } \mu\text{H}$$

Bereken: (1) de duty cycle  $D$  waarmee de converter zal moeten schakelen, (2) de stroomrimpel en (3) de spanningsrimpel.

**Oefening 10.4.3.9-2:** Een boost converter werd ontworpen om de volgende vermogenconversie te realiseren:

$$V_i = 0.7 \text{ V} \qquad V_o = 1.5 \text{ V} \qquad I_o = 10 \text{ mA}$$

De volgende waarden werden geselecteerd:

$$f = 125 \text{ kHz} \qquad C = 20 \text{ } \mu\text{F} \qquad L = 2.2 \text{ } \mu\text{H}$$

Bereken: (1) de duty cycle  $D$  waarmee de converter zal moeten schakelen, (2) de stroomrimpel en (3) de spanningsrimpel.

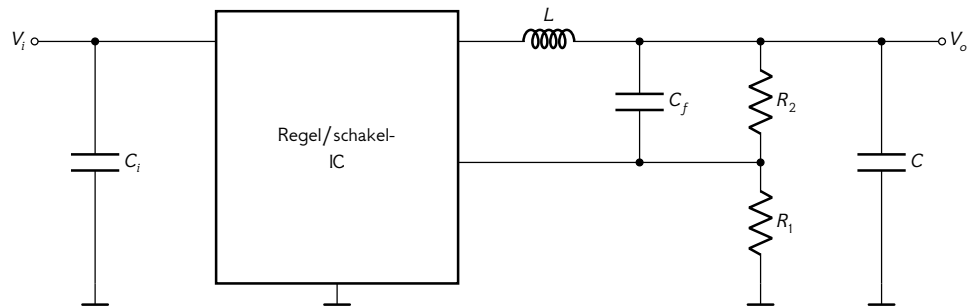
**Oefening 10.4.3.9-3:** Een buck-boost converter werd ontworpen om de volgende vermogenconversie te realiseren:

$$V_i = 5 \text{ V} \qquad V_o = -12 \text{ V} \qquad I_o = 20 \text{ mA}$$

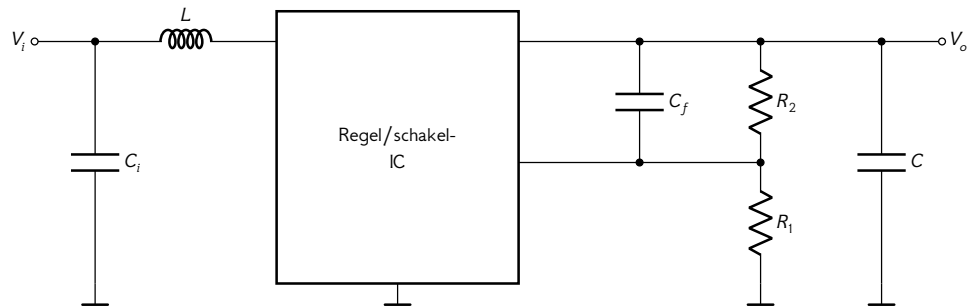
De volgende waarden werden geselecteerd:

$$f = 1 \text{ MHz} \qquad C = 88 \text{ } \mu\text{F} \qquad L = 4.7 \text{ } \mu\text{H}$$

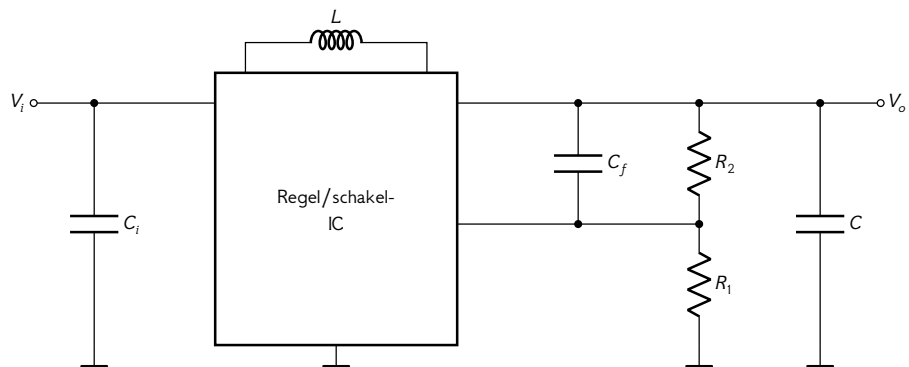
Bereken: (1) de duty cycle  $D$  waarmee de converter zal moeten schakelen, (2) de stroomrimpel en (3) de spanningsrimpel.



(a) buck convertor



(b) boost convertor



(c) buck-boost convertor

Figuur 10.11: Praktische uitvoeringsschema's voor schakelende convertoren

Oefening 10.4.3.9-4: Ontwerp een buck convertor om een ingangsspanning van 9 V om te zetten naar:

$$V_o = 5 \text{ V} \qquad I_o = 1 \text{ A}$$

zodat de rimpel beperkt blijft tot:

$$\Delta V_C = 50 \text{ mV} \qquad \Delta I_C = 100 \text{ mA}$$

Concreet: bepaal de spoel, de condensator, een gepaste schakelfrequentie en de nodige duty cycle.

Oefening 10.4.3.9-5: Ontwerp een boost convertor om een ingangsspanning van 2.4 V om te zetten naar:

$$V_o = 5 \text{ V} \qquad I_o = 2 \text{ A}$$

zodat de rimpel beperkt blijft tot:

$$\Delta V_C = 50 \text{ mV} \qquad \Delta I_C = 100 \text{ mA}$$

Concreet: bepaal de spoel, de condensator, een gepaste schakelfrequentie en de nodige duty cycle.

Oefening 10.4.3.9-6: Ontwerp een buck-boost convertor om een ingangsspanning van 5 V om te zetten naar:

$$V_o = -12 \text{ V} \qquad I_o = 1 \text{ A}$$

zodat de rimpel beperkt blijft tot:

$$\Delta V_C = 50 \text{ mV} \qquad \Delta I_C = 100 \text{ mA}$$

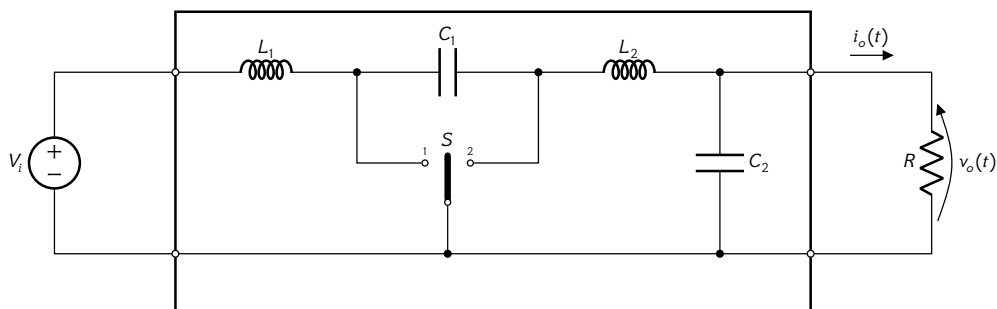
Concreet: bepaal de spoel, de condensator, een gepaste schakelfrequentie en de nodige duty cycle.

Oefening 10.4.3.9-7: Start van een blanco blad. Teken het schema van een buck convertor. Bepaal de balansen en de rimpels en leidt hieruit de conversiefactor  $M(D)$  en de voorwaarden voor de spoel en de condensator af.

Oefening 10.4.3.9-8: Start van een blanco blad. Teken het schema van een boost convertor. Bepaal de balansen en de rimpels en leidt hieruit de conversiefactor  $M(D)$  en de voorwaarden voor de spoel en de condensator af.

Oefening 10.4.3.9-9: Start van een blanco blad. Teken het schema van een buck-boost convertor. Bepaal de balansen en de rimpels en leidt hieruit de conversiefactor  $M(D)$  en de voorwaarden voor de spoel en de condensator af.

Oefening 10.4.3.9-10: De ultieme oefening is om zelf eens een onbekende convertor uit te rekenen. Beschouw de onderstaande Ćuk convertor (spreek uit: 'tsjoek').



Deze convertor werd bedacht door Slobodan Ćuk (zie foto). Dit is een convertor met twee condensatoren en twee spoelen. Je kan dus alle balansen tweemaal opstellen. De ultieme kans om de techniek goed te oefenen.

Bepaal

1. de fluxbalansen
2. de ladingsbalansen
3. de relatie tussen de stromen en spanningen aan de ingang en aan de uitgang (de factor  $M$  i.f.v.  $D$ )
4. de spannings- en stroomrimpels

Als je het nog moeilijker wil maken, voeg dan verliesweerstand  $R_{L_1}$  en  $R_{L_2}$  toe.



**Oefening 10.4.3.9-11:** Stel de ladings- en fluxbalansen op voor een boost convertor met een spoel met een verliesweerstand in serie. Bereken hieruit de conversiefactor  $M(D)$  en de uitdrukkingen voor de spanning- en stroomrimpels en het rendement van de convertor.

**Oefening 10.4.3.9-12:** Stel de ladings- en fluxbalansen op voor een buck-boost convertor met een spoel met een verliesweerstand in serie. Bereken hieruit de conversiefactor  $M(D)$  en de uitdrukkingen voor de spanning- en stroomrimpels en het rendement van de convertor.

## 10.5 Besluit

In dit hoofdstuk beschreven we de basisprincipes om convertoren te maken. We konden dit doen met lineaire serieregelaars en schakelende convertoren. Het nadeel van de eerste is hun slechte rendement wat het voordeel is van de tweede categorie. Wat betreft rimpel op de afgeleverde spanning en stroom is het net omgekeerd. Daar scoren de lineaire serieregelaars beter dan de schakelende convertoren.

We gingen in dit hoofdstuk niet in op hoe we de schakelaars maken voor schakelende convertoren. Met transistors en diodes natuurlijk, maar dat is het onderwerp van het volgende boekdeel. Jullie gaan dus opnieuw nog even geduld moeten hebben.



---

In het eerste deel van deze leerlijn hebben we de elektronica bestudeerd in een ideale wereld. Dat heeft ertoe geleid dat we vele principes, methodes en inzichten hebben, maar helaas weinig praktisch bruikbare technologie om die principes in de realiteit om te zetten.

Dat zal dan ook het onderwerp zijn van het volgende deel: "Analoge Elektronica 2 — Technologie en schakelingen".

Daarin zullen we eerst aandacht besteden aan

- halfgeleider- en PCB-technologie,
- passieve componenten,
- diodes,
- transistoren en
- opamps,

om dan terug de draad op te pikken en verder de netwerken die we tot nu toe gezien hebben om te zetten in schakelingen met reële componenten. Je zal zien dat het goed beheersen van de principes en methodes die je in dit deel hebt gezien, essentieel is om weer een stap verder te kunnen zetten in je kennis en kunde wat betreft elektronica. Dat zou voldoende moeten zijn als motivatie om de vorige hoofdstukken niet enkel vluchtig door te lezen, maar ook grondig in te studeren.



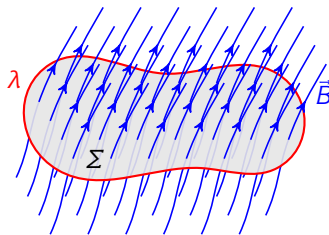
## Van Maxwell naar Kirchhoff

### A.1 Van de wet van Faraday naar Kirchhoffs spanningsvergelijking

In differentiële vorm, legt de wet van Faraday een verband tussen een rotatie in het elektrische veld  $\vec{E}$  en de wijziging van het magnetische veld  $\vec{B}$ :<sup>1</sup>

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Beschouw een open oppervlak<sup>2</sup>  $\Sigma$  met rand  $\lambda$  waar een magnetisch veld  $\vec{B}$  doorpriemt.



Indien we de wet van Faraday integreren over dat oppervlak  $\Sigma$ , dan krijgen we:

$$\iint_{\Sigma} \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{A} = - \iint_{\Sigma} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A}$$

Indien we de regel van Stokes toepassen op het linker lid en in het rechterlid de volgorde van afgeleide en integraal omwisselen (wat mag gezien de regel van Leibniz en het feit dat  $\Sigma$  niet wijzigt in de tijd):

$$\oint_{\lambda} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

De integraal in het rechterlid beschrijft de flux van het magnetische veld doorheen het oppervlak  $\Sigma$ :

$$\oint_{\lambda} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi_B}{dt}$$

Indien we nu veronderstellen dat de wijziging van de flux  $\phi_B$  in de tijd verwaarloosbaar klein is, dan krijgen we:

$$\oint_{\lambda} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Indien we nu ons oppervlak op een lus van een netwerk leggen, zodat de rand samenvalt met de lus, dan kunnen we de kringintegraal van het linkerlid opsplitsen in de som van de spanningen over de elementen, m.a.w.:

$$\sum_l V_l = 0$$

<sup>1</sup>Wil je meer weten over de nabla-notatie die in deze appendix wordt gebruikt, lees dan appendix B.

<sup>2</sup>Een open oppervlak is een oppervlak waar de rand geen deel van uitmaakt.

## A.2 Van de wet van Ampère naar Kirchhoffs stroomvergelijking

In differentiële vorm, legt de wet van Ampère een verband tussen de rotatie in het magnetische veld  $\vec{B}$  en de wijziging van het elektrische veld  $\vec{E}$  en de stroomdichtheid  $\vec{J}$ :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{J}$$

Als we nu van beide leden de divergentie nemen, krijgen we:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{J}$$

Vermits  $\vec{\nabla} \perp \vec{\nabla} \times \vec{B}$  is het linkerlid nul. Bijgevolg:

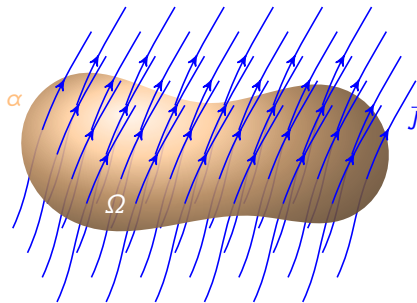
$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

Vervolgens gebruiken we de wet van Gauß om te komen tot:

$$\begin{aligned} \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho}{\epsilon_0} + \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{J} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} &= 0 \end{aligned}$$

(A.1)

Beschouw nu een gesloten volume<sup>3</sup>  $\Omega$  met buitenoppervlak  $\alpha$  waar stroomdichtheidsvectoren doorpriemen.



Indien we nu (A.1) integreren over het volume  $\Omega$ , dan krijgen we:

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iiint_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{J} dV = 0$$

In de eerste term kunnen we opnieuw de volgorde van afgeleide en integraal omkeren gezien de regel van Leibniz en omdat  $\Omega$  constant is in de tijd. Op de tweede term kunnen we het divergentietheorema gebruiken, dat stelt dat een volume-integraal van de divergentie van een vectorveld gelijk is aan de integraal over het omsluitende oppervlak van het vectorveld zelf. Dit leidt ons tot:

$$\frac{d}{dt} \left( \iiint_{\Omega} \rho dV \right) + \oint_{\alpha} \vec{J} d\vec{A} = 0$$

De integraal van de eerste term is de totale lading  $Q$  vervat in het volume:

$$\frac{dQ}{dt} + \oint_{\alpha} \vec{J} d\vec{A} = 0$$

<sup>3</sup>een gesloten volume is een volume waar de rand deel vanuitmaakt.

Indien we nu (1) het volume  $\Omega$  laten samenvallen met een netwerkknoop, zodat de verschillende takken die aangesloten zijn door een deelopervlak hun stroom in de knoop dumpen, en (2) veronderstellen dat we geen lading kunnen ophopen in de netwerkknoop, d.w.z.  $\frac{dQ}{dt} = 0$ , dan krijgen we:

$$\oint_{\alpha} \vec{J} d\vec{A} = 0$$

of

$$\sum_k I_k = 0$$



## De nabla operator in de wetten van Maxwell

---

In Maxwells wetten komt een op het eerste zicht vreemde operator voor, de nabla operator  $\vec{\nabla}$ . Je gaat die later in een van je cursussen wiskunde bestuderen. Laten we toch al even de tijd nemen om hem wat beter te leren kennen.

### B.1 Nabla-calculus

In een vectorruimte met orthonormale basis  $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ , definiëren we de nabla operator als:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$$

Het is een wiskundig concept dat het midden houdt tussen een vector en een functie-operator. De nabla 'vector' kan (1) 'vermenigvuldigd' worden met een scalair veld, (2) m.b.v. een scalair product of (3) m.b.v. een vectorieel product toegepast worden op een vectorveld. Dit leidt tot de volgende operaties:

- gradient
- divergentie
- rotatie

#### B.1.1 Gradient

Beschouw een scalair veld  $V$  dat gedefinieerd is op een open volume<sup>1</sup>  $\Omega$  en partieel afleidbaar is in dat volume. We noteren de gradient van dit veld als  $\vec{\nabla}V$  en berekenen hem als:

$$\vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{e}_z$$

Het resultaat is op zich een vectorveld. De gradient in een punt is dus een vector met richting en grootte. De richting komt overeen met de richting van sterkste stijging in het scalaire veld  $V$  en de grootte is de mate van stijging.

---

<sup>1</sup>Een open volume is een volume waar de rand geen deel van uitmaakt.

### B.1.2 Divergentie

Beschouw een vectorveld  $\vec{F}$  dat gedefinieerd is op een volume  $\Omega$  en een partieel afleidbaar is in dat volume. We noteren de divergentie van dit veld als  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$  en dit berekenen we als:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{F} &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \right) \cdot (F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z) \\ &= \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\end{aligned}$$

Het resultaat van de divergentieberekening is een scalair veld en meet de mate waarin het infinitesimale volume omheen het punt als bron fungeert (en er dus een stroming/flux heeft naar buiten). Positieve waarden geven het punt een bronkarakter (source). Negatieve waarden geven het punt een putkarakter (sink).

### B.1.3 Rotatie

Beschouw een vectorveld  $\vec{F}$  dat gedefinieerd is op een open volume  $\Omega$  en partieel afleidbaar is in dat volume. We noteren de rotatie van dit veld als  $\vec{\nabla} \times \vec{F}$  en dit berekenen we als:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{F} &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \right) \times (F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z) \\ &= \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z\end{aligned}$$

Het resultaat van de rotatieberekening is een vectorveld en meet de mate waarin het vectorveld een draaiing heeft omheen x-, y- en z-as. Positieve waarden voor  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  of  $\vec{e}_z$  geven een draaiing aan die een klassieke kurkentrekker zou maken indien je hem volgens de richting en de zin van de positieve basisvector zou willen in de kurk draaien.

## B.2 Het divergentietheorema

Voor een vectorveld  $\vec{F}$  op een volume  $\Omega$  met rand  $\alpha$ , dat afleidbaar is op het volume, geldt dat:

$$\iiint_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, dV = \oint_{\alpha} \vec{F} \cdot d\vec{A}$$

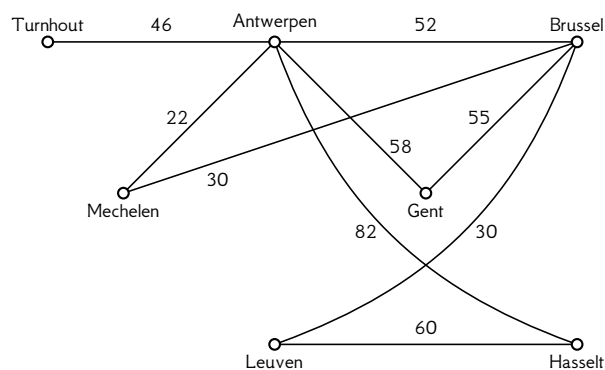
## B.3 Het theorema van Stokes

Voor een vectorveld  $\vec{F}$  doorheen een open oppervlak  $\Sigma$  met rand  $\lambda$ , dat afleidbaar is op het oppervlak, geldt dat:

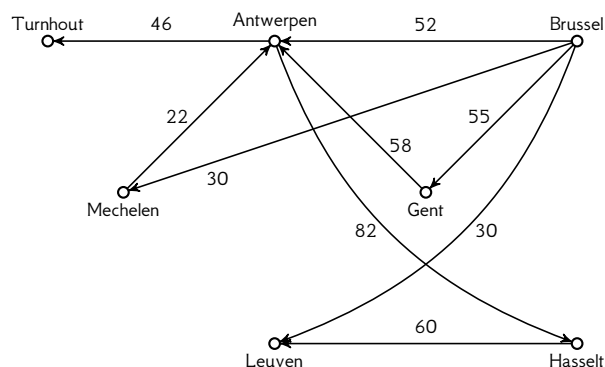
$$\iint_{\Sigma} \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{A} = \oint_{\lambda} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

## Grafen

Een graaf is een wiskundige voorstelling die bestaat uit een aantal punten (die we knopen noemen) en een aantal lijnen die deze punten verbinden (die we takken noemen). De knopen kunnen objecten of concepten zijn. De takken geven aan dat er een zeker verband is tussen de twee verbonden knopen. De onderstaande tekening illustreert dit. De knopen zijn in dit geval steden, en de relatie is 'zijn verbonden met een rechtstreekse snelweg'. Vaak wordt er aan een tak een numeriek gewicht toegekend. We spreken dan van een gewogen graaf. In het voorbeeld hieronder zijn de gewichten de afstanden tussen de steden (in kilometer).



Indien dit verband maar in een richting geldt, dan duiden we die richting aan met een pijl. De graaf wordt zo een gerichte graaf. De onderstaande tekening illustreert dit. De relatie die de takken aanduiden is nu 'zijn verbonden met een rechtstreekse snelweg met oplopende kilometerpalen'.



Indien we via de takken van één knoop naar een andere knoop kunnen gaan, dan spreken we van een pad dat de twee knopen verbindt. Een pad dat terug in dezelfde knoop uitkomt, noemen we een lus. In het voorbeeld

hierboven (met de gerichte graaf), is er een pad van Mechelen naar Leuven en zijn er geen lussen. We moeten immers rekening houden met de pijlen. In het eerste voorbeeld met de ongerichte graaf hebben we meerdere lussen (bv. Antwerpen-Mechelen-Brussel-Antwerpen).

De grafentheorie is een wiskundige discipline waarin men op zoek gaat naar efficiënte manieren om bepaalde eigenschappen van grafen te bepalen. Bijvoorbeeld om te tellen hoeveel lussen een graaf telt, of na te gaan of alle knopen met elkaar verbonden zijn, of wat het pad is met het minste gewicht om van knoop  $A$  naar  $B$  te gaan.

Aangezien de literatuur omtrent grafen dikwijls Engelstalig is, vatten we hieronder in de tabel enkele courante begrippen en hun vertaling samen.

Begrip	Engelse vertaling
graaf	graph
knoop	node, vertex
tak	edge
gewicht	weight
pad	path
lus	loop
gewogen graaf	weighted graph
gerichte graaf	directed graph

## Frequentieverhoudingen en Decibels

### D.1 Frequentieverhoudingen

Vaak is de verhouding tussen twee frequenties van belang. In het bijzonder wanneer we een frequentie-as op logaritmische schaal tekenen (zoals bij een Bodediagram), dan vertaalt een vaste verhouding tussen frequenties zich in een gelijke afstand op de as. Dit is niks nieuws en gewoon een toepassing van de bekende eigenschap van logaritmen:

$$\log \frac{f_1}{f_2} = \log f_1 - \log f_2$$









Er zijn echter twee courante begrippen die het vermelden waard zijn:

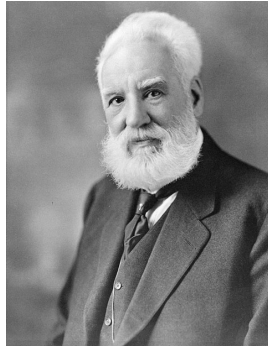
- decade: een verhouding van 10 (afgekort als eenheid: dec)
- octaaf: een verhouding van 2 (afgekort als eenheid: oct)

De benaming decade is de logica zelve. Ze komt van het Latijn voor 10, decem en duidt een verhouding van 10 aan.

De benaming octaaf is echter verwarrend. Ze komt van het Latijn voor 8, octo, maar ze duidt geen verhouding van 8 aan, maar een verhouding van 2!

Welke onverlaat maakte ooit deze keuze? Wel, de benaming komt uit de musicologie, waarbij een naam gekozen werd voor specifieke toonintervallen die het aantal witte toetsen op een pianoklavier telt om van de ondergrens van het interval naar de bovengrens te gaan. Zo kennen we de intervallen prime, secunde, terts, kwart, kwint, sext, septiem en octaaf. Puur ter amusement, werden ze hieronder weergegeven:

Interval	Piano-afstand	Interval	Piano-afstand
Prime		Kwint	
Secunde		Sext	
Terts		Septiem	
Kwart		Octaaf	



Figuur D.1: Alexander Graham Bell (\*1847–†1927)

Voor de muziknerds onder ons: afhankelijk van de startnoot krijg je varianten van deze toonsafstanden. In het voorbeeld hierboven, hadden we een reine prime, een grote secunde, een grote terts, een overmatige kwart, een reine kwint, een grote sext en een groot septiem, en het (altijd) reine octaaf.

Al het bovenstaande is onbelangrijk en zuiver ter amusement. Het enige belangrijke feit om te onthouden is dat een octaaf in het frequentiedomein een verhouding van 2 betekent.

## D.2 Decibels

De decibel ([dB]), genoemd naar Graham Alexander Bell (zie Figuur D.1), de oprichter van de telefoonmaatschappij Bell die later AT&T (American Telephone and Telegraph Company) werd, is een vrij courante (pseudo-)eenheid voor verhoudingen. Helaas wordt ze vaak misbegrepen. Dat is gedeeltelijk het gevolg van een fijne nuance in de definitie ervan en gedeeltelijk omdat deze eenheid frequent gebruikt (misbruikt?) wordt in vele ingenieursdisciplines.

Laten we de zaken hier helder uit de doeken doen.

### D.2.1 Definitie

#### Vermogensverhouding

Het startpunt van de decibel is het begrip vermogensverhouding, d.w.z. de verhouding van een vermogen  $P_2$  t.o.v. een vermogen  $P_1$ . Doorgaans heeft een vermogen de eenheid Watt (W). De verhouding zelf is dimensieloos.

Formeel:

$$R_p = \frac{P_2}{P_1}$$

Om redenen die hieronder pas duidelijk zullen worden, houdt het steek om de logaritme van deze verhouding te nemen:

$$L_p = \log R_p = \log \frac{P_2}{P_1} \quad [\text{B}]$$

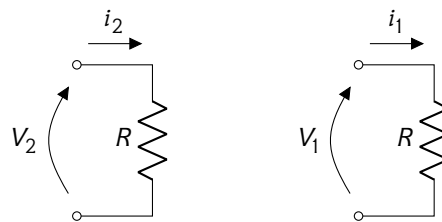
waarbij  $\log$  de Briggse logaritme voorstelt (d.w.z. met basis 10). De grootheid  $L_p$  krijgt dan de (pseudo-)eenheid bel ([B]) toegekend. De eenheid is eigenlijk dimensieloos en wil gewoon benadrukken dat het om een verhouding van grootheden met dezelfde dimensie gaat.

Omdat de getallen die we in bel uitdrukken vaak klein zijn ( $< 1$ ) is er vervolgens besloten om ze met 10 te vermenigvuldigen en op die manier de eenheid decibel (dB) te gebruiken:

$$L_p = 10 \log \frac{P_2}{P_1} \quad [\text{dB}]$$

Eigenlijk stopt het verhaal hier. Helaas bleek het gebruik van de decibel om vermogensverhoudingen aan te duiden zo populair, dat men ook is begonnen met andere verhoudingen in dB uit te drukken, bv. verhoudingen van zogenaamde veldgrootheden in V, V/m of Pa.

Nu hebben deze veldgrootheden wel een band met vermogens. Beschouw bv. een spanning  $V_2$  over een weerstand  $R$  in vergelijking met een spanning  $V_1$  over dezelfde weerstand:



Het vermogen verbruikt door deze weerstand is respectievelijk  $V_2^2/R$  en  $V_1^2/R$ . Bijgevolg kan de vermogensverhouding  $L_p$  geschreven worden als:

$$\begin{aligned} L_p &= 10 \log \frac{P_2}{P_1} = 10 \log \frac{V_2^2/R}{V_1^2/R} = 10 \log \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^2 \\ &= 20 \log \frac{V_2}{V_1} \end{aligned}$$

De laatste stap kan je maken wetende dat  $\log a^b = b \log a$ .

Deze vergelijking is heel praktisch en eigenlijk nog vrij eenvoudig, maar ze heeft wel geleid tot heel wat verwarring, gaande van twijfel of we nu een factor 10 of 20 moeten gebruiken, tot het gebruik van onzinnige begrippen als dB-vermogen en dB-spanning.

De volgende stelling is de enige juiste:

De waarde  $L_p$  in eenheid dB stelt altijd een vermogensverhouding voor, maar je kan ze berekenen startend van een vermogensverhouding, (met factor 10), of een veldverhouding (met factor 20).

#### Absolute vermogensgrootheden

Het misbruik van de dB stopt echter niet bij de onwetendheid die hierboven geschetst werd. Tot overmaat van ramp besloot men om ook absolute grootheden in dB uit te drukken door ze te vergelijken met een arbitraire referentiegrootheid.

Een bloemlezing:

Eenheid	Referentiewaarde	Gebruik
dBV	1 V	spanning
dBmV	1 mV	spanning
dB $\mu$ V	1 $\mu$ V	spanning
dBm	1 mW	signaalvermogen <sup>1</sup>
dBSPL <sup>2</sup>	20 $\mu$ Pa	geluidsdruk in lucht
	1 $\mu$ Pa	geluidsdruk in vloeistoffen
dB SIL	1 pW/m <sup>2</sup>	geluidsintensiteitsniveau
dB SWL	1 pW	geluidsvermogeniveau
dBc	carrier power	ruis- of zijbandvermogen relatief t.o.v. de draaggolf

Ook hier geldt weer dat het steeds om vermogensverhoudingen gaat. Zo komt  $-20$  dBV overeen met een spanning van  $0.1$  V (veldgrootheden, dus factor 20 gebruiken), en komt  $80$  dB SIL overeen met  $100 \mu\text{W}/\text{m}^2$  (vermogensgrootheden, dus factor 10 gebruiken).

#### Dimensiehoudende verhoudingen

Decibels worden courant gebruikt voor verhoudingen van veldgrootheden, bv. om een spanningsversterking of een stroomversterking in een Bode-plot weer te geven. In elektrische netwerken kan je echter ook een versterking van een stroom naar een spanning berekenen (een transimpedantie) of van een spanning naar een stroom (een transadmittantie). Deze verhoudingen zijn niet dimensieloos, maar toch een verhouding van veldgrootheden.

Grootheid	Linear	Eenheid	Logaritmisch	Eenheid
Spanningsversterking	$A_V = \frac{V_2}{V_1}$	-	$20 \log A_V$	dB
Stroomversterking	$A_I = \frac{I_2}{I_1}$	-	$20 \log A_I$	dB
Transimpedantie	$Z = \frac{V_2}{I_1}$	$\Omega$	$20 \log Z$	dB $\Omega$
Transadmittantie	$Y = \frac{I_2}{V_1}$	S of $\text{S}$	$20 \log Y$	dB S of dB $\text{S}$

Het gebruik van eenheden in combinatie met de dB is helaas totaal inconsistent met de notatie gebruikt voor de absolute vermogensgrootheden. Je gaat ermee moeten leren leven.

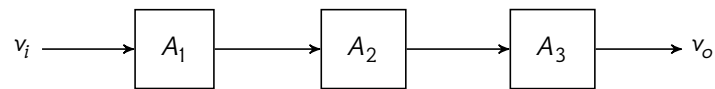
#### D.2.2 Rationale

Nu we begrijpen hoe we verhoudingen in dB berekenen, dringt de vraag zich op: waarom doen we dit? Waarom gebruiken we deze logaritmische grootheden i.p.v. een eenvoudige verhouding?

<sup>1</sup>Soms gebruikt men de eenheid ook om een spanningsniveau aan te geven. In audio-toepassingen is dat dan een spanning over een impedantie van  $600 \Omega$ , in radiofrequente (RF) toepassingen een spanning over een impedantie van  $50 \Omega$ .

<sup>2</sup>Soms worden de geluidsmetingen gewogen i.f.v. de sensitiviteit van het menselijke gehoor om zo te komen tot een A, B, of C-versie.

**Vereenvoudiging van de berekeningen** Een overtuigende illustratie hiervan is een ketting van signaalversterkers die een ingangssignaal  $v_i$  versterken of verzwakken tot een signaal  $v_o$ :



Dit zou een communicatiekanaal kunnen zijn met een zendversterker, een kanaaldemping en een ontvangstversterker.

Het verband tussen  $v_o$  en  $v_i$  is eenvoudigweg:

$$v_o = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot v_i$$

Als we de spanningen nu refereren t.o.v. een gemeenschappelijke referentiespanning  $v_r$  (d.w.z. beide leden van de vergelijking delen door  $v_r$ ) dan krijgen we:

$$\frac{v_o}{v_r} = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \frac{v_i}{v_r}$$

Als we vervolgens de 20-voudige Briggse logaritme nemen van beide zijden, en verder uitwerken, dan bekommen we:

$$\begin{aligned}
 20 \log \left( \frac{v_o}{v_r} \right) &= 20 \log \left( A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \frac{v_i}{v_r} \right) \\
 &\downarrow \log(a \cdot b) = \log a + \log b \\
 L_{P_o} &= 20 \log A_1 + 20 \log A_2 + 20 \log A_3 + L_{P_i}
 \end{aligned}$$

Of in een slordige, maar zeer ingenieurfähige notatie:

$$v_{i,\text{dB}} = A_{1,\text{dB}} + A_{2,\text{dB}} + A_{3,\text{dB}} + v_{o,\text{dB}}$$

Hiermee hebben we een moeilijke vermenigvuldiging vervangen door een eenvoudige optelling.

**Logaritmische grootheden** Een tweede overtuigende reden voor het gebruik van logaritmische vermogenverhoudingen is dat een van onze menselijke zintuigen, het gehoor, logaritmisch van aard is. Een lineaire toename in geluid vraagt een exponentiële groei in het geluidsvermogen. Dit verklaart waarom de hele geluidsleer vol decibels zit.

### D.2.3 Vuistregels bij het rekenen met dBs

De volgende benaderende tabel geeft enkele typische verhouding met de bijhorende decibel-waarde.

$L_P$	Power ratio	Field ratio
3 dB	2	$\sqrt{2}$
6 dB	4	2
10 dB	10	$\pi$
20 dB	100	10

Natuurlijk klopt de waarde  $\pi$  niet, maar ze komt verduiveld dicht in de buurt.

Laten we als voorbeeld schatten met welke vermogensverhouding en welke veldverhouding een decibel-niveau van  $L_p = 36$  dB overeenkomt:

$$\begin{aligned}L_p = 36 \text{ dB} &= (20 + 10 + 6)\text{dB} \\ &\Downarrow \\ \frac{P_2}{P_1} &= 100 \cdot 10 \cdot 4 = 4000 \\ \frac{V_2}{V_1} &= 10 \cdot \pi \cdot 2 = 62.8\end{aligned}$$

Als je meer nauwkeurigheid nodig hebt, dan gebruik je beter een rekenmachine.

### D.3 Besluit

Als je ervoor zorgt dat je deze appendix grondig beheerst, dan ga je menig gevecht om frequentieverhoudingen en Decibels met minder goede ingenieurs en wetenschappers probleemloos kunnen winnen. Niet echt een ontspannende café-bezigheid, maar toch.

## Oplossen van lineaire stelsels met parameters

---

### E.1 De regel van Cramer

De regel van Cramer is genoemd naar Gabriel Cramer, een Zwitsers wiskundige (zie Figuur E.1) en laat toe om een stelsel van  $N$  lineaire vergelijkingen in  $N$  onbekenden op te lossen aan de hand van het berekenen van determinanten. Voor numerieke toepassingen, waarbij alle coëfficiënten getallen zijn, is dit doorgaans geen goed idee (er bestaan betere numerieke technieken). Voor symbolische toepassingen, waarbij de coëfficiënten parameters zijn, wel.



Figuur E.1: Gabriel Cramer (\*1704–†1752)

We schrijven het stelsel lineaire vergelijkingen met  $N$  vergelijkingen en  $N$  onbekenden voorstellen als een matrixvergelijking:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

waarbij  $\mathbf{A}$  de vierkante coëfficiëntenmatrix met elementen  $i_{ij}$ ,  $\mathbf{x}$  de (kolom)vector van onbekenden en  $\mathbf{b}$  de rechterlidvector voorstelt.

Indien dit stelsel exact één oplossing heeft (wat wil zeggen dat  $\mathbf{A}$  inverteerbaar is, m.a.w. de determinant van  $\mathbf{A} \neq 0$ ), dan kunnen we de  $i$ -de onbekende berekenen als:

$$x_i = \frac{|\mathbf{A}_i|}{|\mathbf{A}|}$$

Hierbij is  $\mathbf{A}_i$  de matrix waarbij de  $i$ -de kolom werd vervangen door het rechterlid  $\mathbf{b}$ , en stellen  $|\mathbf{A}_i|$  en  $|\mathbf{A}|$  de determinanten voor van  $\mathbf{A}_i$  en  $\mathbf{A}$ .

## E.2 Berekenen van een determinant door kolom- of rij-ontwikkeling

De determinant van een vierkante matrix kan recursief berekend worden door ontwikkeling naar een willekeurige rij of kolom.

**Rijontwikkeling** Een determinant van een vierkante  $N \times N$  matrix  $\mathbf{A}$  met elementen  $a_{ij}$  kan berekend worden door ontwikkeling naar een willekeurige rij  $i$  als:

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^N (-1)^{i+j} a_{ij} |\mathbf{A}_{ij}|$$

waarbij  $\mathbf{A}_{ij}$  de matrix is waarbij de  $i$ -de rij en de  $j$ -de kolom geschrapt werden.

**Kolomontwikkeling** Een determinant van een vierkante  $N \times N$  matrix  $\mathbf{A}$  met elementen  $a_{ij}$  kan berekend worden door ontwikkeling naar een willekeurige kolom  $j$  als:

$$|\mathbf{A}| = \sum_{i=1}^N (-1)^{i+j} a_{ij} |\mathbf{A}_{ij}|$$

Deze berekening wordt bijzonder interessant indien er kolommen of rijen zijn die veel nullen bevatten.

- [CDK87] Leon O. Chua, Charles A. Desoer, and Ernest S. Kuh. *Linear and Nonlinear Circuits*. McGraw-Hill Book Company, 1987.
- [CL75] Leon O. Chua and Pen-Min Lin. *Computer-aided analysis of Electronic Circuits: Algorithms and Computational Techniques*. Prentice Hall, 1975.
- [Dar76] Gobind Daryanani. *Principles of active network synthesis and design*. John Wiley & Sons, 1976.
- [EM20] Robert W. Erickson and Dragan Maksimović. *Fundamentals of Power Electronics*. Springer Nature Switzerland AG, 3rd edition, 2020.
- [Flo18] Thomas L. Floyd. *Electronic Devices, Conventional Current Version*. Pearson Education, 2018.
- [GHLM] Paul R. Gray, Paul J. Hurst, Stephen H. Lewis, and Robert G. Meyer. *Analysis and Design of Analog Integrated Circuits*. John Wiley & Sons, 5th edition.
- [Gia16] Douglas C. Giancoli. *Physics, Principles with Applications, Global Edition*. Pearson Education, 7th edition, 2016.
- [GM04] Bahram Azizollah Ganji and Burhanuddin Yeop Majlis. Condenser microphone performance simulation using equivalent circuit method. 2004 IEEE International Conference on Semiconductor Electronics, page 8, 2004.
- [GR80] Robert A. Gabel and Richard A. Roberts. *Signals and Linear Systems*. John Wiley & Sons, 2nd edition, 1980.
- [LS94] Kenneth R. Laker and Willy M.C. Sansen. *Design of Analog Integrated Circuits and Systems*. McGraw-Hill Book Company, 1994.
- [MG87] Jacob Millman and Arvin Grabel. *Microelectronics*. McGraw-Hill Book Company, 1987.
- [Mil40] J. Millman. A useful network theorem. *Proceedings of the IRE*, 28(9):413–417, 1940.
- [NP73] Laurence. W. Nagel and Donald O. Pederson. Spice (simulation program with integrated circuit emphasis). Technical report, University of California, Berkeley, 1973.
- [Sel66] G. Selinger. *Basic Matrix Analysis and Synthesis*. Pergamon Press, 1966.
- [vH53] Hermann von Helmholtz. Über einige Gesetze der Vertheilung elektrischer Ströme in körperlichen Leitern mit Anwendung auf die thierisch-elektrischen Versuche. *Annalen der Physik und Chemie*, 89(6):211–233, 1853.
- [VV60] Mac Elwyn Van Valkenburg. *Introduction to modern network synthesis*. John Wiley & Sons, 1960.



- 
- actieve filters, zie filters, actief
  - actieve netwerken, zie netwerken, actieve, 156
  - afhankelijke bronnen, zie eementen30
  - Ampère, Andr-'Marie, 11
  - auto- en transkenmerken, 88
  - autokenmerken, zie standaardkenmerken, autokenmerken
  - autonome bronnen, zie elementen, actieve
  
  - basisgootheden, zie gootheden10
  - basiswetten, zie wttten4
  - Bell, Alexander, 272
  - Bessel, Friedrich, 161
  - Bode, Hendrik, 54
  - Bode-diagrammen, 54, 167
    - inleiding, 54
    - schetsen, 167
  - bronnen, zie elementen, actieve
  - Butterworth, Stephen, 161
  
  - Cauer, Wilhelm, 161
  - Chebyshev, Pafnuty, 161
  - Clapp oscillator, 216
  - Colpitts oscillator, 202
  - Colpitts, Edwin, 198
  - comparatoren, 149
    - met hysteresis, 151
    - zonder hysteresis, 149
  - componenten
    - verschil met elementen, 23
  - convertoren, 219–260
    - DC-DC, 228
      - actieve, 229
      - lineaire serieconvertoren, 229
      - principe, 228
      - schakelende convertoren, 232
    - doel, 220
    - gelijkrichters, 224
    - rendement, 221
    - transformator, 222
  - Cramer, Gabriel, 277
  
  - Delon cel, 131
  - differentiator, 153
  - driehoekschakeling, 63
  - dropper, 123, 125, 126
  - dubbelzijdige Greinacher cel, 131
  
  - eenpoortmodellen, 96
  - elementen
    - actieve, 29
    - afhankelijke bronnen, 30
    - autonome bronnen, 29
    - operationele versterker, 31
    - classificatie, 24
    - neutrale, 34
      - transformator, 34
    - overzicht, 38
    - passieve, 24
      - diode, 26
      - R, L, C, 24
      - Zener-diode, 28
    - verschil met componenten, 23
  - filters, 157
    - actief, 176
      - basisprincipes, 176
      - biquad filters, 178
      - biquad filters met negatieve feedback, 180
      - biquad filters met positieve feedback, 181
      - impedantieschaling, 178
    - casades, 174
    - frequentie-afhankelijke impedanties, 161
    - LC-netwerken, 162
    - passief, 175
    - RC-netwerken, 161
    - RL-netwerken, 162
    - RLC-netwerken, 163
    - types, 158
  - geconcentreerde netwerken, 5
  - gedistribueerde netwerken, 3
  - gelijkrichter, 129
    - dubbelzijdig, 129
    - enkelzijdig, 129
  - gelijkrichters, 224
  - Greinacher cel, 131
  - gootheden, 9–13
    - energie, 12
    - gemiddeld vermogen, 12
    - spanning, 11
    - stroom, 10
    - vermogen, 11
      - bronconventie, 12
      - verbruikersconventie, 12
  - harmonische oscillator, 196
  - Hartley oscillator, 208
  - Hartley, Ralph, 198
  - Heaviside, Oliver, 3
  
  - integrator, 153

- Joule, James, 11
- Kirchhoff, Gustav, 5  
kleine rimpelbenadering, 234  
klem en knooppuntskenmerken, 89
- LC-netwerken, 162  
lineaire hellingsbenadering, 234  
lineaire netwerkmodellen, 95  
  a'b'c'd'-parameters, 117  
  abcd-parameters, 116  
  eenpoort- of tweepoolmodellen, 96  
  g-parameters, 112  
  h-parameters, 109  
  tweepoort- of vierpoolmodellen, 102  
  y-parameters, 108  
  z-parameters, 104  
lumped circuit condition, 7
- Maxwell, James, 3  
metingen, 17  
  DC, 17  
  spanning, 19  
  stroom, 18  
  vermogen, 20  
  in frequentiedomein, 22  
  in tijddomein, 20
- Middlebrook, Robert, 233  
Millman, Jacob, 69  
multiple feedback filter, 181
- netwerken  
  actieve, 138–156  
  geconcentreerde, 5  
  gedistribueerde, 3  
  passieve, 122–138
- omzetters, 144  
  spanning naar stroom, 145  
  stroom naar spanning, 145
- operationele versterker, zie elementen, actieve  
oscillatoren, 193–217  
  harmonische, 196  
  basisprincipes, 197  
  LC-tank, 200  
  Wienbrug, 198  
  relaxatie, 194
- parallelschakeling, 61  
passieve filters, 175  
Pederson, Donald, 75  
Philbrick, George, 33  
Pierce oscillator, 216  
poort, 88  
potentiometrische delers, 122  
  capacitief, 123  
  inductief, 125  
  resistief, 122
- RC-netwerken, 161  
rekentechnieken  
  met stromen en potentialen, 67–69  
  met stromen en spanningen, 41–60  
  in DC, 45  
  in het frequentiedomein, 46  
  in het tijddomein, 41  
  spectra en bode-diagrammen, 54  
  modified nodal analysis, 72–84  
  stelling van Millman, 69  
  superpositie, 58  
  vereenvoudigingen  
    serie- en parallelschakeling, 61  
    ster- en driehoekschakeling, 63  
  vereenvoudingen, 61  
relaxatie-oscillator, 194  
RL-netwerken, 162  
RLC-netwerken, 163
- Sallen-Key filter, 183  
Schmitt triggers, 151  
serieschakeling, 61  
signalen, 13–17  
  blokgolf, 14  
  DC, 13  
  driehoeksgolf, 14  
  ruis, 17  
  sinusoidaal, 13  
simulatie, 22  
sommator, 126  
somversterkers, 145  
  inverterend, 145  
  niet inverterend, 146  
spanningsvermenigvuldigers, 130  
  ladingspomp, 135  
  spanningsladder, 131  
spectra, 54  
standaard kenmerken  
  auto- en transkenmerken, 88  
  autokenmerken, 91  
  admittantie, 91  
  impedantie, 91  
  klem en knooppuntskenmerken, 89  
  transkenmerken, 92  
  spanningstransferverhouding, 92  
  stroomstransferverhouding, 92  
  transadmittantie, 93  
  transimpedantie, 93  
sterschakeling, 63  
superpositie, 58
- transformator, zie elementen, neutrale  
transformatoren, 222  
transkenmerken, zie standaardkenmerken, transkenmerken

---

triggers, 149  
tweepoolmodellen, 96  
tweepoortmodellen, 102  
  
verschilversterkers, 147  
versterkers, 138  
    inverterend, 138  
    niet inverterend, 141  
    spanningsvolger, 144  
vierpoortmodellen, 102  
Villard cel, 131  
Volta, Alessandro, 11  
  
Watt, James, 11  
wetten  
    Kirchhoff, 5  
        spanningswet, 6  
        stroomwet, 6  
        voorwaarden, 5  
    Maxwell  
        differentiaalvorm, 4  
        integraalvorm, 4  
Widlar, Bob, 33  
Wien, Max, 198



## Formularium 2-Basis Analoge Elektronica (v2024)

Geldigheid van de lumped circuit benadering

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \qquad \lambda = \frac{v}{f} \qquad \lambda_{\min} \gg l_{\text{netwerk}}$$

Wetten van Kirchhoff en takrelatie voor tweepolen

$$\forall \text{ lus: } \sum_i V_i = 0 \qquad \forall \text{ knoop: } \sum_i I_i = 0 \qquad V = Z \cdot I$$

Regel van Millman voor een knoop met potentiaal  $V_\bullet$  met  $N$  buurpotentialen  $V_i$  verbonden met elk een buur-admittantie  $Y_i$ , een admittantie  $Y_0$  naar de referentiepotentialen en  $M$  inkomende stroombronnen  $I_j$ :

$$V_\bullet = \frac{\sum_{i=1}^N Y_i V_i + \sum_{j=1}^L I_j}{\sum_{i=0}^N Y_i}$$

Complex vermogen bij rekenwerk met  $s = j\omega$  op basis van amplitudes:

$$S = \frac{1}{2}(V \cdot I^*) \qquad P_{\text{schijnbaar}} = |S| \qquad P_{\text{actief}} = \Re(S) \qquad P_{\text{reactief}} = \Im(S)$$

Transformatie-operaties

- voor transformator met windingsverhouding  $N_A : N_B$ :

Verplaatsing van A- naar B-zijde (behoud van oriëntatie)	Vermenigvuldigingsfactor
impedantie	$\left(\frac{N_B}{N_A}\right)^2$
spanningsbron	$\frac{N_B}{N_A}$
stroombron	$\frac{N_A}{N_B}$

- serie - parallel voor complexe impedanties:

$$Z_s = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n \qquad Z_p = Z_1 \parallel Z_2 \parallel \dots \parallel Z_n = \frac{1}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots + \frac{1}{Z_n}}$$

- ster-driehoek voor complexe impedanties met  $Z_{12}, Z_{23}, Z_{31}$  driehoeksimpedanties en  $Z_1, Z_2, Z_3$  sterimpedanties:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{Z_{31}Z_{12}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}} & Z_2 &= \frac{Z_{12}Z_{23}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}} & Z_3 &= \frac{Z_{23}Z_{31}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}} \\ Z_{12} &= Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_3} & Z_{23} &= Z_2 + Z_3 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_1} & Z_{31} &= Z_3 + Z_1 + \frac{Z_3 Z_1}{Z_2} \end{aligned}$$

- Thévenin:  $V = V_{OC}$   $Z = \frac{V_{OC}}{I_{SC}}$
- Norton:  $I = I_{SC}$   $Y = \frac{I_{SC}}{V_{OC}}$

Basisnetwerken

Opamp-versterkers: versterking in lineair gebied

$$I: A = -\frac{R_2}{R_1}$$

$$NI: A = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

Opamp-comparators: klapspanningen

$$I: V_H = \underbrace{\frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{ref}}_{\equiv V'_{ref}} + \underbrace{\frac{R_1}{R_1 + R_2} V^+}_{\equiv \Delta^+}$$

$$V_L = \underbrace{\frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{ref}}_{\equiv V'_{ref}} + \underbrace{\frac{R_1}{R_1 + R_2} V^-}_{\equiv \Delta^-}$$

$$NI: V_H = \underbrace{\frac{R_1 + R_2}{R_2} V_{ref}}_{\equiv V'_{ref}} + \underbrace{\left(-\frac{R_1}{R_2} V^-\right)}_{\equiv \Delta^+}$$

$$V_L = \underbrace{\frac{R_1 + R_2}{R_2} V_{ref}}_{\equiv V'_{ref}} + \underbrace{\left(-\frac{R_1}{R_2} V^+\right)}_{\equiv \Delta^-}$$

Filterspectra — Bode diagrammen

